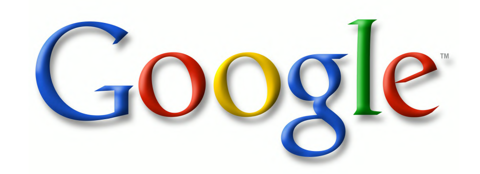
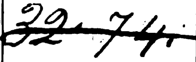
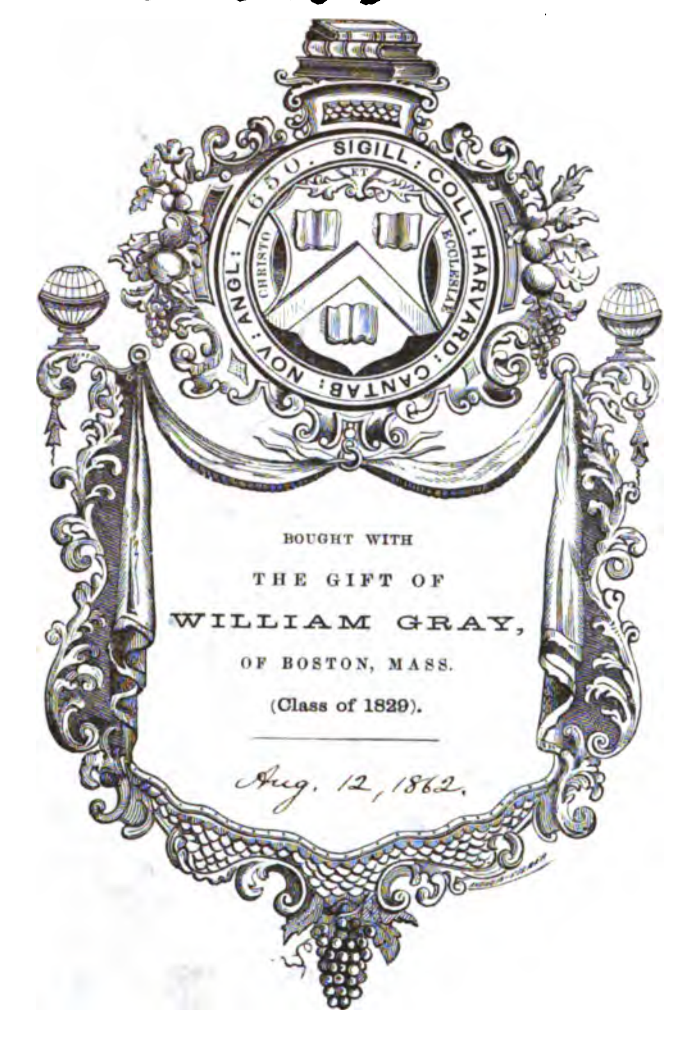
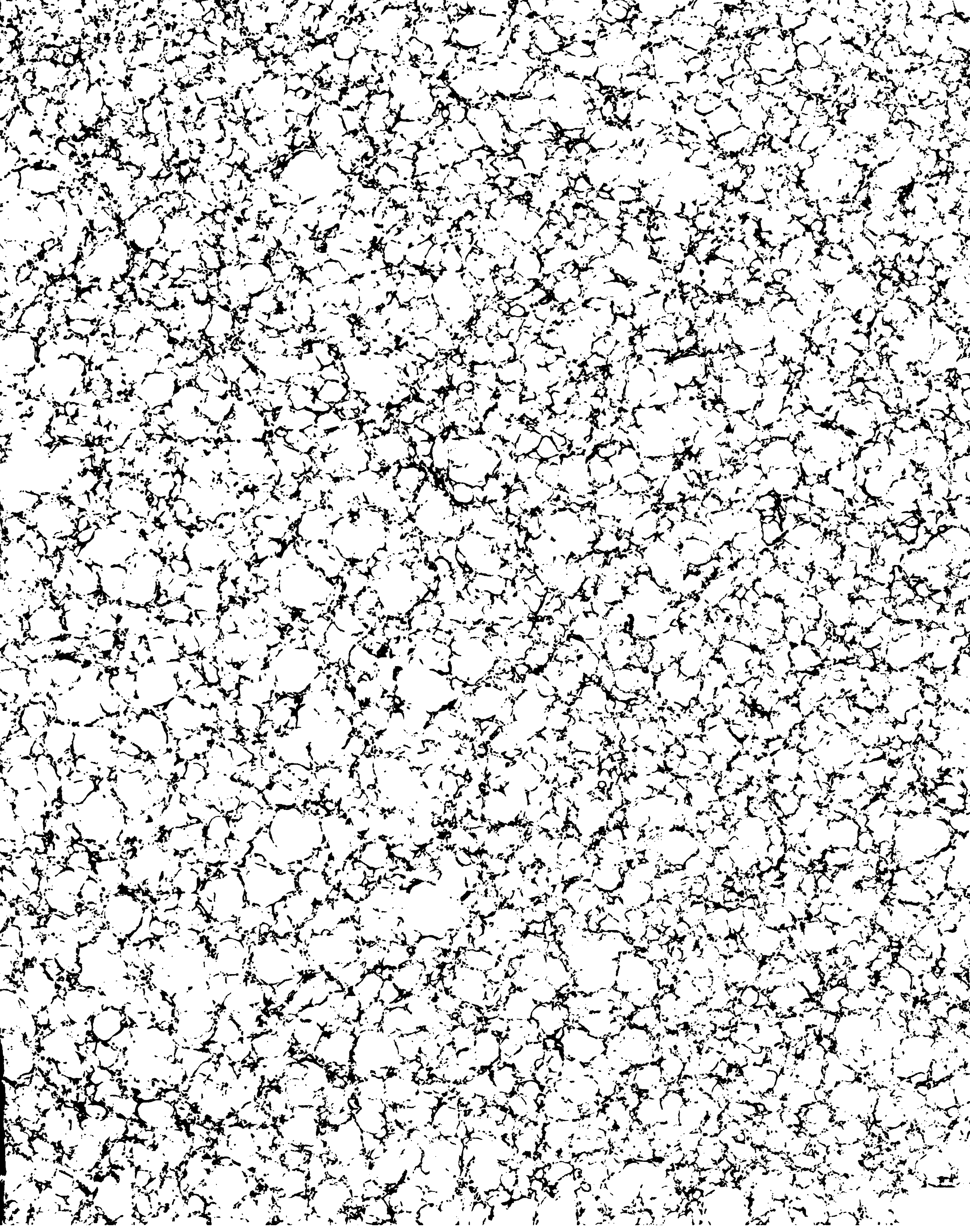





SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE GIFT OF
WILLIAM GRAY,
OF BOSTON, MASS.
(Class of 1829).
Aug. 12, 1862.



ANALYTISCH-GEOMETRISCHE

ENTWICKLUNGEN

VON

DR. JUL. PLÜCKER,

AUSSERORDENTLICHEM PROFESSOR IN BONN.

ZWEITER BAND.

MIT ZWEI KUPFERTAFELN.

ESSEN,

BEI G. D. BAEDEKER.

1831.

Vorrede.

Die Berührungen, in welche meine litterarischen Arbeiten mit den Arbeiten anderer Geometer gekommen sind, veranlassen mich, über die meinigen in einige Erörterungen einzugehen.

Der Keim von allen Entwicklungen, die ich bisher im Gebiete der analytischen Geometrie geliefert habe, ist in den Vorträgen über die sechste Auflage von BIOT, *Essai de Géométrie analytique*, zu suchen, mit welchen ich im Sommer-Semester 1825 meine akademische Laufbahn begann, in den Vorträgen über dasselbe Buch, durch welches ich selbst, einige Jahre früher, in jene Behandlungsweisen der Geometrie, denen man in neuerer Zeit alle die grossartigen Resultate verdankt, eingeführt worden bin.

Als ich damals absichtslos einige Kreise auf das Papier hinzeichnete, kam mir aus dem Anblick der Figur die Vermuthung, dass die drei gemeinschaftlichen Chorden je zweier von drei gegebenen Kreisen in demselben Puncte sich schneiden. Bei der Verification dieses Satzes auf analytischem Wege erwartete ich auf Eliminationen zu stossen, ich suchte Weitläufigkeiten auf und fand keine: ich kam zum Beweise dieses Satzes durch die einfachste Verbindung dreier Symbole (94). In dieser Beweisführung lag zugleich die allgemeine Theorie der gemeinschaftlichen Chorden je zweier beliebiger Kreise, weil die Bedingung, dass solche Kreise sich wirklich schneiden, auf keine

Weise in jener symbolischen Bezeichnung ausgedrückt ist. Nichts war hiernach natürlicher als dieselbe Art der Beweisführung auch auf lineare Gleichungen und die allgemeine Gleichung der Linien zweiter Ordnung auszudehnen und hierbei durch unbestimmte Coefficienten die allgemeine Verbindung solcher Gleichungen auszudrücken. Hier traten mir sogleich die allgemeinen Schemata der 383. und der 384. Nummer entgegen, und vor allem Uebrigen nahm der Satz, dass die Gleichungen irgend zweier Linien zweiter Ordnung, gleichviel ob dieselben sich schneiden oder nicht, sich immer wenigstens zu einer Gleichung eines Systemes von zwei reellen geraden Linien verbinden lassen, meine Aufmerksamkeit in Anspruch, und war sehr geeignet, mir fühlbar zu machen, wie Symmetrie und Einfachheit der Darstellung nur in der Allgemeinheit zu suchen ist.

Aus diesen Ideen ist der erste Band der „Entwicklungen" hervorgegangen: bei der Ausarbeitung desselben war mein Grundsatz, alle Elimination zu verbannen, wenigstens da, wo es sich nicht um absolute Grössen-Bestimmung handle.

Um mich in dem Gebiete der Geometrie, das ich einer neuen Behandlungsweise zu unterwerfen versuchen wollte, zu orientiren und geometrische Resultate zu sammeln, durchlief ich GERGONNE's Annalen. Hier muss ich zuerst der Behandlung des APOLLONIschen Problems der Tactionen durch den Herausgeber erwähnen, wobei die elegante Construction linearer Gleichungen denselben zu einer Auflösung geführt hat, die alle frühern Auflösungen, welche die Proportionen-Geometrie geliefert hatte, in den Hintergrund zurückdrängte. Diese Art zusammengesetztere lineare Gleichungen zu construiren, schloss sich genau an meine Ansichten an; das fruchtbare Schema der 391. Nummer ist eine blosse Ausdehnung derselben. Aber es steht dieselbe vereinzelt da, sie setzt Vorbereitungen und Eliminationen voraus, die künstlich angelegt werden müssen und ihre Anwendbarkeit beschränkt sich auch dann noch auf wenige Fälle. Die Aufgabe war, eine allgemeine Methode auf das zu Grunde liegende Princip aufzubauen, wodurch zugleich alsdann alle Elimination ausfallen musste. Dann muss ich ferner der von H. PONCELET vorläufig ohne Beweis mitgetheilten Construction einer geometrischen Aufgabe (I, 354) Erwähnung thun, welche mich, indem ich den Beweis derselben suchte, zu der Theorie der Osculation führte, wie sie im 8. Paragraphen des zweiten Abschnittes des ersten Bandes entwickelt ist. Wohl nichts begünstigt mehr das Auffinden neuer Methoden, als der Versuch, geometrische Sätze,

die in der Aussage einfach und symmetrisch sind, analytisch zu beweisen. In dieser Hinsicht habe ich viel dadurch entbehrt, dass der *Traité des propriétés projectives* des H. PONCELET mir bei der Ausarbeitung des ersten Bandes fremd blieb und die originellen Leistungen des H. STEINER in demselben Gebiete erst erschienen, als jener Band unter der Presse war. —

Ein zweiter Gegenstand fesselte ebenfalls meine Aufmerksamkeit schon im Sommer 1825. Es waren die im Detail behandelten Beweisführungen in der 120. — 121., 160., 211. und 237. Nummer der oben genannten Schrift. Sie waren mir bisher unbekannt geblieben, weil sie sich in den frühern Ausgaben noch nicht finden; sie überraschten mich damals durch ihre Neuheit und kamen mir am Ende doch immer nur in BIOT's vortrefflichem Handbuche als ein Gewächs auf fremdem Boden vor. Ich fasste den allgemeinen Gedanken, dass überhaupt, wo eine mathematische Entwicklungsweise sich als Kunstgriff darstelle, diess nur deshalb geschehe, weil man dieselbe noch nicht zur Methode erhoben und als solche eingeführt habe. Aber ich war in der Ausführung dieses Gedankens anfangs weniger glücklich als in der Ausführung des früher erwähnten. Der erste Band enthält in dieser Beziehung nichts von Bedeutung, dagegen aber ist der ganze vorliegende zweite Band eine Frucht des sich erst nach längerer Zeit entfaltenden Gedankens.

In der 271. Nummer des ersten Bandes habe ich diejenige Bedingungs-Gleichung entwickelt, welche ausdrückt, dass eine gegebene gerade Linie von einem Kegelschnitte berührt wird. Nachdem dieser Band bereits erschienen war, veranlasste mich eine geometrische Aufgabe, von den Coefficienten in dieser Bedingungs-Gleichung zu den Coefficienten in der Gleichung des Kegelschnittes zurückzugehen. Ich fand eine vollständig reciproke Beziehung dieser Coefficienten zu einander (II, 552), und das Princip der Reciprocität *),

---

*) Ich habe den Ausdruck „Princip der Reciprocität" als eine freie Uebersetzung der PONCELET-schen „*théorie des polaires réciproques*" eingeführt. H. GERGONNE bedient sich des Wortes „*principe de dualité*", und lässt in dieser Benennung durchblicken, dass er die Beziehungen der durch dieses Princip mit einander verbundenen Sätze zu einander als eine absolute Eigenschaft (*propriété générale de l'étendue*) ansieht. Man wird natürlich zu dieser Ansicht hingezogen, wenn man zwei zusammengehörige Sätze über gerade Linien betrachtet, von denen einer aus dem andern nach jenem Princip sich ergibt, wenn man einen Kegelschnitt zu Hülfe nimmt und, in Beziehung auf diesen Kegelschnitt, Constructionen sich ausgeführt denken muss, die von einer höhern Ordnung sind, als die in jenen Sätzen angezeigten. Dieser Uebelstand verschwindet zwar in der rein analytischen Theorie; aber ungeachtet dessen kann ich mich nicht zu der Ansicht einer absoluten Dualität bekennen, weil dieselbe bloss in den von Grössen-Vergleichungen ganz unabhängigen Sätzen, bei denen H. GERGONNE ausschliesslich verweilt, sich bewährt. Indem wir Hülfs-Gleichungen von bestimmter Form, die auch von höhern Graden sein können, zu Grunde legen, verknüpft das Princip der Reciprocität

in so weit sich dasselbe auf Curven zweiter Ordnung bezieht, stand in seiner ganzen Wichtigkeit vor mir, sobald ich nur die beiden Constanten der gegebenen geraden Linie als Punct-Coordinaten und veränderlich betrachtete. Diess letztere hatte ich bereits schon gethan, weil mir jener frühere Gedanken immer vorschwebte, nur hatte ich statt der Constanten b und a zuvor die Constanten q und p eingeführt (I, 272—274). Ich that diess, wie man sogleich einsieht, weil die beiden Constanten b und a nicht homogen sind; aber weil ich dieses that, wurde ich damals von jenem Principe abwärts geführt und ein zufälliger Umstand musste mich erst wieder auf dasselbe zurück bringen.

Nachdem ich zu dem Principe der Reciprocität, in Beziehung auf Kegelschnitte, gekommen war, war es natürlich, dieselbe Verfahrungsweise auch auf Curven einer beliebigen Ordnung auszudehnen und dann insbesondere auch von Linien der zweiten zu Linien der ersten Ordnung zurückzugehen. Hier ergab sich die Definition des Poles einer geraden Linie, als derjenige Punct, dessen Coordinaten zwei auf lineare Weise in der Gleichung derselben vorkommende Constante sind, woraus wiederum eine anders sich gestaltende Theorie des Principes der Reciprocität hervorging. Dann war es endlich natürlich, der Gleichung der geraden Linie irgend eine beliebige Gleichung zwischen zwei veränderlichen und beliebigen constanten Grössen, von welchen letztern zwei auf lineare Weise vorkommen, zu substituiren, wie diess im zweiten Paragraphen der zweiten Abtheilung des vorliegenden Bandes geschehen ist.

Ich war in eine Zwistigkeit zwischen den H.H. PONCELET und GERGONNE über die erste Entdeckung des Principes der Reciprocität zufällig verflochten worden. Die Veranlassung dazu war, dass ein von mir eingesandter Aufsatz in den Annalen (1826 *Août et Septembre*) abgedruckt wurde, nachdem er zuvor getheilt und in eine so ganz verschiedene Form gegossen worden war, dass ich den ersten Theil desselben später nur wiedererkannte, weil mein Name an der Spitze desselben stand. Aus einer Reclamation des H. PONCELET, die mir durch die Güte des H. v. MUENCHOW, eben weil sie auch mich

---

mannigfaltige geometrische Sätze nach allen Seiten hin unter einander (721). Jeder Gedanke überhaupt, der nicht aus der Natur der Sache unmittelbar entspringt, sondern aus einer metaphysischen Abstraction übertragen wird, übt so leicht eine dictatorische Herrschaft über uns aus und führt dann seine Strafe immer mit sich, indem er dem unbefangenen Gedankengange Fesseln anlegt.

betraf, mitgetheilt wurde, erfuhr ich zuerst, worin jenes Princip, wie es bisher aufgestellt worden war, bestehe. Ich antwortete, um einige Thatsachen zu berichtigen, im Juli 1828 *) und zeigte bei dieser Gelegenheit an, dass ich mich bewogen fände, einen Aufsatz an den Redacteur der Annalen einzuschicken, aus welchem vielleicht hervorgehen würde, dass auch ich, nachdem schon die H. PONCELET und GERGONNE ihre Theorie der Reciprocität aufgestellt hatten, auf rein analytischem Wege, unabhängig hiervon, zu einem solchen Principe gelangt sei. Dieser Aufsatz, der aus den oben gemachten Bemerkungen hervorgegangen, wurde wenige Tage nachher abgesandt, ist aber, so viel ich weiss, unabgedruckt und unerwähnt geblieben. Die von mir dargelegte analytische Theorie zeigte die Reciprocität bereits unter einem viel allgemeinern Gesichtspuncte. Nachdem ich die geometrische Theorie kennen gelernt hatte, gab ich, dadurch veranlasst, der meinigen eine noch allgemeinere Form, indem ich den Pol nicht durch die Constanten der Hülfs-Gleichung selbst, sondern durch lineare Functionen dieser Constanten bestimmte. So entwickelt findet sie sich in dem 3. Paragraphen der 2. Abtheilung des II. Bandes.

Erst Ende August 1829 that ich einen neuen Schritt, bei der Gelegenheit, dass ich eine öffentliche Rede ausarbeiten musste und zu diesem Ende die neuesten geometrischen Forschungen übersichtlich zusammenstellte. Ich hatte den Gedanken, die Constanten in der Gleichung einer geraden Linie als die Coordinaten dieser Linie zu betrachten, und demnach durch eine Gleichung zwischen solchen Coordinaten eine Curve darzustellen, welche von geraden Linien, die nach einem bestimmten Gesetze auf einandor folgen, umhüllt wird. Dieser Gedanke lag für mich um so näher, da ich mir bereits schon allgemeinere Begriffe über Coordinaten-Systeme gebildet und auch bereits schon im 5. Bande des Journals für Mathematik einen Aufsatz über ein neues Coordinaten-System geliefert hatte. Die erste Entwicklung des neuen Gedankens enthält eine Abhandlung, deren erste Hälfte schon Anfangs September und deren zweite Hälfte bald nachher an H. CRELLE abging. Sie wurde einige Zeit später im 2. Hefte des 6. Bandes des Journals abgedruckt. Erst nach dem Abgange der zweiten Hälfte entschloss ich mich, zugleich durch eine äussere Veranlassung bewogen, den vorliegenden zweiten Band der Entwicklungen auszuarbeiten und ihn ganz den neuen Untersuchungen zu

*) *Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques. T. IX. p. 330.*

widmen. Der Druck begann bald nachher und die ersten dreissig Bogen waren fertig, ehe noch ein Jahr nach der ersten Auffassung der Idee, deren Entwicklung sie sind, verflossen war. Jene früher erschienene Abhandlung ist nur als eine unvollkommene Vorarbeit hierzu zu betrachten, aber auch als solche wollte der nachsichtsvolle Herausgeber dieselbe erscheinen lassen, obgleich ich meinerseits den Wunsch äusserte, sie zu unterdrücken.

Die Entwicklungen der ersten Abtheilung des vorliegenden zweiten Bandes und die Entwicklungen des ersten Bandes gehen mit einander parallel; dort und hier habe ich in der Behandlungsweise gleiche Grundsätze zur Anwendung gebracht. Die zweite Abtheilung des zweiten Bandes enthält das Princip der Reciprocität, welches die beiden ersten Theile meiner Arbeit zu einem Ganzen vereinigt; und somit sei es mir erlaubt, diese Arbeit als geschlossen anzusehen. Ein eigentlich systematisches Ganzes aufzustellen, ist vielleicht noch zu früh, weil die Neuheit der Methoden noch zu gross, die Menge der Resultate, die uns entgegentreten, unübersehbar ist. Namentlich ist jenes Princip der Reciprocität, welches die scheinbar fremdartigsten geometrischen Sätze nach allen Seiten hin mit einander verknüpft, und uns aus der Art dieser Verknüpfung, indem wir von bekannten Sätzen ausgehen, nach Lust und Liebe gleichsam, neue finden lehrt (721, 722), eine solche Erscheinung in dem Gebiete der Geometrie, welche eine neue Methode derselben zu fordern scheint. *) Hierbei treten uns indess mehrere Bemerkungen entgegen. Jedem Beweise, der sich durch die Verbindung allgemeiner Symbole ausführen lässt, entsprechen, wenn wir diese Symbole einmal auf Punct-Coordinaten, das andere Mal auf Linien-Coordinaten beziehen, zwei solche Sätze, die durch das Princip der Reciprocität mit einander verbunden sind. Wir können hier also entweder dieses Princip oder die Betrachtung eines von jenen beiden Coordinaten-Systemen entbehren. Wo aber ein Satz durch eine specielle Anwendung von Punct-Coordinaten bewiesen wird, da nimmt dieser

---

*) Auf ähnliche Weise äussert sich H. Gergonne bei Gelegenheit des Principes der Reciprocität:

Mais il s'agit ici, suivant nous, de bien autre chose; il ne s'agit pas moins que de commencer, pour la géométrie, mal connue depuis près de deux mille ans qu'on s'en occupe, une ère tout-à-fait nouvelle; il s'agit d'en mettre tous les anciens traités à peu près au rebut, de leur substituer des traités d'une forme tout-à-fait différente, des traités vraiment philosophiques qui nous montrent enfin cette étendue, réceptacle universelle de tout ce qui existe, sous sa véritable physionomie, que la mauvaise méthode d'enseignement adoptée jusqu'à ce jour ne nous avoit pas permis de remarquer; il s'agit, en un mot, d'opérer dans la science une revolution aussi impérieusement necessaire qu'elle a été jusqu'ici peu prévue. (*Ann. Tome XVII. p. 273*).

Beweis einen ganz andern Weg, als der Beweis des zugehörigen Satzes, wenn wir denselben durch Anwendung von Linien-Coordinaten führen (70, 424). Und überdiess kann jeder der beiden Sätze in jedem der beiden Coordinaten-Systeme bewiesen werden. Das System der Linien-Coordinaten behält also seine ganze Bedeutung neben dem Principe der Reciprocität; es werden durch dasselbe die Beweismittel verdoppelt. Wollte man jenes Princip als Beweismittel anwenden, so würde man zwar, indem man auch nur die allbekannten Sätze über Kreise und gerade Linien zu Grunde legte, zu einer Menge von Resultaten mit bisher gar nicht geahneter Leichtigkeit kommen, und eine solche Arbeit wäre gewiss eine verdienstliche: aber ich sehe nicht ein, wie man auf diesem Wege das Ganze der Geometrie systematisch zusammenzufassen vermöchte. Vielleicht sollte man die Systeme der Punct- und Linien-Coordinaten noch vervielfältigen. Alsdann liesse sich ein Princip aufstellen, das mit dem Princip der Reciprocität Aehnlichkeit hat, und nach welchem, wenn die analytische Beweisführung irgend eines Satzes vorliegt, zugleich so viele Sätze bewiesen sind, als es verschiedene Coordinaten-Systeme gibt. Ich habe diesem Principe nur eine Note am Ende des dritten Paragraphen der zweiten Abtheilung des vorliegenden Bandes widmen können. Vielleicht könnte man alsdann, ohne an Leichtigkeit einzubüssen, zum Behuf der Beweisführung das Princip der Reciprocität entbehren und dasselbe erschiene dann als ein blosses Band, das die verschiedenen Sätze unter einander verknüpft.

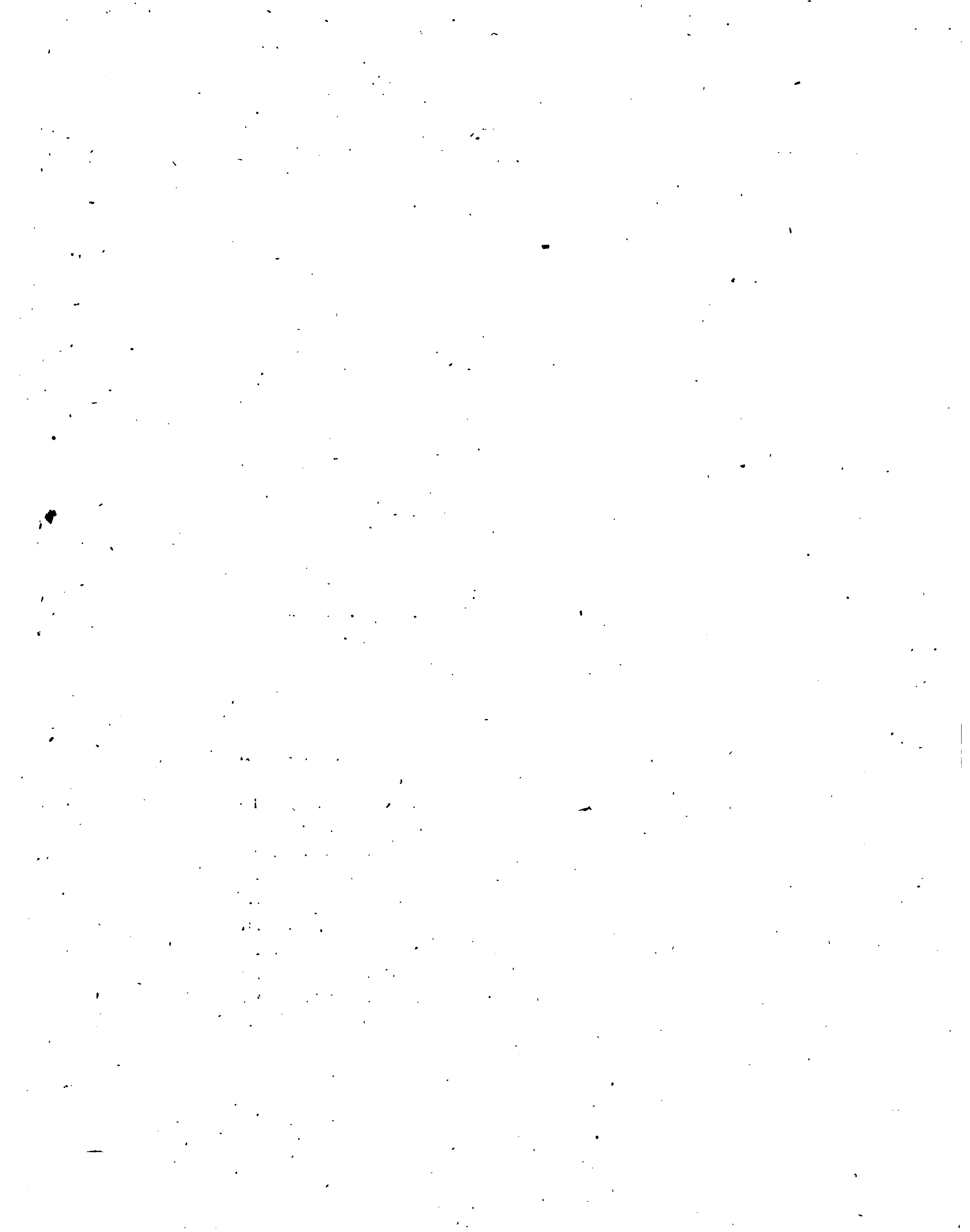
Man kann das Verhältniss der Geometrie zur Analysis aus verschiedenen Gesichtspuncten betrachten. Ich möchte mich zu der Ansicht bekennen, dass die Analysis eine Wissenschaft ist, die, unabhängig von jeder Anwendung, selbstständig für sich allein dasteht, und die Geometrie, so wie von einer andern Seite die Mechanik, bloss als die bildliche Deutung gewisser Beziehungen aus dem grossen erhabenen Ganzen erscheint. Wenn wir diese Ansicht zu Grunde legen und consequent durchführen, so erhält dadurch die Behandlung der Geometrie einen eigenthümlichen Character, auf die ich hier noch besonders aufmerksam machen zu müssen glaube. Ich kann diess nicht besser als durch ein paar Beispiele thun. Die Verbindung zweier Gleichungen zwischen zwei veränderlichen Grössen zu einer dritten solchen Gleichung, vermittelst eines unbestimmten Coefficienten, eine ganz gewöhnliche analytische Operation, bezeichnet, wenn wir geometrisch deuten, den Uebergang von zwei gegebenen Curven zu einer dritten, welche mit den beiden gegebenen

dieselben Durchschnittspuncte oder dieselben gemeinschaftlichen Tangenten hat. Der Elimination der Werthe für die beiden veränderlichen Grössen zwischen den beiden gegebenen Gleichungen entspricht die Bestimmung dieser Durchschnittspuncte oder dieser gemeinschaftlichen Tangenten. Die geometrische Interpretation eines analytischen Factums, der gleichen Wurzeln der auf diese Weise resultirenden Gleichungen, ist, an und für sich, die Tangenten-Theorie und überhaupt die Theorie des Contactes einer beliebigen Ordnung. Die geometrische Interpretation des wichtigsten Satzes der Algebra, des Satzes, dass jede ganze algebraische Function einer einzigen veränderlichen Grösse sich in reelle Factoren des ersten und zweiten Grades zerlegen lässt, ist, an und für sich, die wichtige Theorie der Chorden und Chordalpuncte, so wie der homologen Puncte und homologen geraden Linien, und zwar in grösserer Ausdehnung als diese Theorie bisher aufgestellt worden ist (610). —

Es gibt, in Beziehung auf die drei Dimensionen des Raumes, Entwicklungen, die den Entwicklungen der beiden vorliegenden Bände analog sind und wodurch sich auch hier die Beweismittel verdoppeln. An den letzten Paragraphen des zweiten Bandes schliesst sich namentlich eine neue allgemeine Theorie der Oberflächen an. Das Princip der Reciprocität besteht auch für die Constructionen im Raume. Es ist aus einer analytischen Betrachtung hervorgegangen und liefert seinerseits wiederum Beiträge zur Analysis. Ich habe mich, was diesen Punct betrifft, begnügen müssen, in einer Note anzudeuten, wie dasselbe unmittelbar zu einer allgemeinen Theorie der singulären Auflösungen führt. — Man durchsieht, dass in meiner Arbeit Keime zu neuen sich weit ausbreitenden Arbeiten liegen. —

Bonn, im Herbste 1830.

Inhaltsanzeige.



Erste Abtheilung.

Ueber eine neue Art, Curven durch Gleichungen darzustellen.

399. Man denkt sich, indem man eine ebene Curve, wie gewöhnlich, durch eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche, wenn man ihnen bestimmte Werthe beilegt, die Coordinaten eines bestimmten Punctes bedeuten, darstellt, diese Curve als aus einer unendlichen Anzahl stetig auf einander folgender Puncte bestehend, oder, wenn man lieber will, als durch die Bewegung eines Punctes beschrieben. Man kann aber auch durch nicht minder einfache und bequeme Gleichungen zwischen veränderlichen Grössen, durch welche, wenn man ihnen bestimmte Werthe beilegt, eine bestimmte gerade Linie gegeben ist, unendlich viele gerade Linien darstellen, die nach einem Gesetze stetig auf einander folgen, und also eine bestimmte Curve umhüllen.

Eine Curve wird auf diese neue Art eben so vollständig durch eine Gleichung dargestellt, als nach der gewöhnlichen Methode: denn, dort wie hier, lassen sich alle Eigenschaften derselben aus ihrer Gleichung vollständig ableiten. Man durchsieht leicht, wie in der Geometrie der Curven die Beweismittel auf diese Weise sich verdoppeln; wie jeder allgemeinen analytischen Entwicklung, die bisher gemacht worden ist, indem man die gebräuchlichen Gleichungen zu Grunde gelegt, eine andere entspricht, die auf den neuen Gleichungen beruht. Sobald nur der oben ausgesprochene Grundgedanke allgemein und klar aufgefasst worden ist, ist auch schon für die Ausführung desselben der Weg gewiesen. Auf diese Weise sind die folgenden Untersuchungen entstanden, die sich denen des ersten Bandes der vorliegenden Schrift enge anschliessen. Die neue Behandlungsweise wird uns zu manchen neuen Sätzen führen und andere Sätze, die auf indirectem Wege, bisweilen nicht ohne Anstrengung, in dem Frühern bereits schon bewiesen sind, werden wir unmittelbar in einer ganz einfachen Verbindung der neuen Gleichungen lesen und so denselben, oft ganz unvermuthet, begegnen. Hierdurch wird eine

Lücke, die mir bei Ausarbeitung jenes ersten Bandes meiner „Entwicklungen" fühlbar geworden ist, ausgefüllt, und die allgemeine analytische Methode, deren ich mich bedient habe, scheint mir nun innerhalb der vorgesteckten Gränzen vollständig und gerundet. —

400. Die allgemeine Form der Gleichung einer geraden Linie, bezogen auf zwei, sich unter einem beliebigen Winkel schneidenden, Coordinaten-Axen ist folgende:

$$Ay+Bx+C = o, \qquad (1)$$

indem wir durch y und x Coordinaten und durch A, B und C drei Constante bezeichnen. Wenn wir diesen Constanten nach und nach verschiedene Werthe beilegen, so können wir alle möglichen geraden Linien durch die vorstehende Gleichung darstellen. Diese Gleichung stellt auch dann noch unendlich viele verschiedene gerade Linien dar, die aber, wie wir gleich sehen werden, durch denselben Punct gehen, wenn zwischen den obigen drei Constanten, die wir übrigens als ganz beliebig betrachten, eine Gleichung von folgender Form besteht:

$$aA+bB+cC = o,$$

in der a, b und c irgend drei neue Constante bezeichnen. Wenn wir also A, B und C als veränderliche Grössen betrachten, und, dem entsprechend, an die Stelle derselben u, v und w schreiben, so können wir sagen, es stelle die Gleichung:

$$au+bv+cw = o, \qquad (2)$$

einen Punct dar. Je drei Werthen von u, v und w, welche die letzte Gleichung befriedigen, entspricht eine gerade Linie und jede solche gerade Linie geht durch den in Rede stehenden Punct. Wir betrachten also hier den Punct, als einen geometrischen Ort, in dem unendlich viele gerade Linien sich schneiden, während man, indem man von der gewöhnlichen Gleichung einer geraden Linie ausgeht, diese als einen geometrischen Ort für unendlich viele Puncte betrachtet.

Wir können eine der drei veränderlichen Grössen u, v und w ein für alle Mal beliebig annehmen, und, der Kürze halber, auch gleich Eins setzen. Alsdann erhalten wir aus (2) folgende Gleichungen:

$$a+bv+cw = o,$$
$$au+b+cw = o,$$
$$au+bv+c = o,$$

die eben so allgemein, aber weniger symmetrisch sind.

401. Statt der Gleichung (2) sei irgend eine beliebige in Beziehung auf u, v und w homogene Gleichung, die wir durch:

$$F(u, v, w) = o, \qquad (3)$$

bezeichnen wollen, gegeben. Alsdann entspricht je drei Werthen von u, v und w, die diese Gleichung befriedigen, eine bestimmte gerade Linie. Solcher Linien erhalten wir unendlich viele, die unmittelbar auf einander folgen und also eine stetige Curve umhüllen. Wir sagen, diese Curve werde dargestellt durch die gegebene Gleichung (3). Wir sagen ferner die Curve sei von der zweiten, dritten . . Classe *), wenn

---

*) Ich gebrauche hier das Wort Classe nach H. Gergonne, der, dem analog, wie man eine Curve, die von einer geraden Linie in m Puncten geschnitten wird, eine Linie m. Ordnung (mir scheint es passender hier das Wort Ordnung statt des Wortes Grad zu gebrauchen, weil auch die Classe einer Curve durch den Grad ihrer Gleichung bestimmt

ihre Gleichung (3) vom zweiten, dritten ... Grade ist; so wie man sagt, die Curve sei von der zweiten, dritten .. Ordnung, wenn die gewöhnliche Gleichung derselben zwischen y und x vom zweiten, dritten ..; Grade ist. Der Analogie nach nennen wir den Punct einen geometrischen Ort erster Classe. Die Oerter zweiter Classe werden durch folgende allgemeine Gleichung dargestellt:

$$au^2+buv+cv^2+duw+evw+fw^2 = o,$$

in welcher a, b, c, d, e und f Constante bezeichnen, und enthalten alle Curven zweiter Ordnung. Die Curven der dritten oder einer höhern Classe sind, im Allgemeinen, nicht Curven der dritten oder derselben höhern Ordnung.

---

wird) nennt, einer solchen Curve, an die sich, von einem gegebenen Puncte aus, m Tangenten legen lassen den Namen einer Linie m. Classe gibt.

Erster Abschnitt.

Zur Theorie des Punctes, als geometrischen Ortes erster Classe.

402. Indem MONGE die Gleichung der geraden Linie in die analytische Geometrie einführte, und dadurah den Grund zur Verbannung aller Construction aus derselben legte, gab er ihr jene neue Form, durch welche ihre weitere Ausbildung möglich wurde. Diejenige Rolle, welche in den bisherigen Entwicklungen die Gleichung der geraden Linie spielt, spielt in den neuen Entwicklungen die Gleichung des Punctes. Mit dieser wollen wir uns also zunächst beschäftigen.

Fig. 1. Wenn die Gleichung:

$$Ay+Bx+C = o,$$

die eine gegebene gerade Linie, MN, darstellen soll, auf zwei sich unter beliebigen Winkeln schneidende Coordinaten-Axen OY und OX bezogen wird, so hat man bekanntlich:

$$\frac{C}{A} = -OQ,$$
$$\frac{C}{B} = -OP,$$

Indem wir nun A, B und C als veränderliche Grössen betrachten, erhalten wir am leichtesten diejenige gerade Linie, welche irgend dreien besondern Werthen u', v' und w' jener Veränderlichen entspricht, indem wir, vom Anfangspuncte der Coordinaten an, auf der ersten Axe den Werth von $\left(-\frac{w'}{v'}\right)$, auf der zweiten Axe den Werth von $\left(-\frac{w'}{v'}\right)$ auftragen, und dadurch diejenigen beiden Puncte auf den beiden Axen bestimmen, durch welche jene gerade Linie geht.

403. Die Gleichung:

$$au+bv+cw = o, \qquad (1)$$

welche in Beziehung auf die drei veränderlichen Grössen u, v und w homogen und vom ersten Grade ist, können wir auch, wenn wir eine beliebige jener Grössen constant nehmen, als die allgemeine Gleichung des ersten Grades zwischen den

beiden übrigbleibenden veränderlichen Grössen ansehen. Wir haben, indem wir die Form der Gleichung (1) beibehalten, den Vortheil, dass wir, nach unsern jedesmaligen Absichten, sogleich jede beliebige der drei Veränderlichen constant setzen können.

Wir können auch die Gleichung (1) als die allgemeine Gleichung des ersten Grades zwischen den Quotienten einer beliebigen der drei Veränderlichen in die beiden übrigen ansehen.

404. Wir wollen zunächst die einfachern Formen der allgemeinen Gleichung (1) näher betrachten. Wenn wir annehmen, dass die beiden Constanten a und b Null sind, so kommt:

$$w = 0 \qquad (2)$$

Diese Gleichung enthält gar keine Bestimmung über die beiden Veränderlichen u und v, und verlangt bloss, dass, für jede beliebige Annahme derselben, w verschwinde. Alle bezüglichen geraden Linien gehen mithin durch den Anfangspunct der Coordinaten: dieser Punct wird durch die Gleichung (2) dargestellt.

Wenn wir nur die eine jener beiden Constanten, b, in der allgemeinen Gleichung gleich Null nehmen, so kommt:

$$au + cw = 0. \qquad (3)$$

Es ist also in diesem Falle $\left(-\frac{w}{u}\right)$ constant, und zwar gleich $\frac{a}{c}$, während v und mithin auch $\left(-\frac{w}{v}\right)$ einen durchaus beliebigen Werth behält. Die bezüglichen geraden Linien schneiden also (402) die erste Axe in irgend einem beliebigen Puncte, gehen aber alle durch denjenigen festen Punct der zweiten Axe, dessen Ordinate $\frac{a}{c}$ ist: dieser Punct wird durch die Gleichung (3) dargestellt.

Ebenso stellt die Gleichung:

$$bv + cw = 0,$$

denjenigen Punct der ersten Axe dar, dessen Abscisse gleich ist: $\frac{b}{c}$.

Die Gleichung:

$$v = 0,$$

die keine Bestimmung über u und w enthält, entspricht solchen geraden Linien, die in einen beliebigen Punct der zweiten Axe einschneiden, aber alle der ersten Axe parallel sind. Sie stellt daher einen Punct dar, der in unendlicher Entfernung auf der ersten Axe, oder, was dasselbe heisst, auf irgend einer ihr parallelen geraden Linie liegt.

Auf ähnliche Weise stellt die Gleichung:

$$u = 0,$$

einen auf der zweiten Axe unendlich weit entfernt liegenden Punct dar.

Die folgende Gleichung endlich:

$$au + bv = 0$$

entspricht nur solchen geraden Linien, die unter sich parallel sind. Es stellt also diese Gleichung einen Punct dar, der unendlich weit entfernt liegt, aber nicht mehr, wie in den beiden vorigen Fällen, auf einer der beiden Axen, sondern, wovon man sogleich sich

überzeugt, auf einer beliebigen geraden Linie, die mit der, durch folgende Gleichung dargestellten:

$$y - \frac{a}{b} x = o,$$

parallel ist.

Fig. 1. 405. Um zu zeigen, dass die allgemeine Gleichung (2), bei jeder Constanten-Bestimmung, einen Punct darstelle, wollen wir derselben zunächst folgende Form geben:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c}\frac{v}{u} + \frac{w}{u} = o.$$

Wenn wir alsdann von der veränderlichen Grösse $\frac{w}{u}$ irgend eine beliebige constante Grösse abziehen, so kommt dies offenbar darauf hinaus, statt der ersten Axe eine andere, ihr parallele, gerade Linie zu nehmen. Nehmen wir für diese constante Grösse $\frac{a}{c}$, so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$bv + cw = o,$$

die, nach der vorigen Nummer, einen auf der neuen ersten Axe liegenden Punct darstellt.

406. Wenn die allgemeine Gleichung:

$$au + bv + cw = o,$$

irgend einen gegebenen Punct G darstellen soll, so ist es leicht, die Constanten derselben zu bestimmen. Für die durch den gegebenen Punct gehende gerade Linie, welche der ersten Axe parallel ist, für GS, ist $v = o$ mithin,

$$au + cw = o,$$

und folglich ist die Ordinate desjenigen Punctes, in welchem diese gerade Linie in die zweite Axe einschneidet:

$$-\frac{w}{u} = OS = \frac{a}{c}.$$

Auf ähnliche Weise ergibt sich, wenn wir, parallel mit der zweiten Axe, durch den gegebenen Punct die gerade Linie GR legen:

$$OR = \frac{b}{c}.$$

Wir sehen hieraus, das die allgemeine Gleichung:

$$au + bv + cw = o.$$

denjenigen Punct darstellt, dessen Coordinaten sind:

$$y = \frac{a}{c}, \qquad x = \frac{b}{c}.$$

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir in der Gleichung des Punctes $c = 1$ setzen; alsdann sind die Coordinaten desselben die Coefficienten von u und v.

Für die, durch den gegebenen Punct G und den Anfangspunct der Coordinaten gehende, gerade Linie OG ist $w = o$, folglich:

$$au + bv = o,$$

mithin:

$$-\frac{v}{u} = \frac{a}{b} = \frac{OS}{OR} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)},$$

indem wir durch β den Coordinaten-Winkel bezeichnen.

407. Wenn der durch die allgemeine Gleichung:

$$au+bv+cw = 0,$$

dargestellte Punct auf einer durch bestimmte Werthe der veränderlichen Grössen, durch u', v' und w', gegebenen geraden Linie liegen soll, so ist:

$$au'+bv'+cw' = 0,$$

und, indem man abzieht, ergiebt sich:

$$a(u-u')+b(v-v')+c(w-w') = 0:$$

für die allgemeine Gleichung eines auf der geraden Linie (w', v', u') liegenden Punctes. *)

Wenn irgend zwei gerade Linien (w'', v'', u'') und (w', v', u') gegeben sind, so erhalten wir für die Gleichung des Durchschnittspunctes dieser beiden Linien folgende:

$$\frac{w}{u} - \frac{w'}{u'} = \frac{\frac{w''}{u''} - \frac{w'}{u'}}{\frac{v''}{u''} - \frac{v'}{u'}}\left(\frac{v}{u} - \frac{v'}{u'}\right),$$

also, wenn wir entwickeln:

$$(v''u'-v'u'')w-(w''u'-w'u'')v+(w''v'-w'v'')u = 0.$$

Je nachdem wir in u, v oder w als constant betrachten, verwandelt sich diese Gleichung in folgende:

$$(v''-v')w-(w''-w')v+(w''v'-w'v'') = 0,$$
$$(u''-u')w-(w''-w')u+(w''v'-w'u'') = 0,$$
$$(u''-u')v-(v''-v')u+(v''u'-v'u'') = 0.$$

408. Wir kommen zur Bestimmung derjenigen geraden Linien, welche die durch folgende beide Gleichungen:

$$\begin{aligned} au+bv+w &= 0, \\ a'u+b'v+w &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

gegebenen Puncte enthält, wenn wir zwischen diesen Gleichungen die Werthe für die Coefficienten je zweier der drei veränderlichen Grössen w, v und u eliminiren. Auf diese Weise kommt:

$$-\frac{w}{u} = \frac{ab'-a'b}{b'-b},$$
$$-\frac{w}{v} = \frac{a'b-ab'}{a'-a},$$
$$-\frac{v}{u} = \frac{a'-a}{b'-b}.$$

409. Das Resultat der Elimination zwischen den beiden gegebenen Gleichungen (1), die wir, der Kürze halber, durch:

$$U = 0, \qquad U' = 0, \qquad (2)$$

darstellen wollen, bleibt dasselbe, wenn wir für eine dieser Gleichungen eine andere desselben ersten Grades nehmen, die wir durch eine algebraische Verbindung der gegebenen

---

*) Der Kürze wegen, wollen wir eine durch w', v' und u' gegebene gerade Linie durch (w', v', u') bezeichnen. Es sind w', v' und u' als Coordinaten dieser Linie zu betrachten. Wir wollen ferner dieselbe gerade Linie durch (w', v'), (w', u') oder (v', u') bezeichnen, wenn wir $u' = 1$, $v' = 1$ oder $w' = 1$ setzen.

Gleichungen erhalten. Jede solche Gleichung ist, wenn wir μ als unbestimmten Coefficienten betrachten, in nachstehender Gleichung einbegriffen:

$$U+\mu U' = o.$$

Es stellt also diese Gleichung irgend einen beliebigen Punct dar, der mit den beiden gegebenen, durch die Gleichungen (2) dargestellten, Puncte in gerader Linie liegt.

410. Für die beiden durch die Gleichungen (1) dargestellten Puncte hat man (406):

$$y = a, \qquad x = b;$$
$$y = a', \qquad x = b'.$$

Man erhält hiernach leicht die Coordinaten derjenigen beiden Puncte, welche auf der, die beiden gegebenen Puncte verbindenden, geraden Linie so liegen, dass die Abstände jedes derselben von dem ersten und zweiten gegebenen Puncte sich verhalten, wie μ: 1. Für diese Coordinaten ergibt sich:

$$y = \frac{a\pm\mu a'}{1\pm\mu}, \qquad x = \frac{b\pm\mu b'}{1\pm\mu},$$

wobei wir μ, das an sich positiv ist, mit dem Vorzeichen + oder — nehmen müssen, je nachdem wir denjenigen dieser beiden Puncte betrachten, welcher zwischen die beiden gegebenen fällt oder nicht. Die Gleichungen dieser beiden Puncte sind also (406) in folgender

$$(a\pm\mu a')u+(b\pm\mu b')v+(1\pm\mu)w = o,$$

die mit folgender indentisch ist:

$$U\pm\mu U' = o,$$

enthalten.

Wir sehen hieraus, wie man, wenn irgend zwei Puncte gegeben sind, unmittelbar die Gleichung jedes bestimmten Punctes derjenigen geraden Linie erhält, welche durch die beiden gegebenen Puncte geht, und dass man zu diesem Ende diese Puncte nur auf die allgemeinste Weise durch die Gleichungen (2) darzustellen braucht. Wenn wir insbesondere $\mu = 1$ setzen, so stellt die Gleichung:

$$U+U' = o,$$

die Mitte zwischen den beiden gegebenen Puncten dar; die Gleichung:

$$U-U' = (a-\mu a')u+(b-\mu b')v = o,$$

einen, nach der Richtung der durch die gegebenen Puncte gehenden geraden Linie hin, unendlich weit ertfernt liegenden Punct (405).

Die durch die vier Gleichungen:

$$U = o, \qquad U' = o, \qquad U+\mu U' = o, \qquad U-\mu U' = o,$$

dargestellten Puncte, nennt man vier harmonische Theilungspuncte.

411. Wenn die drei Gleichungen:

$$au+bv+w = o,$$
$$a'u+b'v+w = o, \qquad (1)$$
$$a''u+b''v+w = o,$$

solche drei Puncte, die in gerader Linie liegen, darstellen sollen, so findet zwischen den Constanten dieser drei Gleichungen eine Bedingungs-Gleichung Statt, die wir leicht auf folgende Weise erhalten. Die allgemeine Gleichung aller Puncte, die auf der, durch die beiden ersten jener drei Puncte gehenden, geraden Linie liegen, ist folgende (409):

$$(a+\mu a')u+(b+\mu b')v+(1+\mu)w = o.$$

Wenn diese Gleichung insbesondere den dritten Punct darstellen soll, so muss der unbestimmte Coefficient μ so bestimmt werden, dass

$$\frac{a+\mu a'}{1+\mu} = a'', \qquad \frac{b+\mu b'}{1+\mu} = b''.$$

Um die gesuchte Bedingungs-Gleichung zu erhalten, brauchen wir nur zwischen den beiden vorstehenden Gleichungen μ zu eliminiren; auf diese Weise kommt:

$$b(a''-a')-a(b''-b')+b''a'-b'a'' = o:$$

eine Gleichung, die, wie zu erwarten stand, in Beziehung auf die Constanten der drei Gleichungen (1) symmetrisch ist.

412. Wir wollen in dieser Nummer den Winkel bestimmen, den zwei gegebene gerade Linien:

$$(w, v, u), \qquad (w', v', u'),$$

mit einander bilden. Nennen wir zu diesem Ende den Coordinaten-Winkel β und diejenigen Winkel, welche diese beiden geraden Lininen mit der ersten Axe bilden, α und α', so ist:

$$-\frac{v}{u} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}, \qquad -\frac{v'}{u'} = \frac{\sin\alpha'}{\sin(\beta-\alpha')},$$

und der gesuchte Winkel, den wir von der ersten gegebenen geraden Linie nach der zweiten hin nehmen, und durch ω bezeichnen wollen, gleich $(\alpha'-\alpha)$. Hiernach erhält man nach einigen Reductionen, ähnlich wie in der 17. Nummer:

$$\tang\omega = \frac{(u'v-uv')\sin\beta}{uu'-(uv'+u'v)\cos\beta+vv'},$$

und wenn der Coordinaten-Winkel ein rechter ist:

$$\tang\omega = \frac{u'v-uv'}{uu'+vv'}.$$

Wenn die beiden gegebenen geraden Linien sich unter rechten Winkeln schneiden, so kommt:

$$uu'-(uv'+u'v)\cos\beta+vv' = o,$$

und wenn auch der Coordinaten-Winkel ein rechter ist:

$$uu'+vv' = o.$$

413. Die Entfernung der durch die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} au+bv+w &= o, \\ a'u+b'v+w &= o, \end{aligned} \qquad (1)$$

dargestellten Puncte, die wir D nennen wollen, ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$(a-a')^2+2(a-a')(b-b')\cos\beta+(b-b')^2 = D^2,$$

die für den Fall rechtwincklicher Coordinaten in nachstehende übergeht:

$$(a-a')^2+(b-b')^2 = D^2.$$

Wir erhalten diese Gleichungen unmittelbar, da die durch (1) dargestellten Puncte keine andern sind, als die Puncte (a, b) und (a', b').

414. Es bleibt uns noch übrig, den Abstand eines gegebenen, durch die Gleichung:

$$au+bv+w = o,$$

dargestellten Punctes von einer gegebenen geraden Linie (w', v', u') zu bestimmen. Wir wollen hierbei, was für unsere Absicht vollkommen hinreicht, für den Coordinaten-Winkel einen rechten nehmen. Diese Bestimmung ist identisch dieselbe, als die Bestimmung des Abstandes des Punctes (a, b) von der durch die Gleichung:

$$u'y+v'x+w' = o$$

dargestellten geraden Linie. Für diesen Abstand, den wir P nennen wollen, erhalten wir nach der 29. Nummer *):

$$P = \pm \frac{au'+bv'+w'}{\sqrt{u'^2+v'^2}},$$

wobei wir nach der 31. Nummer das Vorzeichen + oder — nehmen müssen, je nachdem der gegebene Punct, in Beziehung auf die gegebene gerade Linie, nach der positiven oder negativen Seite der y liegt. —

415. Wenn wir auf die vorstehenden Entwicklungen zurückblicken, so bemerken wir bald zwischen diesen und den analogen Entwicklungen des ersten Abschnittes des ersten Bandes den innigsten Zusammenhang, eine vollständige Reciprocität. In der 400. Nummer haben wir die gewöhnliche Gleichung der geraden Linie zu Grunde gelegt und durch die Constanten in dieser Gleichung die gerade Linie bestimmt: diese Constanten als Coordinaten derselben betrachtet. Eben so können wir auch die Gleichung des Punctes zu Grunde legen (wir construiren hier die veränderlichen Grössen auf die oben bestimmte Weise) und durch die Constanten in dieser Gleichung den Punct bestimmen: diese Constanten als Coordinaten des Punctes betrachten.

Die nachstehende Gleichung z. B., die wir genauer betrachten wollen:

$$y+vx+w = 0, \qquad (1)$$

stellt eine gerade Linie dar, wenn wir für die veränderlichen Grössen y und x gewöhnliche Punct-Coordinaten und durch w und v constante Grössen, deren geometrische Construction wir aus der Discussion der Gleichung dieser geraden Linie erhalten, bezeichnen. Wenn wir w und v als veränderlich betrachten und diese Grössen durch irgend eine lineare Gleichung:

$$w+cv+c' = 0,$$

mit einander verbunden sind, so erhalten wir unendlich viele gerade Linien, die aber alle durch denselben Punct, nemlich durch den Punct (c', c), gehen.

Dieselbe Gleichung (1) stellt, wenn wir w und v als Linien-Coordinaten und veränderlich, und y und x als zwei beliebige Constante betrachten, einen Punct dar. Betrachten wir auch y und x, deren geometrische Construction wir aus der Discussion der

---

*) Wir haben nemlich für den Abstand eines Punctes (y', x') von einer durch die Gleichung:

$$y = ax+b,$$

gegebenen geraden Linie a. a. O. folgenden Ausdruck hergeleitet:

$$P = \pm \frac{y'-ax'-b}{\sqrt{1+a^2}}.$$

Diesen Ausdruck erhalten wir unmittelbar auf folgende Weise. Es sei (Fig. 1) L der gegebene Punct und MN die gegebene gerade Linie. Alsdann ist:

$$LF = LE\sin LEF = (LD-ED)\sin LEF,$$
$$= (y'-y_,)\sin LEF,$$
$$LF = LE\sin LEF = (LD-ED)\sin LEF,$$
$$= (y'-y_,)\sin LEF,$$

indem wir die dem gegebenen x' entsprechende, Ordinate der gegebenen geraden Linie $y_,$ nennen. Hiernach ist $y_,$ gleich (ax'+b). Ueberdies ergänzt der Winkel LEF denjenigen Winkel, den die gegebene gerade Linie mit der ersten Axe bildet, zu einem rechten; so dass der Cosinus des letztgenannten Winkels, für den man den Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ hat, gleich ist *sin* LEF. Somit erhält man für LF oder P den obigen Ausdruck.

Gleichung dieses Punctes erhalten, als veränderlich, setzen aber zwischen beiden Grössen irgend eine lineare Gleichung, z. B. folgende:

$$y+cx+c' = o,$$

so erhalten wir unendlich viele Puncte, die aber alle auf derselben geraden Linie, nemlich der geraden Linie (c', c), liegen.

Der Beweis der letzten beiden Behauptungen ergibt sich unmittelbar. Es sei nemlich erstens:

$$y+ax+b = o, \qquad (2)$$

die allgemeine Gleichung der geraden Linie und

$$c'+ca+b = o, \qquad (3)$$

die gegebene lineare Bedingungs-Gleichung zwischen den, als beliebig zu betrachtenden, beiden Constanten derselben; c und c' sind zwei gegebene Grössen. Wir erhalten auch dann eine lineare Bedingungs-Gleichung zwischen jenen beiden Constanten, wenn ein Punct der geraden Linie gegeben ist. Wenn nemlich (y', x') dieser Punct ist, so kommt:

$$y'+ax'+b = o.$$

Die Gleichung (3) ist mit der letzten Gleichung identisch, wenn wir in dieser $y' = c'$ und $x' = c$ nehmen. Hiernach bedeutet alsdann die gegebene Bedingungs-Gleichung, dass alle durch (2) darstellbaren geraden Linien durch den Punct (c', c) gehen.

Es sei zweitens:

$$w+av+b = o, \qquad (4)$$

die allgemeine Gleichung des Punctes und wiederum:

$$c'+ca+b = o, \qquad (5)$$

die gegebene Bedingungs-Gleichung zwischen den beiden Constanten derselben. Zwischen denselben Constanten ergibt sich, wenn wir eine gerade Linie (w', v'), die durch den Punct (4) geht, kennen, folgende Bedingungs-Gleichung des ersten Grades:

$$w'+av'+b = o:$$

eine Gleichung, die mit (5) identisch wird, wenn wir $w' = c'$ und $v' = c$ nehmen. Es bedeutet also die gegebene Bedingungs-Gleichung (5), dass alle durch (4) darstellbaren Puncte auf der geraden Linie (c', c) liegen.

416. Wenn wir, statt der Gleichung (1), die nachstehende, sowol in Beziehung auf x, y und z, als auch in Beziehung auf u, v und w homogene Gleichung des ersten Grades nehmen:

$$uy+vx+wz = o,$$

so erhalten wir, wenn wir y, x und z als constant ansehen, die Gleichung des Punctes unter der Form, wie wir sie bisher betrachtet haben. Der dargestellte Punct ist folgender:

$$\left(\frac{y}{z}, \frac{x}{z}\right).$$

Betrachten wir aber u, v und w als constant, so stellt dieselbe Gleichung eine gerade Linie dar, aber unter einer Form, wie wir sie nicht zu behandeln gewohnt sind. Diese gerade Linie ist folgende: $\left(\frac{w}{u}, \frac{v}{u}\right)$ oder (w, v, u). Diese neue Form der Gleichung der geraden Linie, einer Gleichung, die rücksichtlich der drei veränderlichen Grössen y, x und z homogen ist, scheint mir in allen denjenigen Entwicklungen, bei welchen keine Elimination vorkommt, in Beziehung auf Eleganz und Symmetrie den Vorrang zu behaupten. Wir können ferner leicht von der allgemeinern Form zu der gewöhnlichen übergehen, indem wir z als ein für alle Mal gegeben betrachten und etwa $z = 1$ setzen.

Wir können aber auch, und hierin scheint mir ein nicht unbedeutender Vortheil zu liegen, auf ähnliche Weise $x = 1$ oder $y = 1$ setzen. *) Auf diese Bemerkung, die sich auf Gleichungen jedes beliebigen Grades ausdehnen lässt, werden wir in dem Folgenden öfter Gelegenheit finden zurückzukommen. —

417. Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wenden wir uns wieder zu unserm eigentlichen Gegenstande zurück. Bei der Prüfung einer neuen Entwicklungsweise ist eine doppelte Frage zu berücksichtigen, einmal, ob dieselbe zum Beweise gegebener Sätze sich geschmeidig zeigt, und dann, ob sie neue Resultate finden lehrt. Was den ersten Punct betrifft, so wird in den nächsten Nummern an einigen Beispielen anschaulich werden, wie sich die neuen Gleichungen eben so bequem handhaben lassen, als die gewöhnlichen Gleichungen, welche gerade Linien darstellen. Wir wollen zuerst folgenden bekannten Satz beweisen:

Wenn die Seiten eines Dreiecks den Seiten eines andern Dreiecks parallel sind, so gehen diejenigen drei geraden Linien, welche die den parallelen Seiten gegenüberliegenden Winkelpuncte beider Dreiecke verbinden, durch ein und denselben Punct.

Indem wir über die beiden Coordinaten-Axen vorläufig keine nähere Bestimmung machen, und u constant nehmen, wollen wir die Seiten des einen Dreiecks ABC auf folgende Weise bestimmen:

$$AB \begin{cases} w = w', \\ v = v'; \end{cases} \quad AC \begin{cases} w = w'', \\ v = v''; \end{cases} \quad BC \begin{cases} w = w''', \\ v = v'''; \end{cases}$$

und erhalten alsdann für die Seiten des zweiten Dreiecks A'B'C' Coordinaten-Werthe von folgender Form:

$$A'B' \begin{cases} w = w'+c', \\ v = v'; \end{cases} \quad A'C' \begin{cases} w = w''+c'', \\ v = v''; \end{cases} \quad B'C' \begin{cases} w = w'''+c''', \\ v = v'''. \end{cases}$$

Hiernach ergeben sich für die Puncte A, der im Durchschnitte von AB und AC, und A', der im Durchschnitte von A'B' und A'C' liegt, folgende Gleichungen:

$$w-w' = \frac{w''-w'}{v''-v'}(v-v'),$$

$$w-w'-c' = \frac{w''-w'+c''-c'}{v''-v'}(v-v').$$

---

*) Wenn wir die Gleichung:

$$ax+by+cz = 0,$$

durch x dividiren, so kommt:

$$a+b\frac{y}{x}+c\frac{z}{x} = 0.$$

Als die beiden veränderlichen Grössen dieser Gleichung können wir $\left(\frac{y}{x}\right)$ und $\left(\frac{z}{x}\right)$ nehmen. Wenn wir diese veränderlichen Grössen auf irgend einen gegebenen Punct beziehen, so bedeutet $\frac{y}{x}$, welches dasselbe ist als $\frac{y}{z}:\frac{x}{z}$, bei der Voraussetzung eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems, die trigonometrische Tangente desjenigen Winkels, welchen die durch den gegebenen Punct und den Anfangspunct der Coordinaten gehende gerade Linie mit der ersten Axe bildet, und $\frac{z}{x}$ ist der reciproke Werth der gewöhnlichen Abscisse des Punctes. Solche trigonometrischen Tangenten und solche reciproken Abscissen-Werthe sind also die veränderlichen Grössen y und z, in der Gleichung der geraden Linie, wenn wir $x = 1$ setzen.

Um die gerade Linie AA' zu bestimmen, welche durch diese beiden Puncte geht, verbinden wir die vorstehenden Gleichungen mit einander und erhalten für diese Linie folgende Coordinaten-Werthe:

$$w = \frac{w'c''-w''c'}{c''-c'}, \qquad v = \frac{v'c''-v''c'}{c''-c'}.$$

Für die Coordinaten der beiden andern geraden Linien, die durch B und B' und durch C und C' gehen, Coordinaten, die wir zur Unterscheidung unten einmal und zweimal accentuiren wollen, erhalten wir sogleich durch Accent-Vertauschung:

$$w_{,} = \frac{w'c'''-w'''c'}{c'''-c'}, \qquad v_{,} = \frac{v'c'''-v'''c'}{c'''-c'}.$$

$$w_{,,} = \frac{w''c'''-w'''c''}{c'''-c''}, \qquad v_{,,} = \frac{v''c'''-v'''c''}{c'''-c''}.$$

Wenn wir nun annehmen, der Anfangspunct der Coordinaten sei ursprünglich so angenommen worden, dass er in den Durchschnitt von AA' und BB' falle, so ist $w = w_{,} = o$, also:

$$\frac{w'}{c'} = \frac{w''}{c''}, \qquad \frac{w'}{c'} = \frac{w'''}{c'''},$$

folglich:

$$\frac{w''}{c''} = \frac{w'''}{c'''};$$

und endlich auch $w_{,,} = o$. Es geht mithin auch die dritte gerade Linie CC' durch den Anfangspunct der Coordinaten, den Durchschnitt von AA' und BB'. Der obige Satz ist also bewiesen.

Wir haben bei diesem Beweise vorausgesetzt, dass AA' und BB' nicht parallel seien. Wenn diese Linien parallel sind, so können wir, parallel mit ihnen, die erste Axe annehmen, während die zweite Axe beliebig bleiben mag, und erhalten alsdann $v = v_{,} = o$, so dass:

$$\frac{v'}{c'} = \frac{v''}{c''}, \qquad \frac{v'}{c} = \frac{v'''}{c'''}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{v''}{c''} = \frac{v'''}{c'''},$$

und also ist auch $v_{,,} = o$, und mithin auch CC' mit AA' und BB' parallel.

418. *Wenn die drei Seiten eines Dreiecks den drei Seiten eines andern Dreiecks in solchen drei Puncten begegnen, die in gerader Linie liegen, so schneiden sich diejenigen geraden Linien, welche die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkelpuncte der beiden Dreiecke verbinden, in demselben Puncte.*

ABC und A'B'C' seien die beiden gegebenen Dreiecke und AB und A'B', AC und A'C', BC und B'C' die drei Seitenpaare dieser beiden Dreiecke, die sich in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen. Alsdann gehen die drei geraden Linien AA', BB' und CC' durch denselben Punct, oder sind perallel.

Durch jene drei Durchschnittspuncte wollen wir die erste Axe legen; alsdann erhalten wir für die Seiten der beiden Dreiecke, wenn wir überdiess w constant nehmen:

$$AB \begin{cases} u = u', \\ v = v'; \end{cases} \qquad AC \begin{cases} u = u'', \\ v = v''; \end{cases} \qquad BC \begin{cases} u = u''', \\ v = v'''; \end{cases}$$

$$A'B' \begin{cases} u = u'+c', \\ v = v'; \end{cases} \qquad A'C' \begin{cases} u = u''+c'', \\ v = v''; \end{cases} \qquad B'C' \begin{cases} u = u'''+c''', \\ v = v'''. \end{cases}$$

Die beiden Puncte A und A' werden hiernach durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$u-u' = \frac{u''-u'}{v''-v'}(v-v'),$$

$$u-u'-c' = \frac{u''-u'+c''-c'}{v''-v'}(v-v').$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir für die gerade Linie AA' folgende Coordinaten-Werthe:

$$u = \frac{u'c''-u''c'}{c''-c'}, \qquad v = \frac{v'c''-v''c'}{c''-c'};$$

und hieraus endlich für BB' und CC', indem wir die Coordinaten derselben unten einmal und zweimal accentuiren:

$$u_{,} = \frac{u'c'''-u'''c'}{c'''-c'}, \qquad v_{,} = \frac{v'c'''-v'''c'}{c'''-c'};$$

$$u_{,,} = \frac{u''c'''-u'''c''}{c'''-c''}, \qquad v_{,,} = \frac{v''c'''-v'''c''}{c'''-c''}.$$

Da die Rechnung in dieser Nummer gerade so angelegt worden ist als in der vorigen, so können wir aus dieser alle vorstehenden Ausdrücke unmittelbar herleiten: wir brauchen zu diesem Ende nur w mit u zu vertauschen.

Da wir durchaus keine nähere Bestimmung über die zweite Axe gemacht haben, so können wir annehmen, dieselbe sei ursprünglich durch den Durchschnitt von AA' und BB' nach beliebiger Richtung gelegt worden. Alsdann ist

$$u = u_{,}; \qquad (1)$$

und um den vorliegenden Satz zu beweisen, müssen wir zeigen, wie hieraus folgt, dass

$$u = u_{,} = u_{,,}. \qquad (2)$$

Entwickeln wir zu diesem Ende die Gleichung (1), so kommt:

$$c'''u''-c''u'''-c'''u'+c'u'''+c''u'-c'u'' = 0,$$

und aus der Symmetrie dieser Gleichung, in Beziehung auf die verschieden accentuirten Buchstaben, folgt, dass auch die Gleichung (2) Statt findet.

Dies Resultat erhellet sogleich aus der Form der Ausdrücke für u, $u_{,}$ und $u_{,,}$. Denn wir können uns durch ($v = v'$, $u = c'$), ($v = v''$, $u = c''$) und ($v = v'''$, $u = u'''$) drei gerade Linien dargestellt denken. Alsdann beziehen sich (407) u, $u_{,}$ und $u_{,,}$ auf die Durchschnitte der beiden ersten, der ersten und dritten und der beiden letzten dieser drei Linien. Fallen die beiden ersten Durchschnitte zusammen, so ist $u = u_{,}$; dann fällt aber auch mit jenen beiden Durchschnitten der dritte zusammen, und also ist $u = u_{,} = u_{,,}$.

Wenn die beiden geraden Linien AA' und BB' parallel sind, so ist, wenn wir die zweite Axe mit diesen beiden Linien parallel nehmen, $v = v_{,} = 0$ und hieraus folgt sogleich, gerade wie in der vorigen Nummer:

$$v = v_{,} = v_{,,} = 0;$$

es ist also auch CC' mit der zweiten Axe und also auch mit AA' und BB' parallel.

419. Man bemerkt sogleich, dass die Sätze der beiden vorhergehenden Nummern in genauer Verbindung stehen. Drei Puncte nemlich, die nach irgend drei gegebenen Richtungen hin unendlich weit liegen, wie überhaupt alle unendlich weit entfernten Puncte derselben Ebene, sind als in gerader Linie liegend anzusehen. Diese Behauptung können wir bestätigt finden, wenn wir den Satz der letzten Nummer umkehren und einfache Gränz-Betrachtungen zu Hülfe nehmen. Wenn die resultirenden drei geraden Linien

in dem einen oder dem andern jener beiden Sätze parallel sind, so liegt ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt unendlich weit. Alle diese besondern Sätze sind als Fälle eines einzigen Satzes anzusehen und in dem Vorstehenden ergeben sich alle diese Fälle durch leichte Modificationen ein und desselben Beweises *). Um dies vollständig darzu-

---

*) Diesen Vortheil haben wir nicht (vergl. die 77. — 87. Nummer des ersten Bandes), wenn wir dieselben Sätze, oder vielmehr die Umkehrung derselben:

„Wenn drei gerade Linien, welche die Winkelpuncte zweier Dreiecke, paarweise genommen, mit einander verbinden, durch denselben Punct gehen oder parallel sind, so schneiden sich die Seiten der beiden Dreiecke in solchen drei Puncten, die in gerader Linie liegen, oder diese Seiten sind, paarweise genommen: parallel.“

mit Hülfe der gewöhnlichen Gleichungen beweisen. Hier reichen wir, wenn wir nicht Gränz-Betrachtungen in der Construction zu Hülfe nehmen wollen, mit einer einzigen Anlage des Beweises nicht aus. Wir kommen aber zu diesem Ziele, wenn wir nach der Note zur 416. Nummer drei veränderliche Grössen x, y und z einführen und dann etwa x als constant ansehen. Nehmen wir, bei dieser Voraussetzung, den gemeinsamen Durchschnitt der drei geraden Linien zum Anfangspuncte der Coordinaten, so erhalten wir folgende Coordinaten-Bestimmung für die drei Winkelpuncte der beiden Dreiecke ABC und A'B'C':

$$A \begin{cases} y = y', \\ z = z'; \end{cases} \quad B \begin{cases} y = y'', \\ z = z''; \end{cases} \quad C \begin{cases} y = y''', \\ z = z'''; \end{cases}$$
$$A' \begin{cases} y = y' + c', \\ z = z'; \end{cases} \quad B' \begin{cases} y = y'' + c'', \\ z = z''; \end{cases} \quad C' \begin{cases} y = y''' + c''', \\ z = z'''. \end{cases}$$

Hiernach ergeben sich leicht die Coordinaten der drei Durchschnitte, die, nach dem zu beweisenden Satze, in gerader Linie liegen, Coordinaten, die wir durch y, $y_{,}$ und $y_{,,}$, z, $z_{,}$ und $z_{,,}$ bezeichnen wollen. Ist nun, was vorauszusetzen uns frei steht, die zweite Axe derjenigen geraden, welche durch die beiden ersten jener drei Durchschnitte geht, parallel, so ist $z = z_{,}$ und hieraus ergibt sich alsdann $z = z_{,} = z_{,,}$, d. h. dieselbe Axe geht auch durch den dritten Durchschnitt.

Wenn insbesondere $z = z_{,} = o$, so folgt, dass auch $z_{,,} = o$. Diesem Falle entspricht, dass die Seiten der beiden Dreiecke, paarweise genommen, parallel sind.

Wenn die drei geraden Linien AA', BB' und CC' parallel sind, so ergibt sich, wenn wir, parallel mit ihnen, auch die zweite Axe nehmen, und die Winkelpuncte des ersten Dreiecks wie oben bestimmen, für die Winkelpuncte des zweiten Dreiecks folgende Coordinaten-Bestimmung:

$$A' \begin{cases} y = y', \\ z = z'+c'; \end{cases} \quad B' \begin{cases} y = y'', \\ z = z''+c''; \end{cases} \quad C' \begin{cases} y = y''', \\ z = z'''+c'''. \end{cases}$$

Nehmen wir nun an, die erste Axe sei ursprünglich durch die beiden ersten derjenigen drei Puncte gelegt, von denen zu beweisen ist, dass sie in gerader Linie liegen, und behalten für die Coordinaten dieser Puncte dieselbe Beziehung bei, so ist $y = y_{,} = o$ und hieraus folgt $y = y_{,} = y_{,,} = o$, d. h. alle drei Durchschnitte liegen auf der ersten Axe.

Die eben gemachte Bestimmung über die erste Axe ist unstatthaft, wenn die beiden ersten Durchschnitte unendlich weit liegen. Alsdann ist aber $z = z_{,}$ und hieraus folgt $z = z_{,} = z_{,,}$ d. h. alle drei Puncte liegen unendlich weit. —

Das Beweis-Schema, das ich hier für alle verschiedene Fälle durchgeführt habe, konnte ich in der 77. Nummer bei Gleichungen zwischen y und x nur auf den Fall des Parallelismus der geraden Linien AA', BB' und CC' anwenden. Der Grund dieses Unterschiedes ist offenbar darin zu suchen, dass wir bei der neuen Coordinaten-Bestimmung auch unendlich weit entfernte Puncte durch endliche Coordinaten-Werthe und unendlich weit entfernte gerade Linien durch eine endliche Gleichung ausdrücken können. Wir erhalten nemlich:

$$z = o,$$

als die Gleichung einer unendlich weit entfernt liegenden geraden Linie. (Alle solche gerade Linien sind als zusammenfallend und identisch zu betrachten). Es bezeichnen ferner folgende drei Systeme von zwei Gleichungen:

$$\{y = o, \ z = o\}, \qquad \{x = o, \ z = o\}, \qquad \{ax + by = o, \ z = o\},$$

drei solche Puncte, die unendlich weit liegen und zwar auf der ersten Axe, der zweiten Axe und nach irgend einer gegebenen Richtung hin.

thun, verweile ich hierbei mit einiger Ausführlichkeit. Wir können zu diesem Ende auch noch bemerken, dass wir, um den Satz der 418. Nummer zu beweisen, wie in der vorhergehenden Nummer, auch u als constant ansehen können. Wenn wir, bei dieser Voraussetzung, die zweite Axe durch die drei Durchschnitte der Seiten der beiden Dreiecke legen, so haben wir für AB und A'B', so wie für AC und A'C', und für BC und B'C' dasselbe w, aber verschiedene v. Das Uebrige des Beweises ergibt sich ganz ähnlich, wie bisher.

420. Auf dieselbe Weise, wie wir in der 84. Nummer die Umkehrung des Satzes der 418. Nummer bewiesen haben, können wir auch hier den Beweis anlegen und denselben zugleich auf alle Fälle ausdehnen. Legen wir nemlich die erste Axe durch die drei Durchschnitte der gegebenen Dreiecksseiten, und nehmen u constant, so erhalten wir für diese Durchschnittspuncte Gleichungen von folgender Form:

$$v = c'w, \qquad v = c''w, \qquad v = c'''w, \qquad (1)$$

und hiernach folgende Coordinaten-Bestimmung für die Seiten der beiden Dreiecke:

$$AB \begin{cases} w = w', \\ v = c'w'; \end{cases} \qquad AC \begin{cases} w = w'', \\ v = c''v''; \end{cases} \qquad BC \begin{cases} w = w''', \\ v = c'''v'''; \end{cases}$$

$$A'B' \begin{cases} w = w_{,}, \\ v = c'w_{,}; \end{cases} \qquad A'C' \begin{cases} w = w_{,,}, \\ v = c''v_{,,}; \end{cases} \qquad B'C' \begin{cases} w = w_{,,,}, \\ v = c'''v_{,,,}. \end{cases}$$

Hieraus erhalten wir für die Gleichungen der beiden Puncte A und A':

$$v - cw' = \frac{c''w'' - c'w'}{w'' - w'}(w - w'),$$

$$v - cw_{,} = \frac{c''w_{,,} - c'w_{,}}{w_{,,} - w_{,}}(w - w_{,}),$$

und, indem wir aus diesen beiden Gleichungen den Werth von w ziehen, für die eine der Coordinaten von AA':

$$w = \frac{w'w''(w_{,,} - w_{,}) - w_{,}w_{,,}(w'' - w')}{w'w_{,,} - w''w_{,}}. \qquad (2)$$

Durch Accent-Vertauschung erhalten wir sogleich für die entsprechenden Ordinaten von BB' und CC', die wir durch beigefügte Puncte unterscheiden wollen,

$$w^{\cdot} = \frac{w'w'''(w_{,,,} - w_{,}) - w_{,}w_{,,,}(w''' - w')}{w'w_{,,,} - w'''w_{,}},$$

$$w^{\cdot\cdot} = \frac{w''w'''(w_{,,,} - w_{,,}) - w_{,,}w_{,,,}(w''' - w'')}{w''w_{,,,} - w'''w_{,,}}. \qquad (3)$$

Wenn wir nun annehmen, dass die zweite Axe durch den Durchschnitt von AA' und BB' gehe, so ist $w = w^{\cdot}$, und da diese Gleichung, wenn wir entwickeln, in Beziehung auf die einmal, zweimal und dreimal accentuirten Buchstaben, symmetrisch wird und zwar folgende (84):

$$w'w''(w_{,,,}w_{,} - w_{,,,}w_{,,}) - w'w'''(w_{,,}w_{,} - w_{,,}w_{,,,}) + w''w'''(w_{,}w_{,,} - w_{,}w_{,,,}) = 0,$$

so folgt sogleich $w = w^{\cdot} = w^{\cdot\cdot}$, und mithin geht CC' durch den Durchschnitt von AA' und BB'.

Wenn AA' und BB' parallel sind und wir parallel mit ihnen die zweite Axe legen, so ist $\frac{1}{w} = 0$ und $\frac{1}{w_{\cdot}} = 0$ mithin:

$$w'w_{,,} - w''w_{,} = 0, \qquad w'w_{,,,} - w'''w_{,} = 0,$$

also auch:

$$w''w_{'''}-w'''w_{''}=0,$$

und somit auch $\frac{1}{w''}=0$, und CC' parallel mit der zweiten Axe, und mit AA' und BB'.

421. Wenn wir in allen Entwicklungen der vorigen Nummer w mit u vertauschen, so stellen die drei Gleichungen (1) drei solche Puncte dar, die nach gegebenen Richtungen hin unendlich weit liegen und die Seiten der beiden Dreiecke ABC und A'B'C' sind parallel. Alsdann erhalten wir, bei beliebiger Coordinaten-Bestimmung, für die auf AA', BB' und CC' sich beziehenden u, u' und u'' Ausdrücke, die ganz auf dieselbe Weise gebildet sind, als die Ausdrücke bei (2) und (3), z. B.:

$$u=\frac{u'u''(u_{''}-u_{'})-u_{'}u_{''}(u''-u')}{u'u_{''}-u''u_{'}}. \qquad (4)$$

Wenn wir nun annehmen, dass der Durchschnitt von AA' und BB' zum Anfangspunct der Coordinaten genommen worden sei, so ist $\frac{1}{u}=0$ und $\frac{1}{u'}=0$, und hieraus folgt, wie in der vorigen Nummer, dass auch $\frac{1}{u''}=0$ und also CC' durch den Durchschnitt von AA' und BB' geht.

Wenn AA' und BB' parallel sind und wir parallel mit ihnen, die erste Axe nehmen, so kommt wiederum $\frac{1}{u}=0$ und $\frac{1}{u'}=0$ und also $\frac{1}{u''}=0$, d. h. auch CC' ist mit AA' und BB' parallel.

422. Wenn wir in der 420. Nummer v und w gegenseitig mit einander vertauscht hätten, so würden die Gleichungen (1) noch immer drei Puncte der ersten Axe darstellen und statt (2) hätten wir folgende Gleichung erhalten, in der wir v wiederum auf AA' beziehen:

$$v=\frac{v'v''(v_{''}-v_{'})-v_{'}v_{''}(v''-v')}{v'v_{''}-v''v_{'}}. \qquad (5)$$

Um nichts mit Stillschweigen zu übergehen, was unmittelbar in den zuletzt entwickelten Ausdrücken liegt, erwähnen wir folgende Sätze, deren Beweis darin enthalten ist, dass in den Gleichungen (2), (5) und (4) c' und c'' nicht vorkommen.

Wenn die Scheitel zweier Winkel auf einer gegebenen geraden Linie fortrücken, während ihre Schenkel sich um vier in gerader Linie liegende Puncte drehen, so bilden die beiden Winkel in ihren verschiedenen Lagen Vierecke, deren zwei Diagonalen durch zwei feste Puncte gehen, die mit jenen vier Puncten in derselben geraden Linie liegen.

Wenn die Scheitel zweier Winkel von constanter Grösse auf einer geraden Linie, ohne dass die Winkel sich drehen, fortrücken, so bleiben die beiden Diagonalen des durch die beiden Winkel in allen ihren Lagen gebildeten Vierecks mit sich selbst parallel.

Wenn man um vier Puncte derselben geraden Linie zwei Paare durch diese Puncte gehender Parallel-Linien sich drehen lässt, so gehen die beiden Diagonalen der, in den verschiedenen Lagen der Parallel-Linien gebildeten, Parallelogramme durch zwei auf derselben geraden Linie liegende Puncte.

Es können in diesem letzten Satze auch die vier Puncte unendlich weit genommen werden, alsdann verschieben sich die beiden Parallel-Linien jedes Paares parallel mit

sich selbst, und zwar so, dass ihr gegenseitiger Abstand sich nicht ändert; alsdann bleiben die in Rede stehenden Diagonalen mit sich selbst parallel.

423. Wenn sechs gerade Linien, paarweise genommen, sich in drei Puncten derselben geraden Linie schneiden, oder parallel sind, so können wir aus denselben vier verschiedene Paare solcher Dreiecke bilden, wie sie in den Sätzen der 417. und 418. Nummer verlangt werden, und erhalten also auch viermal drei gerade Linien, die durch denselben Punct gehen, oder parallel sind. Und somit ist der in dem Vorstehenden bewiesene allgemeine Satz folgender:

Wenn man durch jeden von solchen drei Puncten, die in gerader Linie liegen, zwei gerade Linien zieht, oder wenn man drei Paare paralleler gerader Linien nimmt, so schneiden sich die drei verschiedenen Linien-Paare zu zwei und zwei in dreimal vier Puncten, durch welche man noch dreimal zwei gerade Linien legen kann, die ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen bilden.

424. Wir wollen zu einer zweiten Gruppe von Sätzen übergehen.

Wenn irgend zwei gerade Linien und auf jeder derselben drei Puncte, auf der einen die Puncte A, B, C, auf der andern A', B', C' gegeben sind, so schneiden sich die drei Linien-Paare AB' und $A'B$, AC' und $A'C$, BC' und $B'C$ in solchen drei Puncten S, S', S'', die in gerader Linie liegen.

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir die beiden gegebenen geraden Linien, die sich in O schneiden mögen, zu Coordinaten-Axen nehmen und alsdann die reciproken Werthe von OA, OB und OC durch v', v'' und v''', die reciproken Werthe von OA', OB' und OC' durch u', u'' und u''' bezeichnen. Hiernach ergibt sich, indem wir w constant nehmen, folgende Coordinaten-Bestimmung für jene drei Linien-Paare:

$$A'B \begin{cases} u = u', \\ v = v''; \end{cases} \qquad AB' \begin{cases} u = u'', \\ v = v'; \end{cases}$$

$$A'C \begin{cases} u = u', \\ v = v'''; \end{cases} \qquad AC' \begin{cases} u = u''', \\ v = v'; \end{cases}$$

$$B'C \begin{cases} u = u'', \\ v = v'''; \end{cases} \qquad BC' \begin{cases} u = u''', \\ v = v''. \end{cases}$$

Für die beiden ersten Durchschnittspuncte, S und S', erhalten wir also folgende Gleichungen:

$$u - u'' = -\frac{u'' - u'}{v'' - v'}(v - v'),$$

$$u - u''' = -\frac{u''' - u'}{v''' - v'}(v - v').$$

Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab und multipliciren alsdann mit $(v''' - v')(v'' - v')$, so kommt:

$$(v''' - v')(v'' - v')(u'' - u''') = M(v - v'), \qquad (1)$$

indem wir, der Kürze halber,

$$u''v' - v''u' - u'''v' + v'''u' + u'''v'' - v'''u'' = M,$$

setzen. Aus der Gleichung (1) erhält man folgende:

$$Mv = N, \qquad (2)$$

wenn man:

$$(v' - v'')v'''u''' + (v'' - v''')v'u' + (v''' - v')v''u'' = N,$$

setzt.

Wenn wir u' und u'', v' und v'' gegenseitig mit einander vertauschen, so bleibt der erste Dnchschnitt S derselbe, indem AB' an die Stelle von $A'B$ und, umgekehrt, $A'B$ an die Stelle von AB' tritt; statt des zweiten Durchschnittes S' erhalten wir aber den dritten S''. Durch jene Accent-Vertauschung bleiben M und N unverändert, ausgenommen, dass, beide zugleich, ihr Zeichen ändern; es bleibt also der Werth von v identisch derselbe, wenn wir statt des zweiten Punctes den dritten nehmen. Es liegen also alle drei Puncte in derselben geraden Linie.

425. Wenn wir die drei Puncte auf jeder der beiden gegebenen geraden Linien unter einander vertauschen, so erhalten wir neue Constructionen des eben bewiesenen Satzes. Solcher Constructionen gibt es offenbar so viele als die drei Puncte auf einer beliebigen jener beiden geraden Linien, etwa der zweiten, sich permutiren lassen, also **sechs**. Hiernach erhalten wir folgendes Schema von sechs mal drei Puncten, die in gerader Linie liegen:

$(AB', A'B)$,	$(AC', A'C)$,	$(BC', B'C)$;
$(AA', B'B)$,	$(AC', B'C)$,	$(BC', A'C)$;
$(AB', C'B)$,	$(AA', C'C)$,	$(BA', B'C)$;
$(AC', A'B)$,	$(AB', A'C)$,	$(BB', C'C)$;
$(AC', B'B)$,	$(AA', B'C)$,	$(BA', C'C)$;
$(AA', C'B)$,	$(AB', C'C)$,	$(BB', A'C)$.

Die zweite, dritte und vierte, so wie die erste, fünfte und sechste von diesen geraden Linien **gehen durch denselben Punct.***) Die drei erstgenannten geraden Linien erhält man, indem man nach einander A' und B', A' und C', B' und C', also auch u' und u'', u' und u''', u'' und u''' gegenseitig vertauscht. Nach dieser Bemerkung ergibt sich sogleich aus (1) folgende Bestimmung für die, diesen drei geraden Linien zukommenden, v, die wir zur Unterscheidung unten accentuiren wollen:

$$(v'''-v')(v''-v')(u'-u''') = M'v_{,}-M'v',$$
$$(v'''-v')(v''-v')(u''-u') = M''v_{,,}-M''v',$$
$$(v'''-v')(v''-v')(u'''-u'') = M'''v_{,,,}-M'''v'.$$

Wenn wir diese drei Gleichungen addiren, so verschwindet der erste Theil der resultirenden Gleichung; wir überzeugen uns überdies leicht, dass

$$M'+M''+M''' = o,$$

und somit erhalten wir:

$$M'v_{,}+M''v_{,,}+M'''v_{,,,} = o,$$

oder:

$$M'(v_{,}-v_{,,,})+M''(v_{,,}-v_{,,,}) = o.$$

Da M' und M'' auf keine Weise sich ändern, wenn wir u mit v vertauschen, so erhält man zwischen den auf die drei in Rede stehenden geraden Linien sich beziehenden u, die wir zur Unterscheidung ebenfalls unten accentuiren wollen, aus der letzten Gleichung unmittelbar folgende:

$$M'(u_{,}-u_{,,,})+M''(u_{,,}-u_{,,,}) = o.$$

---

*) Diesen Satz hat H. STEINER in GERGONNE's Annalen (Tome XIX Pag. 128) zum Beweise vorgelegt. Es ist derselbe ein besonderer Fall eines allgemeinen Satzes, mit dem wir uns später beschäftigen werden, und in welchem an die Stelle des Systems der beiden gegebenen geraden Linien irgend eine Linie zweiter Ordnung tritt.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

$$\frac{v_{,}-v_{,,,}}{u_{,}-u_{,,,}} = \frac{v_{,,}-v_{,,,}}{u_{,,}-u_{,,,}}$$

und aus dieser Gleichung ist ersichtlich, dass die drei geraden Linien ($v_{,}$, $u_{,}$), ($v_{,,}$, $u_{,,}$) und ($v_{,,,}$, $u_{,,,}$) durch ein und denselben Punct gehen.

Wenn wir, etwa von der zweiten, geraden Linie des obigen Schema's ausgehen, und dann nach und nach A' und B', A' und C', B' und C' mit einander vertauschen, so kommen wir zu der ersten, fünften und sechsten Linie desselben Schema's, und wir können gerade auf dieselbe Weise zeigen, dass auch diese drei geraden Linien in demselben Puncte sich schneiden.

426. Den in der vorigen Nummer bewiesenen Satz erhalten wir unmittelbar durch Hülfe des Satzes der 418. Nummer. Denn, da die drei geraden Linien A'B, AC' und B'C den drei andern AB', A'C und BC' in dreien Puncten derselben geraden Linie, der ersten Linie des obigen Schema's, begegnen, so gehen die drei geraden Linien,

(AC', B'C), (A'C, BC');
(A'B, B'C), (AB', BC');
(A'B, AC'), (AB', A'C);

in denen wir sogleich die zweite, dritte und vierte des Schema's wiedererkennen, durch ein und denselben Punct *).

427. Die letzten beiden Sätze können wir in folgende Aussage zusammenfassen.

Wenn zwei gerade Linien und auf jeder derselben drei Puncte gegeben sind, so können wir diese Puncte durch neun neue gerade Linien verbinden. Diese neun geraden Linien schneiden sich in achtzehn neuen Puncten. Von diesen achtzehn Puncten liegen sechsmal drei in gerader Linie. Von diesen sechs geraden Linien gehen drei und drei durch denselben Punct.

428. Wenn wir von einem der beiden letztgenannten Puncte, den drei in demselben sich schneidenden geraden Linien und den drei auf jeder von diesen Linien liegenden Puncte ursprünglich ausgehen, so können wir diejenigen drei geraden Linien construiren, die durch den zweiten jener beiden Puncte gehen. Hiernach erhalten wir, indem wir die Construction des letzten Satzes aus einem andern Gesichtspuncte betrachten, folgende Erweiterung des Satzes der 418. Nummer.

Wenn irgend drei Dreiecke so liegen, dass ihre Winkelpuncte auf drei durch denselben Punct gehenden geraden Linien sich befinden, so gehen diejenigen drei geraden Linien, welche die Durchschnitte der diesen Winkelpuncten respective gegenüberliegenden Seiten dieser paarweise zusammengestellten Dreiecke enthalten, durch ein und denselben Punct.

Ich führe diesen Satz, der einer viel grössern Ausdehnung noch fähig ist, hier nur, der Beziehung zu den vorhergehenden Sätzen wegen, an. Später, wo ich an Beispielen zu zeigen gedenke, wie sich durch eine einfache Verbindung allgemeiner Symbole ver-

---

*) Auf ganz ähnliche Weise können wir zeigen, dass in dem Satze der 74. Nummer von den sechs Durchschnitten drei und drei in gerader Linie liegen, nemlich (Tab. II. Fig. 23) einerseit S, T, V und andererseits R, W, U.

mittelst unbestimmter Coefficienten sehr zusammengesetzte Sätze beweisen lassen, werde ich auf den vorstehenden Satz zurückkommen. Doch will ich den Beweis desselben, der nach den frühern Sätzen sehr nahe liegt, noch schliesslich folgen lassen.

Die drei gegebenen Dreiecke seien ABC, A'B'C' und A"B"C" und die Winkelpuncte A, A' und A", B, B' und B", C, C' und C" liegen auf solchen drei geraden Linien, die durch denselben Punct gehen. Alsdann schneiden sich nach dem zu beweisenden Satze, folgende drei geraden Linien, von denen jede drei Durchschnittspuncte gegenüberliegender Dreiecksseiten enthält:

(BC, B'C'), (AC, A'C'), (AB, A'B');
(BC, B"C"), (AC, A"C"), (AB, A"B");
(B'C', B"C"), (A'C', A"C"), (A'B', A"B");

in demselben Puncte. Dies ist sogleich ersichtlich. Es bilden nemlich die geraden Linien BC, B'C' und B"C", AC, A'C' und A"C" zwei Dreiecke, deren Seiten sich in den drei Puncten C, C' und C", welche in gerader Linie liegen, schneiden. Die den durch diese drei Puncte gehenden Seiten gegenüberstehenden Winkelpuncte beider Dreiecke sind die beiden ersten Puncte der dritten, zweiten und ersten jener drei geraden Linien. Diese drei Linien gehen also (418) durch denselben Punct. —

429. Die folgenden Nummern enthalten solche Entwicklungen, die mit Ausdrücken, die zu Anfang dieses Abschnittes entwickelt worden sind, in innigem Zusammenhange stehen und aus der Form dieser Ausdrücke unmittelbar hervorgehen.

Wenn wir die beiden Gleichungen:

$$au+bv+w = 0,$$
$$a'u+b'v+w = 0,$$

welche irgend zwei gegebene Puncte darstellen, der Kürze halber durch

$$U = 0, \qquad U' = 0,$$

bezeichnen, so stellt die Gleichung:

$$U+U' = 0,$$

denjenigen Punct dar, welcher in der Mitte zwischen den beiden gegebenen liegt (410). Bezeichnen wir die Gleichung eines dritten Punctes:

$$a''u+b''v+w = 0,$$

durch ein neues Symbol:

$$U'' = 0,$$

so stellt auch folgende Gleichung:

$$U+U'+U'' = 0 \qquad (1)$$

einen Punct dar. Um diese Gleichung zu befriedigen, setzen wir zugleich

$$U+U' = 0, \text{ und } U'' = 0;$$
$$U+U'' = 0, \text{ „ „ } U' = 0;$$
$$U'+U'' = 0, \text{ „ „ } U = 0;$$

und erhalten also drei Paare von Puncten, durch welche drei gerade Linien bestimmt werden, die alle drei durch den zu construirenden Punct gehen. Diese drei Puncten-Paare sind aber, was die Form der letzten Gleichungen zeigt, die drei gegebenen Puncte und die Mitten zwischen je zweien derselben. Die vorstehende Construction der Gleichung (1) enthält also folgenden allbekannten Satz:

In jedem Dreiecke schneiden sich diejenigen drei geraden Linien, welche die drei Winkelpuncte mit den drei Mitten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, in ein und demselben Puncte.

430. Fügen wir zu den drei gegebenen Puncten noch einen vierten hinzu, dessen Gleichung folgende sei:

$$a'''u+b'''v+w = o,$$

und bezeichnen diese Gleichung wiederum, der Kürze halber, durch:

$$U''' = o,$$

so stellt die Gleichung:

$$U+U'+U''+U''' = o \qquad (2)$$

einen neuen Punct dar. Wir können diese Gleichung auf nachstehende dreifache Weise in zwei Gleichungen zerlegen:

$$U+U' = o, \text{ und } U''+U''' = o;$$
$$U+U'' = o, \text{ „ „ } U'+U''' = o;$$
$$U+U''' = o, \text{ „ „ } U'+U'' = o;$$

und erhalten also drei leicht zu bestimmende Paare von Puncten, und hiernach drei gerade Linien, welche durch den durch (2) dargestellten Punct gehen. Der auf diese Weise bewiesene Satz ist folgender.

Wenn man in irgend einem Vierecke die Mitten der gegenüberliegenden Seiten und der beiden Diagonalen durch drei gerade Linien verbindet, so gehen diese drei geraden Linien durch ein und denselben Punct.

Man hätte die Gleichung (2) noch auf folgende Weise in zwei einfachere zerlegen können:

$$U+U'+U'' = o, \text{ und } U''' = o;$$
$$U+U'+U''' = o, \text{ „ „ } U'' = o;$$
$$U+U''+U''' = o, \text{ „ „ } U' = o;$$
$$U'+U''+U''' = o, \text{ „ „ } U = o;$$

und hiernach vier neue gerade Linien erhalten, die durch denselben Punct (2) gehen.

431. Wenn wir, bei der bisherigen Bezeichnung, statt der Gleichung (1) der 429. Nummer folgende nehmen:

$$\mu U+\mu' U'+\mu'' U'' = o, \qquad (3)$$

indem μ, μ' und μ'' beliebige Coefficienten bedeuten, so stellt auch diese Gleichung einen Punct dar. Und, auf dieselbe Weise, als in der angeführten Nummer, erhalten wir drei durch jenen Punct gehende gerade Linien, nemlich diejenigen, welche folgende drei Puncten-Paare mit einander verbinden:

$$\mu U+\mu' U' = o, \text{ und } U'' = o;$$
$$\mu U+\mu'' U'' = o, \text{ „ „ } U' = o;$$
$$\mu' U'+\mu'' U'' = o, \text{ „ „ } U = o.$$

Diese drei geraden Linien sind leicht zu bestimmen, die erste derselben verbindet in dem Dreiecke UU'U'' den Winkelpunct U'' mit demjenigen Puncte der gegenüberliegenden Seite UU', dessen Abstände von den beiden Puncten U und U' sich verhalten wie $\mu' : \mu$. Die zweite und dritte gerade Linie gehen durch die beiden andern Winkelpuncte U' und U und durch diejenigen beiden Puncte, welche auf den beiden gegenüberstehenden Seiten UU'' und U'U'' so liegen, dass ihre Abstände von U und U'' und von U' und U'' sich respective verhalten wie $\mu'' : \mu$ und $\mu'' : \mu'$. (410).

Diese drei gerade Linien schneiden sich also in demselben Puncte und dieser Punct ist bekanntlich kein anderer, als der Schwerpunct dreier Gewichte, die sich wie $\mu : \mu' : \mu''$ verhalten und die wir uns in den Winkelpuncten des Dreiecks in U, U' und U'' angebracht denken.

Wie die vorstehende Gleichung (3) können wir auch folgende Gleichung:

$$\mu U+\mu' U'+\mu'' U''+\mu''' U'''\ldots = o, \qquad (1)$$

deren erster Theil aus beliebig vielen Gliedern bestehen mag, durch allmählige Zerlegung construiren und erhalten auf diese Weise eine grössere Anzahl von geraden Linien, die alle durch den durch (4) dargestellten Punct gehen. Es ist dieser Punct der Schwerpunct von Gewichten, die sich verhalten wie μ: μ': μ'': μ''': . . und respective in den Puncten U, U', U'', U'''. . angebracht sind; und nach den Grundsätzen der Statik über die Zusammensetzung paralleler Kräfte erhalten wir die Bestimmung derselben geraden Linien als oben, die alle durch den Punct (4) gehen. Für solche barycentrische Betrachtungsweisen, die auf eine ungemein leichte Weise zu vielen Sätzen der Situations-Geometrie führen, erhalten wir also durch die Einführung der neuen Gleichungen einen Algorithmus, der zugleich überflüssig macht, dass, der Geometrie fremde, Begriffe in dieselbe eingeführt werden *).

432. Wenn wir durch irgend einen beliebigen Punct in der Ebene eines gegebenen Dreiecks und durch die drei Winkelpuncte desselben drei gerade Linien ziehen, so können wir die Durchschnittspuncte dieser drei Linien mit den, den bezüglichen Winkelpuncten gegenüberliegenden Seiten, nach der vorigen Nummer, durch folgende Gleichungen darstellen:

$$\begin{aligned} \mu U + \mu' U' &= o, \\ \mu U+\mu'' U'' &= o, \\ \mu' U'+\mu'' U'' &= o; \end{aligned} \qquad (5)$$

und nach der 410. Nummer erhalten wir für die vierten harmonischen Theilungspuncte auf den drei Dreiecks-Seiten folgende Gleichungen:

---

*) Einen eben so einfachen Algorithmus liefern die gewöhnlichen Gleichungen für diejenigen Beweisführungen, die sich auf die Lehre von der Zusammensetzung solcher Kräfte, die in derselben Ebene nach gegebenen Richtungen mit gegebener Energie wirken. Legen wir nemlich (34), bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, lineare Gleichungen von folgender Form zu Grunde:

$$(y-ax-b)\cos\alpha = o,$$

wo α denjenigen Winkel bedeutet, den die bezügliche gerade Linie mit der ersten Axe bildet, bezeichnen der Kürze halber den ersten Theil solcher Gleichungen durch A, und unterscheiden diese A, sobald sie sich auf verschiedene gerade Linien beziehen, durch Accente, so sehen wir sogleich (32), dass die Gleichung:

$$A+A' = o,$$

diejenige gerade Linie darstellt, nach welcher die aus zweien gleichen Kräften, die nach den gegebenen geraden Linien:

$$A = o, \qquad A' = o,$$

wirken, resultirende Kraft wirkt. Ebenso bezeichnet die Gleichung:

$$\mu A+\mu' A' = o,$$

die Richtung derjenigen Kraft dar, die aus solchen zwei Kräften, die nach denselben beiden gegebenen geraden Linien wirken und sich verhalten wie μ: μ (36). Und endlich stellt, bei analoger Bezeichnung, wenn beliebig viele Kräfte gegeben sind, die sich verhalten wie μ: μ': μ'': μ''': . . und nach den gegebenen geraden Linien:

$$A = o, \quad A' = o, \quad A'' = o, \quad A''' = o, \text{ u. s. w.}$$

wirken, folgende Gleichung:

$$\mu A+\mu' A'+\mu'' A''+\mu''' A'''+\ldots = o,$$

die Richtung der resultirenden Kraft dar. Diese Gleichung können wir auf ähnliche Weise construiren als die Gleichung (4) des Textes.

eine Gleichung, die zugleich mit folgender besteht:

$$(\mu-\mu''')\mu''+n\mu'' = -\mu'''-n\mu'',$$

worin eben der Nerv des Beweises liegt.

Statt aus der ersten Gleichung bei (1) und (4) die Gleichung (5) herzuleiten, hätten wir eine entsprechende Gleichung durch Verbindung einer beliebigen der beiden Gleichungen (1) mit einer beliebigen der beiden Gleichungen (4) erhalten können. Statt der Gleichung (5) ergibt sich endlich eine symmetrische, wenn wir beide Gleichungen (1) mit $(\mu-\mu''') = (\mu'-\mu'')$ multipliciren und dann zu beiden Gleichungen (4) addiren.

435. Wenn wir statt Ausdrücke von der Form: $(au+bv+w)$, die wir in der vorigen Nummer U, U' u. s. w. genannt haben, nun Ausdrücke von der Form: $(u+bv+cw)$, betrachten, in denen der Coefficient von u gleich Eins ist, und solche Ausdrücke durch dieselben Symbole bezeichnen, so erhält die Gleichung (7) der vorigen Nummer eine andere Deutung, ohne dass in dem Entwicklungs-Gange irgend etwas sich ändert:

Wenn von folgenden vier Gleichungen:

$$U = o, \qquad U' = o, \qquad U-U' = o, \qquad U+U' = o,$$

die beiden ersten irgend zwei gegebene Puncte darstellen, so stellt die dritte Gleichung (bei den eben gemachten Voraussetzungen) den Durchschnittspunct der, die beiden gegebenen Puncte verbindenden, geraden Linie mit der ersten Axe dar, und somit die vierte Gleichung den vierten harmonischen Theilungspunct zu diesen drei Puncten. Hiernach stellen also die drei Gleichungen:

$$U+U' = o,$$
$$U''+U''' = o,$$
$$U^{IV}+U^{V} = o,$$

die drei vierten harmonischen Theilungspuncte zu U und U', U'' und U''', U^{IV} und U^{V} und den drei Durchschnittspuncten der drei Diagonalen UU', U''U''', $U^{IV}U^{V}$ mit der ersten Axe dar. Da diese Axe jede beliebige sein kann, so ergibt sich der folgende Satz:

Wenn man in der Ebene einer gegebenen vollständigen vierseitigen Figur eine beliebige Transversale zieht, die die drei Diagonalen in drei Puncten schneidet, und zu diesen Durchschnittspuncten und den drei bezüglichen Paaren gegenüberliegender Winkelpuncte der vierseitigen Figur die vierten harmonischen Theilungspuncte sucht, so erhält man solche drei Puncte, die in gerader Linie liegen.

Wenn wir annehmen, dass die gegebene Transversale unendlich weit liege, so erhalten wir aus diesem Satze den Satz der vorigen Nummer als besondern Fall *).

---

*) Auf dieselbe Weise, wie wir in der 434 Nummer die Gleichungen von Puncten mit einander verbunden haben, können wir auch die gewöhnlichen Gleichungen von geraden Linien mit einander verbinden. Wir wollen zuerst Ausdrücke von der Form: $(y+Bx+C)$, in denen der Coefficient von y gleich Eins ist, zu Grunde legen und durch Symbole Z, Z' u. s. w., denen wir zur Unterscheidung Accente hinzufügen, bezeichnen. Bei diesen Voraussetzungen stellen die vier Gleichungen:

$$Z = o, \qquad Z' = o, \qquad Z'' = o, \qquad Z''' = o,$$

vier gerade Linien dar, welche irgend ein Viereck bilden, in dem wir die beiden ersten und die beiden letzten dieser Linien als gegenüberstehende Seiten nehmen können, und dessen beide Diagonalen wir durch die Gleichung:

$$Z^{IV} = o, \qquad Z^{V} = o,$$

darstellen wollen. Alsdann hat man:

$$\mu Z+\mu''Z'' = \mu'Z'+\mu'''Z''' = Z^{IV},$$

436. Wenn wir durch irgend einen Punct in der Ebene eines gegebenen Dreiecks $UU'U''$ und die Winkelpuncte dieses Dreiecks drei gerade Linien ziehen, so können wir die Durchschnittspuncte dieser drei Linien mit den, jenen Winkelpuncten bezüglich gegenüberliegenden, Seiten, nach der 432. Nummer immer durch folgende drei Gleichungen darstellen: Fig. 2.

$$\begin{aligned} \mu U + \mu' U' &= 0, \\ \mu U + \mu'' U'' &= 0, \\ \mu' U' + \mu'' U'' &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Wir wollen nun die unbestimmten Coefficienten in den Gleichungen solcher drei Puncte, auf die wir bisher nur beiläufig Rücksicht genommen haben, näher betrachten. Die drei in Rede stehenden Puncte, die auf UU', UU'' und $U'U''$ liegen, seien V'', V' und V. Bedeuten alsdann U, U' und U'' Ausdrücke von der Form: $(au+bv+w)$, in welchen der Coefficient von w gleich Eins (oder gleich einer gegebenen Constanten) ist, so ist in der zweiten Figur (410):

---

und hieraus:

$$\mu Z - \mu''' Z''' = \mu' Z' - \mu'' Z'' = (\mu - \mu''') Z^{V};$$

zwischen den unbestimmten Coefficienten finden auch hier die beiden Bedingungs-Gleichungen:

$$\mu + \mu'' = 1, \qquad \mu' + \mu''' = 1,$$

Statt. Wir kommen ferner, wie im Texte, wenn wir auf die Bedingungs-Gleichung

$$\mu Z - \mu' Z' + \mu'' Z'' - \mu''' Z''' = 0,$$

Rücksicht nehmen, zu folgender End-Gleichung:

$$\mu\mu'(Z+Z') - \mu''\mu'''(Z''+Z''') = (\mu - \mu'')(Z^{IV} + Z^{V}). \qquad (1)$$

Um diese Gleichung zu deuten, bemerken wir, dass die vier Gleichungen:

$$Z = 0, \quad Z' = 0, \quad Z - Z' = 0, \quad Z + Z' = 0, \qquad (2)$$

vier Harmonicalen darstellen, von denen die dritte der zweiten Axe parallel ist. Hiernach erhalten wir die vierte Harmonicale, wenn wir den Durchschnitt der beiden ersten mit der Mitte des von denselben auf der zweiten Axe interceptirten Segmentes durch eine gerade Linie verbinden. Und somit haben wir, da jede beliebige gerade Linie zur zweiten Axe genommen werden kann, folgenden Satz bewiesen, auf den wir früher schon (379) auf indirectem Wege gekommen sind:

Wenn man die Durchschnitte der beiden Paare gegenüberliegender Seiten und der beiden Diagonalen mit den Mitten der von diesen drei Linien-Paaren auf einer gegebenen geraden Linie interceptirten Segmente verbindet, so erhält man drei gerade Linien, die durch ein und denselben Punct gehen.

Wenn wir statt Ausdrücke von der Form: $(y+Bx+C)$, durch Z, Z' u. s. w. zu bezeichnen, nun durch dieselben Symbole Ausdrücke von der Form: $(Ay+Bx+1)$ bezeichnen, so erhält die Gleichung (1) eine andere Deutung. Alsdann stellen die Gleichungen (2) immer noch vier Harmonicalen dar, aber die dritte derselben ist nicht mehr der ersten Axe parallel, sondern geht nun durch den Anfangspunct der Coordinaten. Da dieser Anfangspunct jeder beliebige sein kann, so ergibt sich folgender Satz:

Wenn man von einem beliebigen Puncte in der Ebene eines gegebenen Vierecks nach den Durchschnitten der beiden Paare gegenüberliegender Seiten und dem Durchschnitte der beiden Diagonalen drei gerade Linien zieht, so gehen die drei vierten Harmonicalen zu jenen drei Linien-Paaren und diesen drei geraden Linien durch ein und denselben Punct.

Wenn wir annehmen, dass der beliebige Punct unendlich weit auf einer gegebenen geraden Linie fortrücke, so erhalten wir den ersten Satz dieser Note als besondern Fall.

Wir können dem letzten Satze eine andere Aussage geben, wenn wir bemerken, dass ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen auch als ein Dreieck anzusehen ist, dessen drei Winkelpuncte mit irgend einem Puncte durch drei gerade Linien verbunden sind. Die drei Durchschnitte dieser drei Linien mit den Seiten des Dreiecks sind alsdann die Durchschnitte der beiden Paare gegenüberliegender Seiten und der beiden Diagonalen des Vierecks.

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{V''U}{V''U'}, \qquad \frac{\mu}{\mu''} = \frac{VU''}{VU'}, \qquad \frac{\mu''}{\mu'} = \frac{VU'}{VU''}$$

und da:

$$\frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\mu''} \cdot \frac{\mu''}{\mu'} = 1,$$

so folgt:

$$V''U.\ V'U''.\ VU' = V''U'.\ V'U.\ VU''.$$

Wir haben also nachstehenden Satz bewiesen, der nach den H. H. SERVOIS und PONCELET zuerst von JOHANN BERNOULLI bemerkt worden ist *):

Drei gerade Linien, welche irgend einen in der Ebene eines gegebenen Dreiecks beliebig angenommenen Punct mit den drei Winkelpuncten des Dreiecks verbinden, bestimmen auf den drei Seiten sechs Segmente: das Product dreier nicht an einander stossender Segmente ist dem Producte der drei übrigen gleich.

Fig. 3. 437. Nach der 432. Nummer erhalten wir ebenfalls für die drei Durchschnitte irgend einer beliebigen geraden Linie, mit den drei Seiten eines gegebenen Dreiecks, Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} \mu U - \mu' U' &= 0, \\ \mu U - \mu'' U'' &= 0, \qquad (1) \\ \mu' U' - \mu'' U'' &= 0, \end{aligned}$$

und hiernach erhalten wir, wenn wir jene drei Durchschnitte wiederum V'', V' und V nennen, gerade wie in der vorigen Nummer:

$$V''U.\ V'U''.\ VU' = V''U'.\ V'U.\ VU''.$$

Eine beliebige Transversale, die den drei Seiten eines Dreiecks oder ihren Verlängerungen begegnet, bestimmt auf jeder derselben zwei Segmente: das Product dreier derselben, die auf den drei Seiten von den drei Winkelpuncten an genommen werden, ist dem Producte der drei übrigen gleich.

Nach den Herren BRIANCHON und PONCELET war dieser Satz schon den Alten bekannt. **)

438. Wir wollen nun Ausdrücke von der Form: $(u+bv+cw)$, in denen der Coefficient von u gleich Eins ist, durch die Symbole U, U' und U'' uns dargestellt denken. Alsdann erhalten die unbestimmten Coefficienten eine andere geometrische Bedeutung. Wenn nemlich:

$$\begin{aligned} u+bv+cw &= 0, \\ u+b'v+c'w &= 0, \end{aligned}$$

die Gleichungen zweier gegebener Puncte sind, und wir diese beiden Gleichungen addiren, nachdem wir zuvor die zweite derselben mit einem unbestimmten Coefficienten ν multiplicirt haben, so kommt:

$$u + \frac{b+\nu b'}{1+\nu} v + \frac{c+\nu c'}{1+\nu} w = 0.$$

Bezeichnen wir, der Kürze halber, in dieser Gleichung, die einen Punct darstellt, der mit den gegebenen in gerader Linie liegt, den Coefficienten von v durch b'', so erhalten wir ohne Mühe:

---

*) PONCELET, Traité des propriétés projectives, 158.

**) PONCELET, Propr. proj. 145. PTOLEMAEI Almagestum I. cap. 12.

$$\frac{b - b'}{b'' - b'} = \nu,$$

b, b' und b'' sind aber, bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten, die Cotangenten der Winkel, welche diejenigen geraden Linien, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten und durch die drei in Rede stehenden Puncte gehen, mit der ersten Axe bilden (406). Ziehen wir also irgend eine gerade Linie mit der ersten Axe parallel, die jenen drei letztgenannten geraden Linien, der ersten in M, der zweiten in M' und der dritten in M'', begegnet, so ist:

$$\frac{M''M}{M''M'} = \nu.$$

439. Hiernach erhalten wir, wenn wir uns auf die drei Gleichungen (1) der 436. Nummer und auf die 2. Figur beziehen, in welcher wir den beliebigen Punct O als Anfangspunct der Coordinaten und die beliebige gerade Linie AB als der ersten Axe parallel, betrachten: Fig. 2.

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{v''u}{v''u'}, \qquad \frac{\mu}{\mu''} = \frac{v'u''}{v'u}, \qquad \frac{\mu''}{\mu'} = \frac{vu'}{vu''},$$

und mithin:

$$v''u.\ v'u''.\ vu' = v''u'.\ v'u.\ vu''. \qquad (1)$$

Nach einer Ueberlieferung von BEAUGRAND beschäftigte sich DESARGUES in einer im Jahre 1639 erschienenen, verloren gegangenen, Schrift ausführlich mit der durch die vorstehende Gleichung ausgedrückten Beziehung zwischen sechs Puncten einer geraden Linie, und nannte solche Puncte „*involution* de *six points*“, einen Ausdruck, den H. PONCELET wieder aufnimmt. *) Diese Beziehung von sechs Puncten einer geraden Linie zu einander bildet die Grundlage einer eleganten kleinen Schrift des H. BRIANCHON, in der zugleich bemerkt wird, dass dieselbe Beziehung von sechs Puncten zu einander auf eine siebenfache Weise ausgedrückt werden kann. **)

Dem in der Gleichung (1) enthaltenen Satze können wir hiernach folgende Aussage geben:

Zieht man von irgend einem Puncte drei gerade Linien nach den drei Winkelpuncten eines gegebenen Dreiecks und drei andere gerade Linien nach den Fusspuncten dreier von jenen Winkelpuncten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällter, in demselben Puncte sich kreuzender gerader Linien, so erhält man sechs gerade Linien, von denen jede beliebige Transversale in solchen sechs Puncten geschnitten wird, die eine Involution bilden.

Man bemerkt bald, dass aus diesem Satze der Satz der 436. Nummer als besonderer Fall sich sogleich ergibt, wenn man den beliebigen Punct unendlich weit auf einer gegebenen geraden Linie fortrücken lässt.

440. Wir erhalten hiernach ferner, ohne irgend eine Entwicklung, indem wir uns auf die Gleichungen (1) der 437. Nummer und auf die dritte Figur beziehen, bei der analogen Bezeichnung dieselbe Gleichung (1) der vorigen Nummer: Fig. 3.

$$v''u.\ v'u''.\ vu' = v''u'.\ v'u.\ vu''.$$

---

*) PONCELET, Prop. proj. 178.

**) Mémoire sur les lignes du second ordre. Par C. J. BRIANCHON. Paris, 1817.

Die drei Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks UU'U'' und die drei in gerader Linie liegenden Puncte V, V', V'' bilden die sechs Winkelpuncte einer vollständigen vierseitigen Figur. Hiernach ist der bewiesene Satz folgender:

Wenn man von irgend einem Puncte nach den sechs Winkelpuncten einer vollständigen vierseitigen Figur sechs gerade Linien zieht, so bestimmen dieselben auf jeder beliebigen Transversalen eine Involution von sechs Durchschnittspuncten.

Man sieht leicht ein, wie aus diesem Satze der Satz der 437. Nummer als besonderer Fall folgt.

441. Wenn zwei Puncten-Paare, etwa u'' und v'', u' und v', zusammenfallen, so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$u''u.\ vu' = u'u.\ vu'',$$

d. h. die vier Puncte u'', (v''), u', (v'), u und v sind vier harmonische Theilungspuncte, oder bilden, nach dem Ausdrucke von DÉSARGUES, eine Involution von vier Puncten. Damit aber die Puncte u'' und v'', u' und v' zusammenfallen, müssen wir den Anfangspunct der Coordinaten in dem Durchschnitte O' der beiden Diagonalen u''v'' und u'v' annehmen. Wenn wir alsdann überdies noch die dritte Diagonale der vierseitigen Figur, uv, als die beliebige Transversale nehmen, so erhalten wir folgenden bekannten Satz:

Zwei Diagonalen einer vollständigen vierseitigen Figur theilen die dritte Diagonale harmonisch. *)

---

*) Wenn wir die Seiten eines gegebenen Dreiecks durch die Gleichungen:

$$Z = o, \qquad Z' = o, \qquad Z'' = o,$$

Fig. 4, 6. darstellen, so erhalten wir für drei gerade Linien Y'', Y' und Y, welche durch die drei Winkelpuncte des Dreiecks und irgend einen festen Punct gehen, drei Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} \mu Z - \mu' Z' &= o, \\ \mu' Z' - \mu'' Z'' &= o, \\ \mu'' Z'' - \mu Z &= o. \end{aligned} \qquad (1)$$

Wenn wir nun erstens unter Z, Z' und Z'' Ausdrücke von der Form $\frac{y+ax-b}{\sqrt{1+a^2}}$ verstehen, (Ausdrücke, die wir in dem Vorstehenden durch die verschieden accentuirten A bezeichnet haben), so bedeutet bekanntlich die erste der Gleichungen (1) eine gerade Linie, die durch den Durchschnitt der beiden ersten Dreiecks-Seiten geht und die den Winkel, den diese beiden Seiten einschliessen, so theilt, dass die Sinus der resultirenden Winkel sich verhalten wie μ': μ. Wir erhalten hiernach, mit Beziehung auf die 4. Figur:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{\sin\alpha''}{\sin\beta''}, \qquad \frac{\mu''}{\mu'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \qquad \frac{\mu}{\mu''} = \frac{\sin\alpha'}{\sin\beta'};$$

und da:

$$\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{\mu}{\mu''}\cdot\frac{\mu''}{\mu'} = 1,$$

so folgt:

$$\sin\alpha''\sin\alpha'\sin\alpha = \sin''\beta\sin\beta'\sin\beta.$$

Der Satz, den diese Gleichung enthält, ist bekannt und folgender:

Wenn man von irgend einem Puncte drei gerade Linien nach den drei Winkelpuncten eines gegebenen Dreiecks zieht, so wird jeder Winkel oder sein Nebenwinkel so in zwei Theile getheilt, dass das Product der Sinus derjenigen drei Winkel, die auf derselben Seite der drei Theilungslinien liegen, dem Producte der Sinus der drei übrigen Winkel gleich ist.

Fig. 5. Wenn wir, statt durch einen festen Punct drei gerade Linien nach den Winkelpuncten eines gegebenen Dreiecks zu ziehen, nun diese drei Winkelpuncte mit drei Puncten, die

442. Die Entwicklungen der letzten Nummern sind der Verallgemeinerung fähig. Wir wollen ein Polygon $UU^1U^2U^3 \ldots U^{n-1}$ von einer beliebigen Anzahl Seiten betrachten. Die n Winkelpuncte dieses Polygons wollen wir durch die Gleichungen:

$$U = o,\quad U' = o,\quad U^2 = o,\quad U^3 = o, \ldots U^{n-3} = o,\quad U^{n-2} = o,\quad U^{n-1} = o,$$

---

in gerader Linie und auf den gegenüberliegenden Seiten liegen, durch drei gerade Linien Y'', Y', Y verbinden, so ergeben sich, wie bekannt, für diese Linien Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} \mu Z - \mu' Z' &= o, \\ \mu' Z' - \mu'' Z'' &= o, \\ \mu'' Z'' - \mu Z &= o; \end{aligned} \qquad (2)$$

und hier erhalten wir, indem wir uns auf die 5. Figur beziehen, bei einer analogen Bezeichnung, gerade so wie eben,

$$\sin\alpha'' \sin\alpha' \sin\alpha = \sin\beta'' \sin\beta' \sin\beta.$$

Wir gelangen hiernach, neben dem eben bewiesenen Satze, zu folgendem Satze:

Wenn man von irgend drei Puncten, die in gerader Linie und auf den drei Seiten eines gegebenen Dreiecks liegen, drei gerade Linien nach den diesen Seiten gegenüberstehenden Winkelpuncten zieht, so werden die drei Winkel des Dreiecks oder ihre Nebenwinkel so getheilt, dass das Product der Sinus von drei der resultirenden Winkel dem Producte der Sinus der drei übrigen gleich ist.

Wenn wir zweitens Ausdrücke von der Form: $(y - ax - b)$, in denen der Coefficient von y gleich Eins (oder auch nur eine ein für alle Mal gegebene Constante ist) durch Z, Z' und Z'' bezeichnen, so erhalten die unbestimmten Coefficienten eine andere Bedeutung. Wenn wir nemlich die Gleichungen irgend zweier gegebenen geraden Linien:

$$\begin{aligned} y - ax - b &= o, \\ y - a'x - b' &= o, \end{aligned}$$

zu nachstehender Gleichung vermittelst eines unbestimmten Coefficienten ν verbinden:

$$y - \frac{a + \nu a'}{1 + \nu} x - \frac{b + \nu b'}{1 + \nu} = o,$$

und, der Kürze halber, das constante Glied in dieser Gleichung b'' nennen, so ergibt sich:

$$\frac{b'' - b}{b'' - b'} = \nu.$$

Es ist also ν das Verhältniss der zwischen der dritten und ersten und zwischen der dritten und zweiten geraden Linie liegenden Stücke der zweiten Axe zu einander. Hiernach erhalten wir, gleichviel, ob wir auf die drei Gleichungen (1) und die 6. Figur oder auf die drei Gleichungen (2) und die 5. Figur uns beziehen, wenn wir die beliebige gerade Linie AB als zweite Axe betrachten:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{y''z}{y''z'}, \qquad \frac{\mu''}{\mu'} = \frac{yz'}{yz''}, \qquad \frac{\mu}{\mu''} = \frac{y'z''}{y'z},$$

und weil wiederum:

$$\frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\mu''}{\mu'} \cdot \frac{\mu}{\mu''} = 1,$$

so folgt:

$$y'z.\ yz'.\ y'z'' = y''z'.\ yz''.\ y'z.$$

Da die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks und drei gerade Linien, welche die drei Winkelpuncte desselben mit irgend einem festen Puncte verbinden, ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen bilden, so haben wir also erstlich folgenden bekannten Satz bewiesen. Fig. 6.

Die Durchschnitte einer beliebigen Transversalen mit den vier Seiten und den beiden Diagonalen eines Vierecks bilden eine Involution von sechs Puncten. (Poncelet, Prop. proj. 172. Brianchon a. a. O. §. VIII.)

Und ferner haben wir folgenden zweiten Satz:

Die Durchschnitte einer beliebigen Transversalen mit den drei Seiten eines gegebenen Dreiecks und den drei geraden Linien, welche die drei Winkelpuncte des Dreiecks mit dreien auf den gegenüberstehenden Seiten und in gerader Linie liegenden Puncten verbinden, bilden eine Involution von sechs Puncten. Fig. 5.

und die n Puncte $V, V^1, V^2, \ldots V^{n-1}, V^n$, die auf einer beliebigen Transversalen und den Polygon-Seiten $UU', U'U^2, U^2U^3, \ldots U^{n-2}U^{n-1}, U^{n-1}U$ liegen, durch folgende Gleichungen:

$$V = 0, \quad V^1 = 0, \quad V^2 = 0, \quad \ldots \quad V^{n-2} = 0, \quad V^{n-1} = 0$$

darstellen. Alsdann ergeben sich folgende n identische Gleichungen:

$$\mu U + \mu^1 U^1 = \nu V,$$
$$\mu^1 U^1 + \mu^2 U^2 = \nu^1 V^1,$$
$$\mu^2 U^2 + \mu^3 U^3 = \nu^2 V^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\mu^{n-3} U^{n-3} + \mu^{n-2} U^{n-2} = \nu^{n-3} V^{n-3},$$
$$\mu^{n-2} U^{n-2} + \mu^{n-1} U^{n-1} = \nu^{n-2} V^{n-2},$$
$$\mu^{n-1} U^{n-1} + \varsigma U = \nu^{n-1} V^{n-1},$$

indem wir durch $\mu, \mu^1 \ldots \mu^{n-1}, \nu, \nu^1 \ldots \nu^{n-1}$ und ς unbestimmte Coefficienten bezeichnen. Ziehen wir von der ersten dieser n Gleichungen die zweite ab, addiren zu dem Reste die dritte, ziehen von dem Resultate die vierte ab, addiren zu dem neuen Reste die fünfte, und gehen auf diese Weise bis zur letzten Gleichung, indem wir abwechselnd addiren und subtrahiren, so kommt:

$$(\mu \mp \varsigma)U = \nu V - \nu^1 V^1 + \nu^2 V^2 \ldots U \mp \nu^{n-3} V^{n-3} \pm \nu^{n-2} V^{n-2} \mp \nu^{n-1} V^{n-1},$$

wobei wir das obere oder untere Zeichen nehmen müssen, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Die beiden Theile dieser Gleichung können auf keine andere Weise identisch werden, als wenn die Glieder jedes derselben sich gegenseitig aufheben. Denn, wäre dies nicht der Fall, so würde der zweite Theil, gleich Null gesetzt, irgend einen Punct darstellen, der mit den Puncten $V, V' \ldots$ in gerader Linie läge, und also nicht mit demjenigen Puncte, der durch den ersten Theil jener Gleichung, wenn wir denselben gleich Null setzen, dargestellt wird, das heisst, mit dem ersten Winkelpuncte des Polygons, identisch sein könnte. Somit ist:

$$\mu \mp \varsigma = 0,$$

und folglich:

$$\frac{\mu}{\mu^1} \cdot \frac{\mu^1}{\mu^2} \cdot \frac{\mu^2}{\mu^3} \quad \ldots \quad \frac{\mu^{n-2}}{\mu^{n-1}} \cdot \frac{\mu^{n-1}}{\varsigma} = \mp 1. \qquad (1)$$

Hiernach ergibt sich, gerade wie in der 437. Nummer, nachstehender Satz:

Wenn irgend ein Polygon $UU^1U^2 \ldots$ und irgend eine Transversale, die den Seiten desselben $UU^1, U^1U^2, \ldots$ oder ihren Verlängerungen in den Puncten $V, V^1, \ldots$ begegnet, gegeben sind, und man zieht von einem beliebigen Puncte n gerade Linien nach den n Winkelpuncten des Polygons und n andere gerade Linien nach den n Puncten $V, V^1, \ldots$ so hat man, wenn man die Durchschnitte dieser 2n Linien mit einer beliebigen neuen Transversalen $u, u^1, u^2 \ldots u^{n-1}, v, v^1, v^2, \ldots v^{n-1}$ nennt:

$$vu.\ v^1u^1.\ v^2u^2 \ \ldots \ v^{n-1}u^{n-1} = vu^1.\ v^1u^2.\ v^2u^3 \ \ldots \ v^{n-1}u.$$

Wenn wir annehmen, dass in dem ersten dieser beiden Sätze die beliebige Transversale durch den Durchschnitt der beiden Diagonalen und zweier gegenüberliegender Seiten, oder durch die beiden Durchschnitte der beiden Paare gegenüberliegender Seiten des Vierecks gehe, so erhalten wir wiederum den Satz der 440. Nummer des Textes. Es wird die Transversale harmonisch getheilt.

Und ferner ergibt sich folgender zweiter Satz, der mit dem vorstehenden in genauer Beziehung steht:

Wenn irgend ein Polygon UU^1U^2 . . und irgend eine Transversale, die, wie vorhin, den Seiten desselben oder ihren Verlängerungen in den Puncten V, V^1, . . V^{n-1} begegnet, gegeben sind, so hat man:

$$VU.\ V^1U^1.\ V^2U^2.\ .\ V^{n-1}U^{n-1} = VU^1.\ V^1U^2.\ V^2U^3.\ .\ V^{n-1}U. \text{*)}$$

Die geometrische Bedeutung des verschiedenen Zeichens in der Gleichung (1), welches sich auf den zwiefachen Fall, dass n eine gerade oder ungerade Zahl ist, bezieht, ergibt sich sogleich. Dieses doppelte Zeichen wird dadurch bedingt, dass eine Transversale nothwendig einer geraden Anzahl von Seiten (nicht deren Verlängerungen) eines beliebigen Polygons begegnet.

Der letzte Satz, der Carnot gehört, und der, wie derselbe gezeigt hat, in der andern Beziehung, dass eine beliebige algebraische Curve an die Stelle der geradlinigten Transversalen treten kann, der Verallgemeinerung fähig ist, bildet die Grundlage der sogenannten „Theorie der Transversalen." Wir sehen, wie dieser Satz und andere Sätze derselben Art, aus der Betrachtung der unbestimmten Coefficienten, die ich bisher unberücksichtigt gelassen habe, unmittelbar sich ergeben. Um dies bemerklich zu machen, habe ich bei den letzten Entwicklungen mit einiger Ausführlichkeit verweilt; sie weiter auszudehnen und ihre Anwendung nachzuweisen, kann hier nicht in unserer Absicht liegen. **)

442. Wir wollen diesen Abschnitt mit einigen Entwicklungen beschliessen, die in genauerer Verbindung mit den frühern stehen, als es auf den ersten Blick scheinen

---

*) Poncelet, Prop. proj. Nro. 145.

**) Wenn wir die Seiten irgend eines Polygons durch die Gleichungen:

$$Z = o,\quad Z^1 = o,\quad Z^2 = o, \ldots Z^{n-1} = o,$$

und solche gerade Linien, die von irgend einem festen Puncte nach den Winkelpuncten des Polygons, also nach den Durchschnitten von Z und Z^1, Z^1 und Z^2, . . Z^{n-1} und Z gezogen werden, durch die Gleichungen:

$$Y = o,\quad Y^1 = o, \ldots\ldots\ldots Y^{n-1} = o,$$

darstellen, so erhalten wir gerade dieselben Gleichungen als im Texte, wenn wir U mit Z und V mit Y vertauschen. Zu der Bedeutung der End-Gleichung:

$$\frac{\mu}{\mu^1}.\ \frac{\mu^1}{\mu''} \ldots \frac{\mu^{n-1}}{\mu} = \pm 1,$$

kommen wir sogleich nach der Anmerkung zur 441. Nummer, und somit zu folgenden beiden Sätzen:

Wenn man von irgend einem festen Puncte nach den Winkelpuncten eines gegebenen beliebigen Polygons von n Seiten n gerade Linien zieht, und man die Durchschnitte einer beliebigen Transversalen mit den n Polygon-Seiten z, z^1, . . z^{n-1}, die Durchschnitte derselben Transversalen mit jenen n geraden Linien, die nach den Durchschnitten der ersten und zweiten, der zweiten und dritten, . . der letzten und ersten Polygon-Seiten gehen y, y^1, . . y^{n-1} nennt, so ist:

$$yz.\ y^1z^1.\ y^2z^2 \ldots y^{n-1}z^{n-1} = yz^1.\ y^1z^2.\ y^2z^3 \ldots y^{n-1}z.$$

Wenn Alles wie im vorigen Satze bleibt, und man nennt diejenigen Winkel, welche die erste der durch den festen Punct gehenden geraden Linien mit der ersten und zweiten Polygon-Seite bildet, α und β, diejenigen Winkel, welche die zweite jener geraden Linien mit der zweiten und dritten Polygon-Seite bildet, α^1 und β^1, u. s. w., so ist:

$$\sin\alpha \sin\alpha^1 \sin\alpha^2 \ldots \sin\alpha^{n-1} = \sin\beta \sin\beta^1 \sin\beta^2 \ldots \sin\beta^{n-1},$$

Diesen letzten Satz leitet H. Poncelet (Mémoire sur la théorie générale des polaires reciproques, n 125) in Crelle's Journal IV., Pag. 56 aus dem letzten Satze des Textes her.

möchte. Manche der in den bisher entwickelten Gleichungen enthaltenen Sätze bekommen bloss eine andere Aussage, wenn wir, wie wir es jetzt thun wollen, uns auf eine Zusammenstellung gegebener Kreise beziehen.

Wir haben in der 414. Nummer für den kürzesten Abstand, R, einer geraden Linie (w', v', u') von einem durch die Gleichung:

$$au+bv+w = 0, \qquad (1)$$

dargestellten Puncte, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, folgenden Ausdruck erhalten:

$$R = \pm \frac{au'+bv'+w'}{\sqrt{(u'^2+v'^2)}}.$$

Betrachten wir w', v' und u' als veränderliche Grössen, so beziehen sich diejenigen Werthe derselben, welche die vorstehende Gleichung befriedigen, auf solche gerade Linien, deren kürzeste Abstände von dem gegebenen Puncte (1) constant und gleich R sind. Es umhüllen also diese gerade Linien einen Kreis, dessen Mittelpunct in dem gegebenen Puncte liegt, und dessen Radius gleich R ist. Für die Gleichung dieses Kreises erhalten wir also, wenn wir die Accente fortlassen:

$$R = \pm \frac{au+bv+w}{\sqrt{(u^2+v^2)}}.$$

Nach der 31. Nummer des ersten Bandes müssen wir das positive Zeichen dann nehmen, wenn der gegebene Punct in Beziehung auf die gerade Linie nach der positiven Seite der y liegt; das negative Zeichen also im entgegengesetzten Falle. Wir sehen hieraus, dass die letzte Gleichung, wenn wir das positive Zeichen nehmen, denjenigen Halbkreis darstellt, der, wenn wir den Kreis durch einen der ersten Axe parallelen Durchmesser halbiren, nach der negativen Seite der y liegt, und dass dieselbe Gleichung, wenn wir das andere Zeichen nehmen, den nach der positiven Seite der y hin liegenden Halbkreis darstellt. Schaffen wir das Wurzel-Zeichen fort, so kommt:

$$R^2(u^2+v^2) = (au+bv+w)^2,$$

für die allgemeine, auf rechtwinklige Coordinaten bezogene, Gleichung des Kreises.

443. Wenn zwei Kreise durch folgende beiden Gleichungen gegeben sind:

$$R = \pm \frac{au+bv+w}{\sqrt{(u^2+v^2)}}, \qquad R' = \pm \frac{a'u+b'v+w}{\sqrt{(u^2+v^2)}}, \qquad (1)$$

so beziehen sich diejenigen Werthe von w, v und u, welche diese Gleichungen beide befriedigen, auf solche gerade Linien, welche sowol den einen als auch den andern gegebenen Kreis berühren. Dieselben Werthe von w, v und u müssen auch eine von folgenden beiden Gleichungen befriedigen:

$$\frac{R}{R'} = \frac{au+bv+w}{a'u+b'v+w'}, \qquad \frac{R}{R'} = -\frac{au+bv+w}{a'u+b'v+w'},$$

die wir erhalten, wenn wir die beiden Kreis-Gleichungen in einander dividiren, und einmal in diesen beiden Gleichungen gleiche, das andere Mal ungleiche Zeichen nehmen. Die letzten Gleichungen stellen hiernach zwei Puncte dar, durch welche die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Kreise gehen. Durch den ersten dieser beiden Puncte, dem ein gleiches Zeichen in den beiden Kreis-Gleichungen entspricht, gehen diejenigen beiden gemeinschaftlichen Tangenten, die auf derselben Seite der Mittelpuncte der beiden Kreise liegen: die äussern gemeinschaftlichen Tangenten; durch den zweiten Punct diejenigen, welche zwischen den beiden Mittelpuncten hindurch gehen: die

beiden **innern**. Zugleich ist ersichtlich, dass die in Rede stehenden Puncte und die Mittelpuncte der beiden Kreise, deren Gleichungen folgende sind:

$$au+bv+w = 0, \qquad a'u+b'v+w = 0,$$

vier **harmonische Theilungspuncte** bilden. (410)

444. Wenn wir mit den beiden gegebenen Kreisen noch einen dritten zusammenstellen und für die Gleichung desselben folgende nehmen:

$$R'' = \pm \frac{a''u+b''v+w}{\sqrt{(u^2+v^2)}},$$

so erhalten wir:

$$\frac{R}{R'} = \pm \frac{au+bv+w}{a'u+b'v+w},$$

$$\frac{R'}{R''} = \pm \frac{a'u+b'v+w}{a''u+b''v+w},$$

$$\frac{R''}{R} = \pm \frac{a''u+b''v+w}{au+bv+w},$$

für die Gleichungen der drei Paare von Durchschnittspuncten der äussern und der innern gemeinschaftlichen Tangenten je zweier der drei gegebenen Kreise. Jede von diesen drei Gleichungen ist eine unmittelbare Folge der beiden übrigen, wenn wir in allen drei Gleichungen das positive Zeichen, oder in einer beliebigen derselben das positive, in den beiden übrigen das negative Zeichen nehmen. Hiermit ist also auf sehr einfache Weise folgender bekannter Satz bewiesen:

Die Durchschnitte der beiden äussern gemeinschaftlichen Tangenten je zweier von drei gegebenen Kreise liegen alle drei in gerader Linie. Der Durchschnitt der äussern gemeinschaftlichen Tangenten irgend zweier der drei gegebenen Kreise liegt mit den Durchschnitten der innern gemeinschaftlichen Tangenten jedes dieser beiden Kreise und des dritten Kreises in gerader Linie.

445. Der Kürze halber, wollen wir folgende Ausdrücke:

$$\frac{au+bv+w}{R\sqrt{(u^2+v^2)}}, \qquad \frac{a'u+b'v+w}{R'\sqrt{(u^2+v^2)}}, \qquad \frac{a''u+b''v+w}{R''\sqrt{(u^2+v^2)}}, \text{ u. s. w.}$$

durch die Symbole W, W', W'' u. s. w. bezeichnen. Hiernach stellen z. B. die beiden Gleichungen:

$$W^2 = 1, \qquad W'^2 = 1,$$

zwei Kreise dar, die Gleichungen:

$$W = 0, \qquad W' = 0,$$

ihre Mittelpuncte und die Gleichungen:

$$W+W' = 0, \qquad W-W' = 0,$$

die Durchschnittspuncte der innern und äussern gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kreise.

Bei dieser Bezeichnung reducirt sich die Gleichung:

$$W+W'+W'' = 0 \tag{1}$$

auf den ersten Grad, und stellt mithin einen Punct dar. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir zugleich:

$$W = 0, \text{ und } W'+W'' = 0;$$
$$W' = 0, \quad „ \quad W+W'' = 0;$$
$$W'' = 0, \quad „ \quad W+W' = 0;$$

setzen. Diejenigen drei geraden Linien, welche die dreimal zwei Puncte, welche durch diese Gleichungen dargestellt werden, verbinden, gehen alle drei durch den Punct (1). Hierin ist folgender Satz enthalten:

Wenn man den Mittelpunct jedes dreier gegebener Kreise mit dem Durchschnittspuncte der gemeinschaftlichen innern Tangenten der jedesmalig übrigen beiden Kreise verbindet, so erhält man drei gerade Linien, die durch ein und denselben Punct gehen.

Statt der Gleichungen (1) erhalten wir drei neue Gleichungen, wenn wir nach einander jedes der drei Glieder, aus denen dieselbe besteht, mit negativem Zeichen nehmen. Die Construction der durch diese neuen Gleichungen dargestellten Puncte führt zu einem Satze, der aus dem Vorstehenden sogleich hervorgeht, wenn wir zwei Durchschnitte innerer gemeinschaftlicher Tangenten mit den Durchschnitten der entsprechenden äusseren Tangenten vertauschen.

446. Wenn wir weiter gehen, und vier Kreise zusammenstellen, so erhalten wir acht verschiedene Gleichungen, die wir in folgende zusammenfassen können:

$$\pm W \pm W' \pm W'' \pm W''' = 0. \qquad (2)$$

Nehmen wir zuerst alle Glieder mit dem positiven Zeichen, mithin folgende Gleichung:

$$W + W' + W'' + W''' = 0, \qquad (3)$$

so können wir dieselbe auf folgende dreifache Weise in zwei Gleichungen zerlegen:

$$W + W' = 0, \text{ und } W'' + W''' = 0;$$
$$W + W'' = 0, \quad " \quad W' + W''' = 0;$$
$$W + W''' = 0, \quad " \quad W' + W'' = 0.$$

Die durch diese sechs Gleichungen dargestellten Puncte sind die Durchschnittspuncte der innern gemeinschaftlichen Tangenten je zweier der vier gegebenen Kreise. Diese sechs Durchschnittspuncte sind also die Winkelpuncte eines Sechsecks, dessen drei Diagonalen in dem, durch die Gleichung (3) dargestellten, Puncte sich schneiden.

Wenn wir ferner in der Gleichung (2) irgend drei Glieder mit dem positiven und das jedesmalige vierte Glied mit dem negativen Zeichen nehmen, so erhalten wir folgende vier Gleichungen:

$$\begin{aligned} W + W' + W'' - W''' &= 0, \\ W + W' - W'' + W''' &= 0, \\ W - W' + W'' + W''' &= 0, \\ -W + W' + W'' + W''' &= 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Die erste dieser Gleichungen können wir befriedigen, indem wir zugleich

$$W + W' = 0, \text{ und } W'' - W''' = 0;$$
$$W + W'' = 0, \quad " \quad W' - W''' = 0;$$
$$W' + W'' = 0, \quad " \quad W - W''' = 0;$$

setzen. Die sechs Puncte, die wir auf diese Weise erhalten, sind die Durchschnittspuncte der innern gemeinschaftlichen Tangenten je zweier der drei ersten Kreise, und die Durchschnitte der äussern gemeinschaftlichen Tangenten jedes derselben und des vierten Kreises. Diese sechs Puncte bestimmen also ein Sechseck, dessen drei Diagonalen durch den, durch die erste der Gleichungen (4) dargestellten Punct gehen. Den drei übrigen Gleichungen (4) entsprechen drei andere solcher Sechsecke.

Wenn wir endlich in der Gleichung (2) zwei Glieder mit positiven und zwei mit negativen Zeichen nehmen, so ergeben sich folgende drei einzelne Gleichungen:

$$W+W'-W''-W''' = 0,$$
$$W-W'-W''+W''' = 0, \qquad (5)$$
$$W-W'+W''-W''' = 0,$$

Um die erste dieser drei Gleichungen zu befriedigen, setzen wir zugleich

$$W+W' = 0, \text{ und } W''+W''' = 0;$$
$$W-W'' = 0, \quad „ \quad W'-W''' = 0;$$
$$W-W''' = 0, \quad „ \quad W'-W'' = 0.$$

Hiernach erhalten wir ein neues Sechseck, dessen drei Diagonalen in demselben Puncte sich kreuzen. Die gegenüberstehenden Winkelpuncte desselben sind zwei Durchschnitte innerer und zwei Paar Durchschnitte äusserer gemeinschaftlicher Tangenten. Solcher Sechsecke erhalten wir drei, die den drei Gleichungen (5) entsprechen.

Wenn wir das Vorstehende zusammenfassen, so ergibt sich folgender Satz:

Wenn irgend vier Kreise gegeben sind, und man die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier derselben zieht, so erhält man sechs Durchschnittspuncte innerer und sechs Durchschnittspuncte äusserer gemeinschaftlicher Tangenten. Diese zwölf Puncte, von denen sechzehnmal drei in gerader Linie liegen, bilden, zu sechs genommen, die Winkelpuncte von acht verschiedenen Sechsecken, deren drei Diagonalen in demselben Puncte sich schneiden.

Die sechs Puncte, welche die Winkelpuncte eines solchen Sechsecks bilden, sind dadurch bestimmt, dass die sechs übrigen Puncte (wovon wir uns leicht überzeugen) jedesmal zu drei und drei auf vier gerade Linien liegen.

447. Wir können die in der vorigen Nummer behandelten Gleichungen auch in zwei solche Gleichungen zerlegen, von denen die eine dreigliederig, die andere eingliederig ist. Auf diese Weise erhalten wir z. B., wenn wir die Gleichung:

$$W+W'+W''+W''' = 0,$$

nehmen, folgende Zerlegungen:

$$W+W'+W'' = 0, \text{ und } W''' = 0;$$
$$W+W'+W''' = 0, \quad „ \quad W'' = 0;$$
$$W+W''+W''' = 0, \quad „ \quad W' = 0.$$

Wir wollen hier uns auf den besondern Fall beschränken, wo der erste Kreis von jedem der drei übrigen ausserhalb berührt wird. Alsdann stellen die drei Gleichungen der ersten Vertical-Columne diejenigen drei Puncte dar, die man erhält, wenn man die drei letzten Kreise zu je zwei zusammenstellt, den Mittelpunct des einen mit dem Berührungspuncte auf dem andern durch zwei gerade Linien verbindet, und den Durchschnitt dieser Linien bestimmt. Die drei übrigen Gleichungen stellen die Mittelpuncte der drei letzten Kreise dar.

448. Wir wollen als letztes Beispiel die Construction folgender Gleichung

$$2W+W'+W''+W''' = 0$$

unmittelbar hier anschliessen. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir zugleich:

$$W+W'+W'' = 0, \text{ und } W+W''' = 0;$$
$$W+W'+W''' = 0, \quad „ \quad W+W'' = 0;$$
$$W+W''+W''' = 0, \quad „ \quad W+W' = 0;$$

setzen. Die drei voranstehenden Gleichungen sind dieselben, als in der vorigen Nummer; die drei letzten Gleichungen stellen diejenigen Puncte dar, in welchen der erste

Kreis von den drei übrigen berührt wird. Wir können von diesen letzten Kreisen ganz abstrahiren, wenn wir von irgend drei Radien des ersten Kreises ausgehen, und drei beliebig auf den Verlängerungen derselben angenommenen Puncte als die Mittelpuncte jener drei Kreise, und die Endpuncte dieser Radien als die drei Berührungspuncte betrachten. Hiernach sind die Resultate dieser und der vorigen Nummer in folgendem Satze enthalten:

Wenn man auf den Verlängerungen dreier Radien eines gegebenen Kreises drei Puncte beliebig annimmt, diese Radien zu je zwei zusammenstellt und die Durchschnittspuncte derjenigen Linien-Paare bestimmt, welche den Endpunct jedes dieser Radien mit dem auf dem andern willkührlich angenommenen Puncte verbindet: so erhält man drei Puncte, die sowol mit den drei willkührlich angenommenen Puncten, als auch mit den Endpuncten der drei Radien, die Winkelpuncte eines solchen Sechsecks bilden, dessen drei Diagonalen durch denselben Punct gehen.

449. Wenn in einer Ebene n beliebige Puncte gegeben sind, und wir für die Gleichungen derselben folgende nehmen:

$$au+bv+w = 0, \quad a'u+b'v+w = 0, \quad a''u+b''v+w = 0, \text{ u. s. w.}$$

so ergibt sich für die Summe der kürzesten Abstände dieser n Puncte von irgend einer geraden Linie (w', v', u'):

$$\pm P = \frac{au'+bv'+w'}{\sqrt{(u'^2+v'^2)}} + \frac{a'u'+b'v'+w'}{\sqrt{(u'^2+v'^2)}} + \frac{a''u'+b''v'+w'}{\sqrt{(u'^2+v'^2)}} + \ldots$$

wenn wir diese Summe P nennen und voraussetzen, dass alle gegebenen Puncte auf derselben Seite der geraden Linie liegen. Der letzten Gleichung können wir folgende Form geben:

$$\pm\frac{P}{n} = \frac{Au+Bv+w}{\sqrt{(u^2+v^2)}}, \qquad (1)$$

indem wir:

$$\frac{a+a'+a''\ldots}{n} = A, \qquad \frac{b+b'+b''\ldots}{n} = B,$$

setzen und die Accente von w, v und u fortlassen. Betrachten wir diese Grössen als veränderlich, so stellt die Gleichung (1) einen Kreis dar, dessen Radius gleich $\frac{P}{n}$, und dessen Mittelpunct der Schwerpunct gleicher Gewichte ist, die man sich in den gegebenen Puncten angebracht denken kann. Also:

Wenn beliebig viele Puncte in derselben Ebene gegeben sind; so wird ein und derselbe Kreis von allen denjenigen geraden Linien umhüllt, für welche die Summe der kürzesten Abstände von den gegebenen Puncten eine constante Grösse ist. *)

Wir können die constante Grösse so gross annehmen, dass alle gegebenen Puncte innerhalb des Kreises, also alle auf einer und derselben Seite jeder Tangente dieses Kreises liegen; und diesen Fall haben wir als Normal-Fall betrachtet. Wenn wir die constante Grösse kleiner annehmen, und einige der gegebenen Puncte ausserhalb des neuen Kreises liegen, so gehen einige Tangenten durch das System der gegebenen Puncte hindurch. Alsdann müssen wir, wenn der obige Satz auch für diesen Fall gelten soll, die Abstände von Puncten, die auf entgegengesetzten Seiten einer solchen Tangente liegen, mit entgegengesetzten Zeichen nehmen. Denn, vermindern wir den Radius $\frac{P}{n}$ des ur-

*) Gergonne, Annales XIX p. 224. (Questions proposées).

sprünglichen Kreises um ein Stück $\frac{p}{n}$, beschreiben mit dem Radius $\left(\frac{P-p}{n}\right)$ einen neuen Kreis und legen an die beiden Kreise zwei parallele Tangenten, so ist die Summe der Abstände aller Puncte von der Tangente an den ersten Kreis (die alle dasselbe Zeichen, etwa das positive, haben) gleich P, und also auch die Summe der Abstände von der Tangente an den zweiten Kreis gleich $P - n.\frac{p}{n} = (P-p)$, wenn wir die Abstände zweier Puncte, die auf verschiedenen Seiten dieser Tangente liegen, subtractiv nehmen.

Wenn der Kreis auf einen Punct, den Schwerpunct, sich reducirt, so ist die, auf die eben angezeigte Weise genommene Summe der Abstände von jeder durch diesen Punct gehenden geraden Linien gleich Null.

Verwandlung der Coordinaten gerader Linien.

449. So wie die Coordinaten eines Punctes sich ändern, wenn wir ein anderes Coordinaten-System zu Grunde legen, so ändern sich auch die Coordinaten einer geraden Linie, wenn wir den Anfangspunct verlegen und die Richtung der beiden Coordinaten-Axen ändern. Wir wollen, auf ähnliche Weise, wie wir früher die Verwandlungs-Formeln für Punct-Coordinaten entwickelt haben, jetzt die entsprechenden Formeln für die Coordinaten gerader Linien entwickeln. Durch Hülfe dieser Formeln können wir alsdann die Gleichung jedes Ortes einer beliebigen Classe umformen in eine Gleichung desselben Ortes, bezogen auf irgend ein anderes Coordinaten-System.

Verlegung des Anfangspunctes mit Beibehaltung der Axen-Richtung.

450. Wir wollen **erstens**, indem wir $u = 1$ setzen, v und w als die ursprünglichen Coordinaten betrachten. Es bedeutet also, bei einem beliebigen Coordinaten-Winkel, v das Verhältniss der Sinus derjenigen beiden Winkel, welche die bezügliche gerade Linie mit der ersten und zweiten Axe bildet; w bedeutet das auf der zweiten Axe von jener geraden Linie bestimmte Segment, genommen mit entgegengesetztem Zeichen. Die neuen Coordinaten wollen wir u, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ nennen. Indem wir wiederum $u = 1$ setzen, erhalten die beiden andern Coordinaten $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ eine analoge Bedeutung als v und w. Fig. 7.

Wo wir auch den Anfangspunct annehmen mögen, so lange wir die Richtung der Axen nicht ändern, behalten wir immer:

$$v = \mathfrak{v},$$

Verrücken wir blos die erste Axe, so dass der neue Anfangspunct O′, in irgend einen Punct (y′, o) der zweiten Axe fällt, so erhält man sogleich, indem man eine beliebige gerade Linie MN betrachtet;

$$w = \mathfrak{w} - y'. \qquad (1)$$

Verrücken wir blos die zweite Axe, so dass irgend ein Punct (o, x′) der ersten Axe, etwa der Punct Q″, zum Anfangspuncte wird, so ist $w = -OQ$, $\mathfrak{w} = -O''Q'$ und da

$$OQ - O''Q' = RQ = x' \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = xv = x'v,$$

so ergibt sich:

$$w = \varpi - x'v. \qquad (2)$$

Wenn wir endlich den Anfangspunct in den durchaus beliebigen Punct O‴ oder (y′, x′) verlegen, so ergibt sich aus (1) und (2):

$$w = \varpi - x'v - y'.$$

Wir können die Form dieser Gleichung leicht a priori rechtfertigen; denn w verschwindet nur in dem Falle, dass die bezügliche gerade Linie durch den ursprünglichen Anfangspunct geht. Die Gleichung dieses Anfangspunctes, bezogen auf das neue System, ist aber:

$$\varpi - x'v - y' = 0.$$

Es verschwindet ferner ϖ nur in dem Falle, dass die bezügliche gerade Linie durch den neuen Anfangspunct geht, dessen Gleichung in dem ursprünglichen Systeme folgende ist:

$$w + \chi' v + y' = 0.$$

Fig. 7. 451. Wir wollen **zweitens**, indem wir $w = \varpi = 1$ setzen, u und v als die ursprünglichen, u und v als die neuen Coordinaten betrachten. Alsdann bedeuten u und u die, negativ genommenen, reciproken Werthe den auf der zweiten, v und v die negativ genommenen reciproken Werthe der auf den ersten Axen von der bezüglichen geraden Linie bestimmten Segmente. Wenn wiederum O der ursprüngliche, O‴ der neue Anfangspunct ist, so ist für die beliebige gerade Linie MN:

$$u = -\frac{1}{OQ}, \quad u = -\frac{1}{O'''Q'}, \quad v = -\frac{1}{OP}, \quad v = -\frac{1}{O'''P'}.$$

Es ist ferner, wenn man RQ′ parallel mit der ersten Axe zieht:

$$OQ = OO' + O'R + RQ,$$
$$= y' - \frac{1}{u} + x'\frac{v}{u},$$
$$= \frac{y'u + x'v - 1}{u},$$

mithin:

$$u = \frac{-u}{y'u + x'v - 1}, \qquad (3)$$

und hieraus folgt unmittelbar, weil $\frac{u}{v} = \frac{u}{v}$:

$$v = \frac{-v}{y'u + x'v - 1}. \qquad (4)$$

Die Form der letzten beiden Ausdrücke rechtfertigt sich wiederum leicht a priori; denn, wenn die bezügliche gerade Linie durch den ursprünglichen Anfangspunct geht, dessen Gleichung in dem neuen Systeme folgende ist:

$$y'u + xv - 1 = 0,$$

so werden u und v beide zugleich unendlich. Ferner werden u und u, v und v für solche gerade Linien, die den zweiten und ersten Axen parallel sind, Null.

Aenderung der Richtung der Coordinaten-Axen mit Beibehaltung des Anfangspunctes.

Fig. 8. 452. Es seien OX und OY die beiden ursprünglichen Axen; wir wollen, indem der Anfangspunct unverrückt bleibt, die erste Axe um einen Winkel φ, die zweite um

einen Winkel ψ' sich drehen lassen, und die auf solche Weise entstehenden neuen Axen OX' und OY' nennen. Durch die beiden Winkel φ und ψ' ist das neue Coordinaten-System vollständig bestimmt, der bequemern Entwicklung wegen, führen wir aber, wie wir es auch schon bei der Verwandlung der Punct-Coordinaten gethan haben, folgende Bezeichnung ein:

$$X'OX = \varphi, \quad Y'OX = \varphi', \quad X'OY = \psi, \quad Y'OY = \psi';$$
$$YOX = \varphi-\psi = \varphi'-\psi' = \vartheta,$$
$$Y'OX' = \varphi'-\varphi = \psi'-\psi = \xi.$$

Wir nennen also den ursprünglichen Coordinaten-Winkel ϑ, den neuen Coordinaten-Winkel ξ.

Zuerst wollen wir wiederum $\frac{v}{u}$ und $\frac{w}{u}$, oder, der Kürze halber, indem wir $u = 1$ setzen, v und w als Coordinaten betrachten, und die entsprechenden Coordinaten in dem neuen Systeme durch υ und ϖ bezeichnen. Da die Gleichung des Punctes immer vom ersten Grade bleibt, auf welches System wir denselben beziehen mögen, so erhalten wir für denselben beliebigen Punct Gleichungen von folgender Form:

$$a+bv+cw = 0$$
$$a'+b'\upsilon+c'\varpi = 0$$

und, um von der ersten Gleichung zur zweiten überzugehen, ist die allgemeinste Form der Ausdrücke für v und w folgende:

$$v = \frac{m+n\upsilon+p\varpi}{q+r\upsilon+s\varpi},$$
$$w = \frac{m'+n'\upsilon+p'\varpi}{q+r\upsilon+s\varpi}. \qquad (5)^{*})$$

*) Wir dürfen durchaus nicht in diesen Ausdrücken die Nenner vernachlässigen. Wenn wir dieses thäten, so brauchten wir, um die unbestimmten Coefficienten, die alsdann auf sechs sich reducirten, zu bestimmen, nur die beiden ersten Axen und eine solche gerade Linie zu betrachten, die einer derselben parallel ist, und nicht, wie im Texte nothwendig ist, auch die beiden zweiten Axen. Ohne dass wir, bei dieser Bestimmung selbst, auf Widersprüche geriethen, kämen wir doch zu einem falschen Resultate. Es liefert diese Bemerkung einen Beleg für die Behauptung, dass wir nur mit Vorsicht uns des Methode der unbestimmten Coefficienten bedienen dürfen.

Man überzeugt sich leicht, dass die Nenner der in Rede stehenden Ausdrücke nur dann von υ und ϖ unabhängig werden und also vernachlässigt werden dürfen, wenn v und w zugleich mit υ und ϖ verschwinden, dass sie aber nie fehlen dürfen, wenn v und w für gewisse endliche Werthe von υ und ϖ unendlich werden. Der letztere Fall ist der vorliegende. Bei der Verwandlung der gewöhnlichen Punct-Coordinaten hingegen, gleichviel, ob wir zwei oder drei Dimensionen des Raumes betrachten, können wir sogleich annehmen, dass die ursprünglichen Coordinaten durch lineare und ganze Functionen der neuen Coordinaten gegeben seien; nur müssen wir, um diese Annahme zu rechtfertigen, zeigen, dass, für diesen besondern Fall, kein Nenner, der υ oder ϖ enthält, da sein kann. Die Schlussweise, welche Herr Biot in seinem

Essai de Géométrie analytique. Sixième Edition; Nro. 97

bei Gelegenheit der Verwandlung der Punct-Coordinaten im Raume anwendet, bedarf hiernach der Berichtigung.

Es ist ein nothwendiges Erforderniss, dass die Nenner in den Ausdrücken bei (5) beide dieselben sind. Es werden v und w zugleich unendlich. Und dies muss immer geschehen, wenn wir von irgend einer beliebigen Coordinaten-Bestimmung zu einer andern Coordinaten-Bestimmung vermittelst linearer Verwandlungs-Formeln übergehen wollen. Nur in diesem Falle wird bei der Veränderung des Coordinaten-Systems (ich nehme dies Wort in seiner allgemeinen Bedeutung) derselbe geometrische Ort immer durch eine Gleichung

In diesen Ausdrücken für v und w bezeichnen m, n, p, m, n′, p′, q, r und s unbestimmte Coefficienten, die von der Lage des neuen Systems in Beziehung auf das ursprüngliche abhängen, also Functionen der beiden Winkel φ und ψ sind. Um diese Coefficienten, von denen wir einen beliebigen beliebig annehmen können, zu bestimmen, wollen wir, da die letzten Gleichungen auf alle Fälle sich beziehen müssen, specielle Lagen von geraden Linien näher betrachten.

Für die erste neue Axe ist:

$$v = \frac{sin\varphi}{sin\psi}, \qquad \upsilon = 0, \qquad w = \varpi = 0;$$

hiernach geben die beiden Gleichungen (5):

$$\frac{sin\varphi}{sin\psi} = \frac{m}{q}, \tag{6}$$

$$0 = m'. \tag{7}$$

Für die zweite neue Axe ist:

$$v = \frac{sin\varphi'}{sin\psi'}, \qquad \upsilon = \infty, \qquad w = \varpi = 0;$$

hiernach geben die beiden Gleichungen (5):

$$\frac{sin\varphi'}{sin\psi'} = \frac{n}{r}, \tag{8}$$

$$0 = n'. \tag{9}$$

Für die erste ursprüngliche Axe ist:

$$v = 0, \qquad \upsilon = \frac{sin\varphi}{sin\varphi'}, \qquad w = \varpi = 0,$$

für die zweite ursprüngliche Axe

$$v = \infty, \qquad \upsilon = \frac{sin\psi}{sin\psi'}, \qquad w = \varpi = 0,$$

in diesen beiden Fällen gibt die erste der Gleichungen (5):

$$0 = m+n\frac{sin\varphi}{sin\varphi'}, \tag{10}$$

$$0 = q+r\frac{sin\psi}{sin\psi'}; \tag{11}$$

Der oben schon gemachten Bemerkung gemäss, wollen wir

$$q = sin\psi$$

---

von demselben Grade dargestellt und nur dann wird, im Allgemeinen, die Coordinaten-Annahme den Vortheil einer leichten Discussion der Eigenschaften geometrischer Oerter gewähren. In der eben gemachten Bemerkung liegt ein Criterium für die Wahl eines solchen Coordinaten-Systems. Wenn wir z. B. statt eine gerade Linie durch die reciproken Werthe der Abstände ihrer Durchschnittspuncte mit der zweiten und ersten Axe vom Anfangspuncte zu bestimmen, dieselbe durch diese Abstände selbst bestimmten, und diese Abstände, die wir q und p nennen wollen, als Coordinaten dieser Linie betrachteten, und dann die Coordinaten-Axe um den Anfangspunct sich drehen liessen und die analogen Coordinaten der Linie in Beziehung auf die neuen Axen durch q′ und p′ bezeichneten: so würde, bei endlichen Werthen von q′ und p′, wenn die bezügliche gerade Linie der ersten ursprünglichen Axe parallel wäre, p unendlich werden, nicht aber q; und wenn die bezügliche gerade Linie der zweiten ursprünglichen Axe parallel wäre, würde q unendlich werden, nicht aber p. Wir sehen hieraus, dass p und q nicht so geeignet sind, als Coordinaten von geraden Linien genommen zu werden, als ihre reciproken Werthe, wenn wir auch auf den ersten Blick geneigt sein sollten, ihnen den Vorzug zu geben.

setzen, alsdann geben die beiden Gleichungen (6) und (11):

$$m = \sin\varphi, \qquad r = -\sin\psi',$$

und hiernach geben die Gleichungen (8) und (10) übereinstimmend:

$$n = -\sin\varphi'.$$

Die Gleichung (10) zeigt überdiess, dass

$$p = 0,$$

und die Gleichung (11), dass

$$s = 0.$$

Hiernach bleibt bloss noch der Coefficient p' zu bestimmen übrig. Wir können denselben auf eine einfache Weise bestimmen, wenn wir irgend eine, der ersten neuen Axe parallele, gerade Linie betrachten. Wir kommen dazu aber auch durch folgende Betrachtung. Wenn wir nur die erste Axe um irgend einen Winkel φ sich drehen lassen, die zweite Axe aber nicht, so ist $w = \varpi$. Es ist alsdann aber auch

$$q = \sin\psi = -\sin\xi, \qquad r = -\sin\psi' = 0,$$

und da überdies:

$$m' = n' = s = 0,$$

so gibt die zweite der Gleichungen (5):

$$w = -\frac{p'\varpi}{\sin\xi},$$

mithin:

$$p' = -\sin\xi.$$

Fassen wir endlich die letzten Resultate zusammen, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{\sin\varphi - v\sin\varphi'}{\sin\psi - v\sin\psi'}, \\ w &= \frac{-\varpi\sin\xi}{\sin\psi - v\sin\psi'}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Wir hätten die Form dieser Ausdrücke wiederum voraussehen können, denn

$$\sin\psi - v\sin\psi' = 0$$

ist die Gleichung eines Punctes, der auf der zweiten ursprünglichen Axe, oder, was dasselbe heisst, auf einer beliebigen, ihr parallelen, geraden Linie, unendlich weit liegt. Für solche Linien, die durch diesen Punct gehen (jener Axe parallel sind), und nur für solche Linien, ist v sowol als w unendlich. v ist Null nur für solche gerade Linien, die durch den Punct:

$$\sin\varphi - v\sin\varphi' = 0,$$

der auf der ersten Axe unendlich weit entfernt liegt, gehen und w verschwindet nur und immer für solche gerade Linien, die durch den Anfangspunct gehen, zugleich mit ϖ.

Wenn wir, umgekehrt, v und ϖ durch v und w ausdrücken wollen, so ist klar, dass v sowol als ϖ beide nur für solche gerade Linien unendlich werden, die durch den auf der zweiten neuen Axe unendlich weit liegenden Punct:

$$\sin\varphi' - v\sin\psi' = 0,$$

gehen, oder, mit andern Worten, der eben genannten Axe parallel sind: den ersten Theil der vorstehenden Gleichung können wir also für den gemeinschaftlichen Nenner der Ausdrücke von v und ϖ nehmen. Ferner verschwindet v nur, wenn

$$\sin\varphi - v\sin\psi = 0,$$

und ϖ verschwindet mit w. Hiernach bestimmt sich die Form der Zähler in den gesuchten Ausdrücken von v und ϖ und wir erhalten:

$$\varrho = c.\,\frac{sin\varphi - v\,sin\psi}{sin\varphi' - v\,sin\psi'},$$
$$\varpi = c'.\,\frac{w}{sin\varphi' - v\,sin\psi'}. \qquad (13)$$

c und c′ sind zwei leicht zu bestimmende constante Grössen; man erhält nemlich:

$$c = 1, \qquad c' = sin\vartheta.$$

Dieselben beiden Ausdrücke für ϱ und ϖ hätten wir durch Buchstaben-Vertauschung aus den Gleichungen (12) herleiten können.

Wenn das neue Coordinaten-System, zu dem wir übergehen, ein rechtwinkliges ist, so haben wir:

$$\xi = \varphi' - \varphi = \psi' - \psi = \tfrac{1}{2}\pi,$$

mithin:

$$sin\xi = 1, \quad sin\varphi' = cos\varphi, \quad sin\psi' = cos\psi.$$

Wenn das ursprüngliche Coordinaten-System ein rechtwinkliges ist, so ist:

$$\vartheta = \varphi' - \psi' = \varphi - \psi = \tfrac{1}{2}\pi,$$

mithin:

$$sin\vartheta = 1, \quad sin\psi' = -cos\varphi', \quad sin\psi = -cos\varphi.$$

Wenn wir endlich von einem rechtwinkligen Coordinaten-Systeme zu einem rechtwinkligen übergehen, so ist:

$$sin\varphi' = cos\varphi, \quad sin\psi = -cos\varphi, \quad sin\psi' = sin\varphi,$$
$$sin\vartheta = sin\xi = 1.$$

Nach diesen Bemerkungen erhalten wir aus den Gleichungen (12) und (13) folgende Zusammenstellung von Verwandlungs-Formeln, wenn wir wieder $\frac{v}{u}$, $\frac{\varrho}{u}$, $\frac{w}{u}$ und $\frac{\varpi}{u}$ an die Stelle von v, ϱ, w und ϖ schreiben:

1) Uebergang von einem schiefwinkligen Systeme zu einem schiefwinkligen und rückwärts:

$$(A)\begin{cases}\dfrac{v}{u} = \dfrac{u\,sin\varphi - \varrho\,sin\varphi'}{u\,sin\psi - \varrho\,sin\psi'},\\[2ex] \dfrac{w}{u} = \dfrac{-\varpi\,sin\xi}{u\,sin\psi - \varrho\,sin\psi'},\end{cases} \qquad \left.\begin{aligned}\dfrac{\varrho}{u} &= \dfrac{u\,sin\varphi - v\,sin\psi}{u\,sin\varphi' - v\,sin\psi'},\\[2ex] \dfrac{\varpi}{u} &= \dfrac{w\,sin\vartheta}{u\,sin\varphi' - v\,sin\psi'}.\end{aligned}\right\}(A')$$

2) Uebergang von einem schiefwinkligen Systeme zu einem rechtwinkligen und rückwärts:

$$(B)\begin{cases}\dfrac{v}{u} = \dfrac{u\,sin\varphi - \varrho\,cos\varphi}{u\,sin\psi - \varrho\,cos\psi},\\[2ex] \dfrac{w}{u} = \dfrac{-\varpi}{u\,sin\psi - \varrho\,cos\psi};\end{cases} \qquad \left.\begin{aligned}\dfrac{\varrho}{u} &= \dfrac{u\,sin\varphi - v\,sin\psi}{u\,cos\varphi - v\,cos\psi},\\[2ex] \dfrac{\varpi}{u} &= \dfrac{w\,sin\vartheta}{u\,cos\varphi - v\,cos\psi}.\end{aligned}\right\}(B')$$

3) Uebergang von einem rechtwinkligen Systeme zu einem schiefwinkligen und rückwärts:

$$(C)\begin{cases}\dfrac{v}{u} = -\dfrac{u\,sin\varphi - \varrho\,sin\varphi'}{u\,cos\varphi - \varrho\,cos\varphi'},\\[2ex] \dfrac{w}{u} = \dfrac{\varpi\,sin\xi}{u\,cos\varphi - \varrho\,cos\varphi'};\end{cases} \qquad \left.\begin{aligned}\dfrac{\varrho}{u} &= \dfrac{u\,sin\varphi + v\,cos}{u\,sin\varphi' + v\,cos\varphi'},\\[2ex] \dfrac{\varpi}{u} &= \dfrac{w}{u\,sin\varphi' + v\,cos\varphi'}.\end{aligned}\right\}(C')$$

4) Uebergang von einem rechtwinkligen Systeme zu einem rechtwinkligen und rückwärts:

$$(D)\begin{cases}\dfrac{v}{u} = -\dfrac{u\,sin\varphi - \varrho\,cos\varphi}{u\,cos\varphi + \varrho\,sin\varphi},\\[2ex] \dfrac{w}{u} = \dfrac{\varpi}{u\,cos\varphi + \varrho\,sin\varphi};\end{cases} \qquad \left.\begin{aligned}\dfrac{\varrho}{u} &= \dfrac{u\,sin\varphi + v\,cos\varphi}{u\,cos\varphi - v\,sin\varphi},\\[2ex] \dfrac{\varpi}{u} &= \dfrac{w}{u\,cos\varphi - v\,sin\varphi}.\end{aligned}\right\}(D')$$

Wenn wir zweitens $\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{w}}$ und $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{w}}$, $\frac{u}{w}$ und $\frac{v}{w}$ als die eigentlichen veränderlichen Grössen betrachten, so erhalten wir für diese Coordinaten aus den eben zusammengestellten Gleichungen die nachstehenden Verwandlungs-Formeln:

1) Uebergang von einem schiefwinkligen Systeme zu einem schiefwinkligen und rückwärts:

$$(E)\begin{cases}\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{w}} = -\frac{u\sin\psi - v\sin\psi'}{w\sin\xi}, \\ \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{w}} = -\frac{u\sin\varphi - v\sin\varphi'}{w\sin\xi};\end{cases} \qquad \begin{rcases}\frac{u}{w} = \frac{\mathrm{u}\sin\varphi' - \mathrm{v}\sin\psi'}{\mathrm{w}\sin\vartheta}, \\ \frac{v}{w} = \frac{\mathrm{u}\sin\varphi - \mathrm{v}\sin\psi}{\mathrm{w}\sin\vartheta}.\end{rcases}(E')$$

2) Uebergang von einem schiefwinkligen Systeme zu einem rechtwinkligen und rückwärts:

$$(F)\begin{cases}\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{w}} = -\frac{u\sin\psi - v\cos\psi}{w}, \\ \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{w}} = -\frac{u\sin\varphi - v\cos\varphi}{w};\end{cases} \qquad \begin{rcases}\frac{u}{w} = \frac{\mathrm{u}\cos\varphi - \mathrm{v}\cos\psi}{\mathrm{w}\sin\vartheta}, \\ \frac{v}{w} = \frac{\mathrm{u}\sin\varphi - \mathrm{v}\sin\psi}{\mathrm{w}\sin\vartheta}.\end{rcases}(F')$$

3) Uebergang von einem rechtwinkligen Systeme zu einem schiefwinkligen und rückwärts:

$$(G)\begin{cases}\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{w}} = \frac{u\cos\varphi - v\cos\varphi'}{w\sin\xi}, \\ \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{w}} = -\frac{u\sin\varphi - v\sin\varphi'}{w\sin\xi};\end{cases} \qquad \begin{rcases}\frac{u}{w} = \frac{\mathrm{u}\sin\varphi' + \mathrm{v}\cos\varphi'}{\mathrm{w}}, \\ \frac{v}{w} = \frac{\mathrm{u}\sin\varphi + \mathrm{v}\cos\varphi}{\mathrm{w}}.\end{rcases}(G')$$

4) Uebergang von einem rechtwinkligen Systeme zu einem rechtwinkligen und rückwärts:

$$(H)\begin{cases}\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{w}} = \frac{u\cos\varphi + v\sin\varphi}{w}, \\ \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{w}} = -\frac{u\sin\varphi - v\cos\varphi}{w};\end{cases} \qquad \begin{rcases}\frac{u}{w} = \frac{\mathrm{u}\cos\varphi - \mathrm{v}\sin\varphi}{\mathrm{w}}, \\ \frac{v}{w} = \frac{\mathrm{u}\sin\varphi + \mathrm{v}\cos\varphi}{\mathrm{w}}.\end{rcases}(H')$$

Gleichzeitige Verlegung des Anfangspunctes und Aenderung der Axen-Richtung.

453. Da sich $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}$ und $\frac{v}{u}$, oder v und v, wenn wir u und u gleich Eins setzen, nicht ändern, wenn wir bloss den Anfangspunct der Coordinaten verlegen, so bestehen die ersten der Gleichungen (A), (B), (C), (D), (A′), (B′), (C′) und (D′) auch für den allgemeinen Fall, wo wir zugleich Anfangspunct und Axen-Richtung anders bestimmen.

Um für denselben allgemeinen Fall auch w durch die neuen Coordinaten auszudrücken, wollen wir zuerst den Anfangspunct der Coordinaten verlegen. Alsdann erhalten wir nach der 450. Nummer:

$$\mathrm{w} = \mathrm{W} - \mathrm{V}x' - y',$$

wenn die Coordinaten W und V sich auf das, auf diese Weise hervorgehende, System beziehen, und (y', x') der neue Anfangspunct ist. Dann wollen wir ferner die beiden Axen um den neuen Anfangspunct sich drehen lassen. Wir erhalten alsdann, bei derselben Winkelbezeichnung als vorher:

$$\begin{rcases}\mathrm{V} = \frac{u\sin\varphi - v\sin\varphi'}{u\sin\psi - v\sin\psi'}, \\ \mathrm{W} = \frac{-w\sin\xi}{u\sin\psi - v\sin\psi'},\end{rcases}(A')$$

und hiernach:

$$\mathrm{w} = -\frac{u(y'\sin\psi + x'\sin\varphi) - v(y'\sin\psi' + x'\sin\varphi') + w\sin\xi}{u\sin\psi - v\sin\psi'}.$$

Um, umgekehrt, $\frac{w}{u}$ durch die ursprünglichen Coordinaten zu erhalten, brauchen wir nur in der zweiten der beiden Gleichungen (A') u gleich Eins zu setzen und für w zu schreiben: w+vx'+y', alsdann ergibt sich sogleich:

$$\frac{w}{u} = \frac{(y'+vx'+w)\sin\vartheta}{\sin\varphi'-v\sin\psi'}.$$

Die Form der Zähler in den Ausdrücken von w und $\frac{w}{u}$ wird dadurch bedingt, dass diese Ausdrücke verschwinden, wenn die bezüglichen geraden Linien einmal durch den ursprünglichen, das andere Mal durch den neuen Anfangspunct gehen. Die Coordinaten, y und x, des ursprünglichen Anfangspunctes, bezogen auf das neue System, sind (90 (3)):

$$y = \frac{y'\sin\psi+x'\sin\varphi}{\sin\xi}, \qquad x' = -\frac{y'\sin\psi'+x'\sin\varphi'}{\sin\xi};$$

mithin ist die Gleichung desselben:

$$u(y'\sin\psi+x'\sin\varphi)-v(y'\sin\psi'+x'\sin\varphi')+w\sin\xi = 0.$$

Der erste Theil dieser Gleichung muss also im Zähler des Ausdruckes für w vorkommen. Auf ähnliche Weise erscheint der erste Theil der Gleichung:

$$y'+vx'+w = 0,$$

die den neuen Anfangspunct darstellt, als Factor im Zähler des Ausdruckes von $\frac{w}{u}$.

Ich halte es für überflüssig, die Verwandlungs-Formeln für den allgemeinsten Fall, dass Axen-Richtung und Anfangspunct zugleich sich ändern, hier zusammenzustellen. Wir werden in dem Folgenden die beiden partiellen Umformungen jede für sich betrachten. —

Wir hätten auch alle die vorstehenden Entwicklungen an die Verwandlung der Punct-Coordinaten anschliessen können. Ich zog aber für jetzt vor, dieselben selbstständig für sich hinzustellen.

Zweiter Abschnitt.

Zur Theorie der Oerter zweiter Classe.

454. Jeder geometrische Ort, der durch eine homogene Gleichung des zweiten Grades zwischen den drei veränderlichen Grössen u, v und w, die Linien-Coordinaten bedeuten, dargestellt wird, nennen wir einen geometrischen Ort zweiter Classe. Für die allgemeine Gleichung der Oerter dieser Classe wollen wir folgende nehmen:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0.$$

In dieser Gleichung können wir jede der drei Coordinaten als constante Grösse betrachten und etwa gleich Eins setzen. Alsdann erhalten wir aus der vorstehenden Gleichung die vollständige Gleichung des zweiten Grades zwischen den beiden übrigbleibenden Coordinaten, die alsdann, so wie die Quotienten je zweier der drei Coordinaten in dem frühern Falle, für eine bestimmte gerade Linie bestimmte Werthe erhalten. Die Gleichungen, welche wir auf diese Weise erhalten, sind eben so allgemein als die vorstehende, und eine sólche Gleichung irgend eines Ortes zwischen zwei veränderlichen Grössen können wir, wenn wir für spätere Entwicklungen Symmetrie bezwecken, durch Einführung der dritten veränderlichen Grösse sogleich homogen machen.

Wir haben den Factor 2, da wo er in der vorigen Gleichung vorkommt, lediglich nur, um in den folgenden Entwicklungen Brüche zu vermeiden, hinzugefügt. Einen der sechs Coefficienten dieser Gleichung können wir beliebig annehmen und etwa gleich Eins setzen; um aber für diesen Coefficienten, je nach den verschiedenen Absichten, jeden beliebigen nehmen zu können, behalten wir einstweilen alle sechs Coefficienten bei.

Diese sechs Coefficienten und ihre gegenseitige Beziehung zu einander sind zum Theil von der Natur des dargestellten geometrischen Ortes, zum Theil von der Annahme des Coordinaten-Systems abhängig. Durch schickliche Umformung der Coordinaten können wir der allgemeinen Gleichung die möglichst einfache Form geben und aus dieser möglichst einfachen Form die Natur der Curve am besten erkennen. Zugleich werden wir auf diese Weise alle besondern Arten von geometrischen Oertern, die durch die allgemeine Gleichung bei verschiedener Annahme der Constanten dargestellt werden, am leichtesten unterscheiden können.

Die characteristische Eigenschaft der Curven zweiter Classe, welche die unmittelbarste Folge daraus ist, dass solche Curven, der Definition gemäss, durch Gleichungen des zweiten Grades dargestellt werden, besteht darin, dass man, von jedem beliebigen Puncte aus, zwei und nur zwei Tangenten an dieselben legen kann. Denn, wenn wir zwischen der allgemeinen Gleichung (1) und der allgemeinen Gleichung des Punctes:

$$au+bv+cw = o,$$

etwa die Werthe von $\frac{v}{u}$ und $\frac{w}{u}$ eliminiren, so erhalten wir eine zwiefache Bestimmung derselben, und also zwei gerade Linien, die, weil jene Werthe beide Gleichungen befriedigen, einerseits die Curve berühren und andrerseits durch den Punct gehen. Es versteht sich von selbst, dass diese beiden geraden Linien zusammenfallen und imaginär werden können.

§ 1.

Verlegung des Anfangs-Punctes der Coordinaten. Discussion aller einzelnen Fälle, welche die allgemeine Gleichung umfasst. Brennpuncte.

455. Indem wir u gleich Eins setzen, erhalten wir für die allgemeine Gleichung der Oerter zweiter Classe folgende:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Dw+2Ev+F = o. \qquad (1)$$

Wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten in irgend einen Punct (y', x'), über den wir im Voraus durchaus keine nähere Bestimmung machen, verlegen, so bleibt in der vorstehenden Gleichung v unverändert, statt w müssen wir aber (450):

$$w-vx'-y',$$

in dieselbe substituiren. Diese Gleichung verwandelt sich hiernach in folgende:

$$Aw^2+2(B-Ax')vw+(C-2Bx'+Ax'^2)v^2+2(D-Ax')w$$
$$+2(E-Dx'-By'+Ax'y')v+(F-2Dy'+Ay'^2) = o. \qquad (2)$$

Bei einer schicklichen Bestimmung des neuen Anfangspunctes der Coordinaten können wir immer, wenn nur nicht A gleich Null ist, aus der letzten Gleichung die mit w und vw behafteten Glieder ausfallen lassen. Wir brauchen zu diesem Ende nur:

$$x' = \frac{B}{A}, \qquad y' = \frac{D}{A} \qquad (3)$$

zu setzen. Alsdann geht die Gleichung (2), wenn wir zugleich mit A multipliciren, in folgende über:

$$A^2w^2+(AC-B^2)v^2+2(AE-BD)v+(AF-D^2) = o. \qquad (4)$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, dass jedem beliebigen Werthe von v zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe von w entsprechen. Wenn wir also nach einander n beliebige Werthe für v annehmen und die bezüglichen geraden Linien construiren, so erhalten wir ein, der durch die Gleichung (2) dargestellten Curve umschriebenes, (2n)Eck, das den neuen Anfangspunct zum Mittelpuncte hat und dessen Diagonalen sich also auch in diesem Puncte gegenseitig halbiren. Wenn wir n immer mehr wachsen lassen, so nähert sich das Polygon der Curve immer mehr: der neue Anfangspunct (y', x') ist auch der Mittelpunct der Curve. Jede von der Curve begränzte gerade Linie, die durch

diesen Punct geht, jeder Durchmesser der Curve, wird in diesem Puncte halbirt. Durch die Gleichung (3) sind die Coördinaten-Werthe des Mittelpunctes des, durch die Gleichung (1) dargestellten, geometrischen Ortes bestimmt, und für die Gleichung dieses Punctes erhalten wir hiernach (406):

$$Aw+Bv+Du = o.$$

456. Wir wollen uns nun zur Discussion der Gleichung (4) zurückwenden. Wir erhalten unmittelbar aus dieser Gleichung:

$$w^2 = -\frac{AC-B^2}{A^2}\left\{v^2+2\frac{AE-BD}{AC-B^2}v+\frac{AF-D^2}{AC-B^2}\right\}. \qquad (5)$$

Nun sind folgende drei Haupt-Fälle möglich, die wir näher untersuchen müssen; es kann der Werth von w, den die letzte Gleichung gibt, 1° für jeden Werth von v reell 2° für gewisse Werthe von v reell, für andere imaginär, 3° für alle Werthe von v imaginär sein.

Der in der Klammer befindliche Ausdruck bleibt, was aus der Theorie der Gleichungen bekannt ist, immer positiv, welche Werthe wir auch für v annehmen mögen, wenn die Gleichung:

$$v^2+2\frac{AE-BD}{AC-B^2}v+\frac{AF-D^2}{AC-B^2} = o, \qquad (6)$$

imaginäre Wurzeln hat. Die Wurzeln dieser Gleichung sind aber:

$$-\frac{AE-BD\pm\sqrt{\{(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)\}}}{AC-B^2}, \qquad (7)$$

und diese Wurzeln sind imaginär, wenn:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) < o. \qquad (8)$$

In diesem Falle hängt also die Realität von w einzig vom Zeichen des Werthes von $(AC-B^2)$ ab. Wenn

$$AC-B^2 > o,$$

so ist w^2 immer negativ, und also w immer imaginär. Die durch die gegebene Gleichung (1) dargestellte Curve hat also in diesem Falle keine einzige reelle Tangente: die Curve selbst ist imaginär.

Wenn wir statt des letzten Ausdruckes folgenden haben:

$$AC-B^2 < o,$$

so bleibt w^2 immer positiv und also w immer reell. Die Curve ist also, da ihre Tangenten alle möglichen Richtungen annehmen können, und keine derselben durch den neuen Anfangspunct geht, eine in sich geschlossene Curve, und heisst Ellipse.

457. Wenn die Wurzeln der Gleichung (6) reell sind, so ist:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) > o. \qquad (9)$$

Findet diese Bedingung Statt, so gibt es zwei Werthe von v, für welche w gleich Null wird. Die bezüglichen geraden Linien gehen durch den Anfangspunct, den Mittelpunct der Curve. Bezeichnen wir diese Werthe von v durch v' und v'', so kommt:

$$w^2 = -\frac{AC-B^2}{A^2}\{(v-v')(v-v'')\}.$$

Wenn

$$AC-B^2 > o,$$

so sind die Werthe von w dann reell, wenn die Werthe von v zwischen v' und v'' angenommen werden; sonst imaginär. Wenn hingegen

$$AC-B^2 < o,$$

so wird w dann imaginär, wenn v zwischen v′ und v″ angenommen wird, und ist reell, wenn v entweder grösser als v′ und v″, oder kleiner als v′ und v″ bestimmt wird. Die durch die Gleichung (1) in den zuletzt betrachteten Fällen dargestellte Curve heisst Hyperbel, jene beiden durch v′ und v″ bestimmten geraden Linien ihre Asymptoten. Man kann leicht, ohne vorzugreifen, bloss aus der geometrischen auf das Bisherige fussenden Betrachtung den Lauf der Curve nachweisen und insbesondere zeigen, dass die Berührungspuncte auf den Asymptoten unendlich weit liegen. Ohne hierauf einzugehen, bemerken wir bloss, dass die aus zwei gesonderten Zweigen bestehende Curve in dem einen oder dem andern Paare der von den beiden Asymptoten gebildeten Scheitelwinkel liegt, je nachdem der Ausdruck $(AC-B^2)$ positiv oder negativ ist.

458. Wenn endlich die Wurzeln der Gleichung (6) einander gleich sind; so kommt:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) = 0, \qquad (10)$$

und die Wurzeln selbst werden gleich:

$$-\frac{AE-BD}{AC-B^2}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck, der Kürze halber, gleich v‴, so kommt:

$$w^2 = -\frac{AC-B^2}{A^2}(v-v''')^2. \qquad (11)$$

Diese Gleichung gibt für w immer reelle Wurzeln, wie wir auch v annehmen mögen, wenn:

$$AC-B^2 < 0;$$

wenn hingegen:

$$AC-B^2 > 0,$$

so sind die Wurzeln immer imaginär, ausgenommen wenn

$$v = v''' = -\frac{AE-BD}{AC-B^2}.$$

Wir können der Gleichung (1) folgende Form geben:

$$\left\{w-\sqrt{B^2-AC}.\ \frac{v-v'''}{A}\right\}\left\{w+\sqrt{B^2-AC}.\ \frac{v-v'''}{A}\right\} = 0,$$

und dieselbe also in folgende zwei Gleichungen des ersten Grades auflösen:

$$w = \sqrt{B^2-AC}.\ \frac{v-v'''}{A},$$

$$w = -\sqrt{B^2-AC}.\ \frac{v-v'''}{A}.$$

Die gegebene Gleichung (1) stellt also in diesem Falle zwei Puncte dar, die je nachdem der Ausdruck $(AC-B^2)$ negativ oder positiv ist, reell oder imaginär sind.

Wenn wir die beiden letzten Gleichungen addiren, so ergibt sich:

$$w = 0,$$

d. h. (410) der Anfangspunct liegt in der Mitte zwischen den beiden durch die gegebene Gleichung (1) dargestellten Puncte; wir können diesen Punct also immer noch als Mittelpunct betrachten.

Diejenige gerade Linie, welche die beiden durch die gegebene Gleichung dargestellten Puncte verbindet, hat zu einer ihrer Coordinaten:

$$v''' = -\frac{AE-BD}{AC-B^2}. \qquad (12)$$

Substituiren wir diesen Werth für v in die Gleichung des neuen Anfangspunctes, durch den die in Rede stehende gerade Linie geht, also in folgende Gleichung:

$$Aw+Bv+D = o,$$

so ergibt sich für die andere Coordinate, die wir durch w''' bezeichnen wollen:

$$w''' = \frac{BE-CD}{AC-B^2}. \qquad (13)$$

In dem Falle, dass die beiden, durch die gegebene Gleichung dargestellten, Puncte imaginär sind, können wir immer noch sagen, dass diese beiden Puncte auf der reellen geraden Linie (w''', v''') liegen. Wir können aber auch in diesem Falle von jenen beiden imaginären Puncten ganz abstrahiren, und sagen, dass die gegebene Gleichung eine einzige gerade Linie darstelle; weil es keine andern reellen Werthe für w und v gibt, durch welche diese Gleichung befriedigt wird, als w''' und v'''.

Die durch die allgemeine Gleichung dargestellten beiden Puncte sind, wenn wir die Mitte zwischen diesen beiden Puncten zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen, und demnach B = D = o setzen, jeder für sich allein durch folgende beiden, in eine einzige zusammengezogenen, Gleichungen gegeben:

$$Aw\mp\sqrt{-AC}.\ \ v\mp\sqrt{-AC}.\ \ v'''u = o.$$

Da in diesem Falle die Bedingungs-Gleichung (10) auf folgende sich reducirt:

$$E^2-CF = o,$$

und man überdiess:

$$v''' = -\frac{E}{C}$$

erhält, so gehen die Gleichungen der beiden Puncte in folgende über:

$$w\mp\sqrt{\left(-\frac{C}{A}\right)}.\ \ v\mp\sqrt{\left(-\frac{F}{A}\right)}.\ \ u = o.$$

Die Coordinaten dieser beiden Puncte sind also:

$$y = \mp\sqrt{\left(-\frac{F}{A}\right)}, \qquad x = \mp\sqrt{\left(-\frac{C}{A}\right)}.$$

und hiernach ist das Quadrat ihrer Entfernung gleich

$$\left(-\frac{C+F}{A}\right).$$

459. Wir haben bisher durchgehends denjenigen Fall noch unberücksichtigt gelassen, wo

$$AC-B^2 = o. \qquad (14)$$

Zuerst wollen wir annehmen, es bestehe diese Gleichung neben der Bedingungs-Gleichung:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) = o; \qquad (10)$$

welche anzeigt, dass der erste Theil der gegebenen Gleichung (1) sich in zwei Factoren der ersten Grades zerlegen lässt, und reducire also diese Gleichung auf

$$(AE-BD)^2 = o,$$

aus der folgt, dass

$$AE-BD = o.$$

Unter diesen Bedingungen verwandelt sich die Gleichung (4) in folgende:

$$A^2w^2+(AF-D^2) = o.$$

Diese Gleichung zeigt, dass in diesem Falle die beiden, durch die gegebene Gleichung (1) dargestellten Puncte auf der neuen zweiten Axe, also auf einer, der ursprüng-

lichen zweiten Axe parallelen geraden Linie, liegen, und beide reell oder imaginär sind, je nachdem

$$AF-D^2 < o,$$

oder

$$AF-D^2 > o.$$

Für die gerade Linie, auf welcher diese beiden Puncte liegen, ergibt sich

$$-\frac{w}{v} = x' = \frac{B}{A}.$$

Wenn endlich:

$$AF-D^2 = o,$$

so verwandelt sich (4) in

$$w^2 = o:$$

die gegebene Gleichung (1) stellt alsdann zwei, in den neuen Anfangspunct $\left(\frac{D}{A}, \frac{B}{A}\right)$ zusammenfallende, Puncte dar.

460. Diese Resultate sind in Uebereinstimmung mit den Entwicklungen der 458. Nummer. Die beiden Gleichungen:

$$AC-B^2 = o, \qquad AE-BD = o,$$

bringen nemlich folgende dritte mit sich:

$$BE-CD = o;$$

und somit erscheinen die Ausdrücke für v''' und w''', d. h. für die Coordinaten derjenigen geraden Linie, welche die beiden in Rede stehenden Puncte verbindet, beide unter der Form $\frac{o}{o}$, und es kommt darauf an, die wahren Werthe dieser Ausdrücke zu erhalten. Man sieht sogleich aus der Form der Gleichung (10), dass, wenn wir $(AC-B^2)$ als eine kleine fast verschwindende Grösse betrachten, diese Grösse, so lange nicht auch $(AF-D^2)$ einen verschwindenden Werth erhält, nothwendig ein Kleines der zweiten Ordnung in Beziehung auf $(AE-BD)$ ist; und dann ist wiederum leicht ersichtlich, dass $(BE-CD)$ mit dem letzten Ausdrucke ein Kleines derselben Ordnung ist. Die wahren Gränzwerthe der beiden Ausdrücke:

$$v''' = \frac{AE-BD}{AC-B^2}, \qquad w''' = \frac{BE-CD}{AC-B^2},$$

sind also unendlich. Die bezügliche gerade Linie ist der zweiten Axe parallel. Für den Durchschnitt dieser Linie mit der ersten Axe erhalten wir:

$$\frac{w'''}{v'''} = \frac{BE-CD}{AE-BD},$$

einen Ausdruck, der wiederum unter der Form $\frac{o}{o}$ erscheint. Den wahren Werth desselben erhalten wir, wenn wir die Division des Nenners in den Zähler ausführen. Man hat nemlich:

$$\frac{BE-CD}{AE-BD} = \frac{B}{A} - \frac{A(AE-BD)}{AC-B^2},$$

und der letzte Theil dieser Gleichung reducirt sich, da sein zweites Glied verschwindet, auf $\frac{B}{A}$, in Uebereinstimmung mit der vorigen Nummer.

Wenn aber $(AF-D^2)$ zugleich mit $(AC-B^2)$ verschwindet, so erscheinen die Ausdrücke für v''', w''' und $\frac{w'''}{v'''}$ unter der Form $\frac{o}{o}$, die nicht mehr reducirbar ist: die gerade

Linie, welche durch die beiden in Rede stehenden (zusammenfallenden) Puncte geht, kann jede beliebige Richtung haben.

461. Es verwandelt sich ferner, wenn wir

$$AC-B^2 = 0$$

setzen, die Bedingung (9) in folgende:

$$(AE-BD)^2 > 0,$$

in eine Bedingung, die jedesmal erfüllt wird. In diesem Falle erhalten wir aus der Gleichung (6):

$$(AC-B^2)v^2+2(AE-BD)v+(AF-D^2) = 0,$$

deren Wurzeln die Richtung der beiden Asymptoten der Curve, die in diesem Falle immer eine Hyperbel ist, bestimmen,

$$v = \infty, \qquad v = -\tfrac{1}{2}\frac{AF-D^2}{AE-BD}.$$

Eine jener Asymptoten ist also der zweiten Axe parallel, und die Richtung der andern durch den zweiten Werth von v gegeben.

Wenn zugleich:

$$AF-D^2 = 0,$$

so ist der zweite Werth von v gleich Null. In diesem Falle sind also die beiden Asymptoten den beiden Axen parallel.

Hierher gehört insbesondere auch die Gleichung:

$$Aw^2+2Euv = 0,$$

die, weil in derselben überdiess keine mit vw und uw behafteten Glieder vorkommen, eine Hyperbel darstellt, deren Asymptoten die beiden Coordinaten-Axen selbst sind.

462. Endlich verwandelt sich die Bedingung (8), wenn wir

$$AC-B^2 = 0$$

setzen, in folgende:

$$(AE-BD)^2 < 0:$$

eine Bedingung, die niemals befriedigt werden kann, so lange die Coefficienten der gegebenen Gleichung reelle Grössen bleiben.

Um die vorstehenden beiden Bedingungen zu befriedigen, müssen D und E imaginär werden. Substituiren wir dem zufolge für diese Coefficienten $D\sqrt{-1}$ und $E\sqrt{-1}$, so zerfällt die gegebene Gleichung, die alsdann folgende wird:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+F+\{Dw+Ev\}\sqrt{-1} = 0,$$

von selbst in folgende:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+F = 0,$$
$$Dw+Ev = 0,$$

die beide zugleich befriedigt werden müssen. Wir erhalten also eine bestimmte Anzahl von geraden Linien, nemlich zwei, deren Coordinaten folgende sind:

$$v = \pm\sqrt{\left\{\frac{AE^2-2BDE+CD^2}{-FD^2}\right\}}, \qquad w = \pm\sqrt{\left\{\frac{AE^2-2BDE+CD^2}{-FE^2}\right\}}.\ *)$$

*) Auf ganz analoge Weise stellt die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen Punct-Coordinaten:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

wenn wir für γ und δ imaginäre Werthe nehmen, zwei einzelne Puncte dar.

463. Wenn wir, statt in der allgemeinen Gleichung u gleich Eins zu nehmen, v gleich Eins gesetzt hätten, so hätten wir statt (4) folgende Gleichung erhalten:

$$A^2w^2+(AF-D^2)u^2+2(AE-BD)u+(AC-B^2) = o,$$

und die Discussion dieser Gleichung ist der vorstehenden gleich, nur dass der Ausdruck $(AF-D^2)$ an die Stelle von $(AC-B^2)$, und die eine Coordinaten-Axe an die Stelle der andern tritt.

464. Es bleibt uns jetzt nur noch derjenige Fall zu discutiren übrig, den wir bisher unberücksichtigt gelassen haben, wo

$$A = o.$$

Wenn wir A allmählig verschwinden lassen, so ist ersichtlich, dass alsdann der Mittelpunct der durch die allgemeine Gleichung dargestellten Curve, nemlich der Punct $\left(\frac{D}{A}, \frac{B}{A}\right)$ sich immer weiter vom Anfangs-Puncte der Coordinaten entfernt: wir können sagen, es liege der Mittelpunct unendlich weit, wenn $A = o$. Die Gleichung dieses Punctes:

$$Aw+Bv+Du = o,$$

reducirt sich alsdann auf:

$$Bv+Du = o,$$

d. h. alle, durch diesen Punct gehende, gerade Linien, oder, mit andern Worten, alle Durchmesser der Curve, sind parallel und ihre Richtung ist gegeben durch

$$-\frac{v}{u} = \frac{D}{B}.$$

Aus der gegebenen allgemeinen Gleichung, die dem in Rede stehenden Falle entspricht:

$$2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = o, \qquad (1)$$

erhalten wir

$$w = -\tfrac{1}{2}\frac{Cv^2+2Euv+Fu^2}{Bv+Du}. \qquad (2)$$

Wir erhalten also für jeden Werth von $\frac{v}{u}$ im Allgemeinen einen einzigen und bestimmten Werth für $\frac{w}{u}$. Es ist sogleich ersichtlch, dass die bezügliche Curve eine nach einer Seite hin offene und, ins Unendliche hin, sich erstreckende ist. Diese Curve heisst Parabel.

Der Werth des letzten Ausdruckes für w wird unendlich, wenn v unendlich wird; ausserdem aber auch noch, wenn der Nenner desselben verschwindet, im Allgemeinen, wenn

$$Bv+Du = o:$$

die den Durchmessern der Curve parallelen Tangenten derselben liegen also unendlich weit.

465. Auch folgende einfache Gleichung:

$$Cv^2+2Duw = o$$

stellt, da in derselben w^2 nicht vorkommt, eine Parabel dar. Wenn wir in dieser Gleichung $w = o$ setzen, so kommt $v^2 = o$; die durch dieselbe dargestellte Parabel wird also von der ersten Axe berührt und zwar im Anfangspuncte der Coordinaten. Die Richtung der Durchmesser ist, da in der vorstehenden Gleichung das mit vw behaftete Glied fehlt, durch die Gleichung

$$u = o$$

gegeben: es sind diese Durchmesser also der zweiten Axe parallel.

Auf ganz analoge Weise ergibt sich, dass die Gleichung:

$$Fu^2+2Bvw = o;$$

eine Parabel darstellt, welche von der zweiten Axe im Anfangspuncte berührt wird, und deren Durchmesser der ersten Axe parallel sind.

466. Es gibt aber auch besondere Fälle, bei der Voraussetzung, dass w^2 in der gegebenen Gleichung nicht vorkommt, wo diese Gleichung keine Curve darstellt. Diesen Fällen entspricht die Bedingung, dass in dem Ausdrucke für w (2) der Zähler durch den Nenner ohne Rest theilbar ist. Soll diese Bedingung erfüllt werden, so muss, wenn wir denjenigen Werth von v, den wir durch Annullirung des Nenners erhalten, nemlich $\left(-\frac{D}{B}u\right)$, in den Zähler substituiren, dieser Zähler verschwinden. Hiernach ergibt sich sogleich für den in Rede stehenden Fall, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$CD^2-2BDE+FB^2 = 0. \qquad (3)$$

Wenn wir die Division des Nenners in den Zähler des Ausdruckes von w wirklich ausführen, so kommt:

$$w = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{C}{B}v+\frac{2EB-CD}{B^2}u\right)+\tfrac{1}{2}\frac{CD^2-2BDE+FB^2}{B^2(Bv+Du)}u^2.$$

Indem wir den Rest gleich Null setzen, erhalten wir dieselbe Bedingungs-Gleichung als eben, und für w ergibt sich, mit Berücksichtigung dieser Bedingungs-Gleichung:

$$w = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{C}{B}v+\frac{F}{D}u\right).$$

Die gegebene Gleichung verwandelt sich hiernach in folgende:

$$(Bv+Du)(2BDw+CDv+FBu) = 0,$$

und stellt also, wie ihre Form zeigt, das System folgender beiden Puncte dar:

$$Bv+Du = 0, \qquad (4)$$

$$2BDw+CDv+FBu = 0, \qquad (5)$$

von welchen der erstere unendlich weit liegt, und der zweite jeder beliebige sein kann. Die Coordinaten dieses zweiten Punctes sind:

$$y = \tfrac{1}{2}\frac{F}{D}, \qquad x = \tfrac{1}{2}\frac{C}{B}.$$

Für den in Rede stehenden Fall erscheint der Werth von w, der $v = -\frac{D}{B}u$ entspricht, unter der Form $\frac{0}{0}$; denn man hat:

$$w = \tfrac{1}{2}\frac{(Bv+Du)(CDv+FBu)}{BD(Bv+Du)}.$$

Jener Werth muss diese unbestimmte Form annehmen, weil die durch den einen, unendlich weit liegenden, Punct gehenden geraden Linien den beiden Axen in solchen Puncten begegnen, die unbestimmt bleiben. Lassen wir aber im Nenner und Zähler des vorstehenden Ausdrucks für w den Factor (Bv+Du), der sich auf diesen Punct bezieht, fort, wodurch wir die lineare Gleichung (5) erhalten, so finden wir:

$$\frac{w}{u} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{FB^2-CD^2}{B^2D}, \qquad \frac{w}{v} = -\frac{FB^2-CD^2}{BD^2},$$

für die Segmente, die auf den beiden Coordinaten-Axen von derjenigen geraden Linie abgeschnitten werden, welche durch den zweiten der beiden, durch die gegebene Gleichung (1) dargestellten, Puncte geht und die eben bezeichnete Richtung hat.

Wenn B und D zugleich Null sind, so werden die beiden letzten Ausdrücke für $\frac{w}{u}$ und $\frac{w}{v}$ unendlich. Auch der zweite Punct liegt unendlich weit. Die gege-

bene Gleichung reducirt sich in diesem Falle auf:

$$Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0,$$

und die beiden durch diese Gleichung dargestellten unendlich weit liegenden Puncte sind reell, fallen zusammen oder werden imaginär, je nachdem:

$$CF-E^2 < 0, \qquad CF-E^2 = 0, \qquad CF-E^2 > 0.$$

467. Wenn eine Curve durch die allgemeine Gleichung des zweiten Grades:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

dargestellt wird und wir den Anfangspunct in irgend einen Punct (y', x') verlegen, so wird dieselbe Curve durch folgende Gleichung dargestellt:

$$Aw^2+2(B-Ax')vw+(C-2Bx'+Ax'^2)v^2+2(D-Ay')uw$$
$$+2(E-Dx'-By'+Ay'x')uv+(F-2Dy'+Ay'^2)u^2 = 0. \qquad (1)$$

Wir haben in dem Frühern y' und x' so bestimmt, dass in dieser Gleichung die mit w in der ersten Potenz behafteten Glieder ausfielen, und daran die allgemeine Discussion der gegebenen Gleichung (den einen Fall, dass $A = 0$, ausgenommen) angeknüpft. Eine ganz analoge Discussion würden wir erhalten, wenn aus der umgeformten Gleichung diejenigen Glieder, die v oder u nur in der ersten Potenz enthalten, ausfielen. Dies geschieht aber, im Allgemeinen, durch keine Annahme von y' und x'. Denn setzen wir zum Beispiel:

$$\begin{aligned} B-Ax' &= 0, \\ E-Dx'-By'+Ax'y' &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

so reducirt sich die zweite dieser beiden Gleichungen, vermittelst der ersten, auf

$$E-Dx' = 0;$$

und, da die Coordinaten-Umformung, wenn y' unendlich wird, nicht Statt finden kann, können beide Gleichungen nur dann zugleich bestehen, wenn

$$AE-BD = 0.$$

Wir erhalten dieselbe Bedingungs-Gleichung, wenn wir annehmen, dass statt der ersten der beiden Gleichungen (2) die Gleichung

$$D-Ay' = 0,$$

zugleich mit der zweiten der Gleichungen (2) bestehen soll.

Die geometrische Bedeutung der Bedingungs-Gleichung (3) ergibt sich aus der Betrachtung der Gleichung (4) der 455. Nummer. Es findet dieselbe nemlich dann Statt, wenn zwei durch den Anfangspunct der Coordinaten den beiden Asymptoten der Curve parallel gezogene gerade Linien mit den beiden Coordinaten-Axen vier Harmonicalen bilden, oder, wie wir später sehen werden, wenn die beiden Axen zweien zugeordneten Durchmessern der Curve parallel sind.

Wir gehen in die durch das Vorstehende angedeutete Discussion nicht ein, weil sie sich nur auf einen besondern Fall bezieht.

468. Wir können aus der umgeformten Gleichung durch gehörige Bestimmung des neuen Anfangspunctes, im Allgemeinen, auch die mit v^2 und u^2 behafteten Glieder ausfallen lassen. Wir müssen zu diesem Ende x' und y' durch folgende beiden Gleichungen bestimmen:

$$\begin{aligned} Ax'^2-2Bx'+C &= 0, \\ Ay'^2-2Dy'+F &= 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Wir erhalten für die Möglichkeit dieser Umformung folgende Bedingungen:

$$AC-B^2 < 0, \qquad AF-D^2 < 0.$$

Für den Fall der Ellipse werden diese beiden Bedingungen immer erfüllt (456). Für den Fall der Hyperbel wird die erste Bedingung nur dann erfüllt, wenn die Curve Tangenten hat, die der ersten Axe parallel sind (457). Die zweite Bedingung bezieht sich auf eine ganz analoge Weise auf die Richtung der zweiten Axe. Die Gränzen für die Möglichkeit der in Rede stehenden Umformung sind dadurch bestimmt, dass die Coordinaten-Axen den Asymptoten parallel sind (461). Alsdann sind die gleichen Wurzeln der Gleichungen (4) die Werthe für die Coordinaten des Mittelpunctes der gegebenen Curve.

Dasselbe ergibt sich aus der Betrachtung der umgeformten Gleichung, welche, wenn y' und x' durch die Gleichungen (4) bestimmt werden, folgende Form annimmt:

$$Aw^2+2Bvw+2Duw+Euv = o.$$

Denn, setzen wir in dieser Gleichung nach einander $u = o$ und $v = o$, so erhalten wir beidesmal für w Werthe, von denen einer ebenfalls gleich Null ist. Es wird also die Curve von den beiden neuen Coordinaten-Axen berührt und die Wurzeln der beiden Gleichungen (4) bestimmen die Coordinaten der vier Winkelpuncte eines um die Curve beschriebenen Parallelogramms, dessen Seiten den beiden Coordinaten-Axen parallel sind.

Für den Fall der Parabel, wo $A = o$, reduciren sich die beiden Gleichungen (4) auf den ersten Grad und wir erhalten:

$$x' = \frac{C}{2B}, \qquad y' = \frac{F}{2D};$$

und hiernach verwandelt sich die umgeformte Gleichung (1) in folgende:

$$2B^2Dvw+2BD^2uw-(CD^2-2BDE+FB^2)uv = o.$$

Indem wir alle Glieder der vorstehenden Gleichung durch uvw dividiren, erhält dieselbe folgende Form:

$$\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}+\frac{w'}{w} = o,$$

indem wir, der Kürze und Symmetrie halber, die Coefficienten der letzten Gleichung durch u', v' und w' bezeichnen.

469. Wenn in der umgeformten Gleichung (1) bloss das mit uv behaftete Glied ausfallen soll, so können wir den Punct (y', x') beliebig auf der durch die Gleichung:

$$Ayx-By-Dx+E = o, \qquad (5)$$

dargestellten Curve annehmen. Es stellt diese Gleichung, der wir auch folgende Form geben können:

$$\left(x-\frac{B}{A}\right)\left(y-\frac{D}{A}\right) = \frac{BD-AE}{A^2}, \qquad (6)$$

eine Hyperbel dar, deren Mittelpunct, für welchen man (229):

$$y = \frac{D}{A}, \qquad x = \frac{B}{A},$$

erhält, mit dem Mittelpuncte der gegebenen Curve zusammenfällt und deren Asymptoten den Coordinaten-Axen parallel sind.

Wenn wir den Anfangspunct in irgend einen Punct dieser Curve verlegen, so hat also die umgeformte Gleichung folgende Form:

$$A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+F'u^2 = o,$$

und wir erhalten, wenn wir $w = o$ setzen, zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe für $\frac{v}{u}$. Es bilden mithin die beiden durch den neuen Anfangspunct gehenden Tangenten der

gegebenen Curve und die beiden neuen Axen ein System von vier Harmonicalen. In dem Falle also, dass die Axen sich unter rechten Winkeln schneiden, sind diejenigen beiden geraden Linien, welche die Scheitel-Winkel, die zwei von einem beliebigen Puncte der Hyperbel (5) an die gegebene Curve gelegte Tangenten mit einander bilden, halbiren, den beiden ursprünglichen Coordinaten-Axen parallel. Es folgt aus diesen geometrischen Betrachtungen, dass, wenn man um die gegebene Curve ein Parallelogramm beschreibt, dessen gegenüberliegende Seiten den beiden Coordinaten-Axen parallel sind, die in Rede stehende Hyperbel durch die vier Berührungs-Puncte auf den vier Seiten des Parallelogramms gehen muss. Wenn keine Tangenten der gegebenen Curve den beiden Coordinaten-Axen parallel sind, so wird sie von der Hyperbel (5) nicht geschnitten.

470. Die nachstehende Aufgabe:

Auf einer gegebenen geraden Linie einen Punct so zu bestimmen, dass die beiden von diesem Puncte an eine gegebene Curve zweiter Classe gelegten Tangenten mit einer zweiten gegebenen geraden Linie ein gleichschenkliches Dreieck bilden;
gestattet also, wenn nicht die beiden gegebenen geraden Linien parallel sind oder auf einander senkrecht stehen, im Allgemeinen eine doppelte Auflösung.

Wenn $E = 0$, so geht die durch (1) dargestellte Hyperbel durch den Anfangspunct der Coordinaten, was mit der 467. Nummer in Uebereinstimmung ist.

471. Die Gleichung (5) reducirt sich auf den ersten Grad, wenn $A = 0$ und also die gegebene Curve eine Parabel ist. Man erhält in diesem Falle:

$$By + Dx - E = 0. \qquad (7)$$

Die durch diese Gleichung dargestellte gerade Linie geht nothwendig durch diejenigen beiden Puncte, in welcher die gegebene Parabel von zwei den Coordinaten-Axen parallelen geraden Linien berührt wird, und ist also durch diese beiden Puncte vollkommen bestimmt. Hierin ist folgender Satz enthalten:

Wenn irgend eine gerade Linie eine gegebene Parabel in zwei Puncten schneidet und man in diesen beiden Puncten die beiden Tangenten construirt und ausserdem von irgend einem beliebigen Puncte der geraden Linie noch zwei Tangenten an die Parabel legt, so erhält man vier Tangenten, welche die Richtung von vier Harmonicalen haben.

Wenn die Coordinaten-Axen rechtwinklig sind, so geht die durch (7) dargestellte gerade Linie nach einem bekannten Satze durch den Brennpunct der Parabel (343). Um Umschreibungen zu vermeiden, knüpfen wir an diese Bemerkung die Aussage folgender Sätze, die unmittelbar aus dem vorstehenden Satze sich ergeben:

Wenn zwei Tangenten einer Parabel in irgend einem Puncte einer durch den Brennpunct derselben gehenden geraden Linie sich schneiden, so sind diejenigen beiden geraden Linien, welche die von denselben gebildeten Scheitel-Winkel halbiren, den beiden Tangenten in den Durchschnittspuncten der Parabel und der durch den Brennpunct derselben gehenden geraden Linie parallel.

Wenn man von irgend zwei Puncten, die mit dem Brennpuncte einer Parabel in gerader Linie liegen, zwei Tangenten-Paare an die Curve legt, so schneiden sich dieselben unter gleichen Winkeln.

472. Aus der umgeformten Gleichung (1) fällt, wie wir oben gesehen haben, das mit uv behaftete Glied aus, wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten in irgend einen

beliebigen Punct der durch die Gleichung (5) dargestellten Hyperbel verlegen. Jene umgeformte Gleichung, die wir, der Kürze halber, auf folgende Weise schreiben wollen:

$$Aw^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+F'u^2=0,$$

können wir alsdann auch auf folgende Form bringen:

$$C'(v+\frac{B'}{C'}w)^2+F'(u+\frac{D'}{F'}w)^2=\left(\frac{B'^2}{C'}+\frac{D'^2}{F'}-A\right)w^2. \qquad (8)$$

Der neue Anfangspunct der Coordinaten, der beliebig auf der durch (5) dargestellten Hyperbel angenommen worden ist, kann zugleich auch noch auf einer zweiten gegebenen Curve liegen. Wir erhalten eine solche Curve, wenn wir folgende Bedingung erfüllen wollen:

$$C'=F'.$$

Denn setzen wir für C' und F' ihre Werthe, so ergibt sich:

$$C-2Bx+Ax^2=F-2Dy+Ay^2, \qquad (9)$$

wenn wir die Accente von y und x fortlassen. Wenn wir dieser Gleichung folgende Form geben:

$$\left(y-\frac{D}{A}\right)^2-\left(x-\frac{B}{A}\right)^2=\frac{(C-F)A-(B^2-D^2)}{A^2}, \qquad (10)$$

so ist sogleich ersichtlich, dass, wenn wir y und x als veränderlich betrachten, die bezügliche Curve eine Hyperbel ist, deren Mittelpunct mit dem Mittelpuncte des gegebenen Ortes zweiter Classe zusammenfällt, und deren irgend zwei zugeordnete Durchmesser den Coordinaten-Axen parallel sind.

Wir können also durch blosse Verlegung des Anfangspunctes der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe, indem wir w gleich der Einheit nehmen, und in (8):

$$\frac{B'}{C'}=-v', \qquad \frac{D'}{F'}=-u',$$

$$\frac{1}{C'}\left(\frac{B'^2}{C'}+\frac{D'^2}{F'}-A\right)=\frac{B'^2+D'^2-AC'}{C'^2}=M,$$

setzen, folgende Form geben:

$$(v-v')^2+(u-u')^2=M:$$

also die Form der auf rechtwinklige Coordinaten-Axen bezogenen allgemeinen Kreis-Gleichung. Der neue Anfangspunct, der dadurch gegeben ist, dass er in einem der Durchschnitte zweier Hyperbeln (6) und (10) liegt, deren beider Mittelpunct mit dem Mittelpuncte des gegebenen Ortes zusammenfällt, und von denen die eine zwei den Coordinaten-Axen parallele gerade Linien zu Asymptoten, die andere zu zugeordneten Durchmessern hat, kann immer auf doppelte Weise bestimmt werden.

473. Um die Coordinaten des neuen Anfangspunctes zu bestimmen, müssen wir aus den Gleichungen (6) und (10) die Werthe von y und x ziehen. Setzen wir zu diesem Ende:

$$y-\frac{D}{A}=y'', \qquad x-\frac{B}{A}=x'', \qquad (11)$$

d. h. verlegen wir den Anfangspunct in den Mittelpunct der gegebenen Curve, so gehen die beiden angezogenen Gleichungen in folgende beiden über:

$$x''y''=\frac{BD-AE}{A^2},$$

$$y''^2-x''^2=\frac{(C-F)A-(B^2-D^2)}{A^2},$$

Wenn wir aus der ersten dieser beiden Gleichungen nach einander den Werth von y'' und x'' nehmen und ihn in die zweite Gleichung substituiren, so kommt:

$$y''^4 - \frac{(C-F)A-(B^2-D^2)}{A^2}y''^2 - \left(\frac{BD-AE}{A^2}\right)^2 = o,$$

$$x''^4 + \frac{(C-F)A-(B^2-D^2)}{A^2}x''^2 - \left(\frac{BD-AE}{A^2}\right)^2 = o.$$

Da das von y'' und x'' unabhängige Glied dieser beiden Gleichungen eine negative Grösse ist, so erhalten wir für y''^2 und x''^2 nothwendig zwei reelle Werthe, von denen einer positiv, der andere negativ ist, und also für y'' und für x'' vier Werthe, von denen, in Uebereinstimmung mit dem eben schon Bemerkten, zwei reell und zwei imaginär sind. Wenn wir jene Gleichungen wirklich auflösen und, der Kürze halber:

$$(C-F)A-(B^2-D^2) = P,$$

$$\sqrt{\{4(BD-AE)^2+P^2\}} = Q,$$

setzen, so ergibt sich:

$$y''^2 = \frac{P \pm Q}{2A^2},$$

$$x''^2 = \frac{-P \pm Q}{2A^2}.$$

In diesen Ausdrücken für y''^2 und x''^2 müssen wir offenbar die obern Zeichen, so wie die untern zusammennehmen; es beziehen sich jene auf die reellen, diese auf die imaginären Durchschnitte der beiden in Rede stehenden Hyperbeln. Wenn wir die beiden letzten Gleichungen addiren, so erhalten wir:

$$y''^2+x''^2 = \pm\frac{Q}{A^2},$$

wodurch, wenn wir rechtwinklige Coordinaten voraussetzen, die Entfernung jener Durchschnitte vom Mittelpuncte der gegebenen Curve bestimmt wird.

474. Wenn wir die beiden reellen Werthe von y'' durch β und β', die beiden imaginären durch β'' und β''', und die vier entsprechenden Werthe von x'' durch α, α', α'' und α''' bezeichnen, so ist:

$$\begin{bmatrix}\beta\\ \beta'\end{bmatrix} = \frac{\pm\sqrt{(P+Q)}}{A\sqrt{2}}, \qquad \begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix} = \frac{\pm\sqrt{(-P+Q)}}{A\sqrt{2}};$$

$$\begin{bmatrix}\beta''\\ \beta'''\end{bmatrix} = \frac{\pm\sqrt{(P-Q)}}{A\sqrt{2}}, \qquad \begin{bmatrix}\alpha''\\ \alpha'''\end{bmatrix} = \frac{\mp\sqrt{-(P+Q)}}{A\sqrt{2}};$$

oder: (12)

$$\begin{bmatrix}\beta\\ \beta'\end{bmatrix} = \frac{\pm\sqrt{(P+Q)}}{A\sqrt{2}}, \qquad \begin{bmatrix}\alpha\\ \alpha'\end{bmatrix} = \frac{\mp\sqrt{(-P+Q)}}{A\sqrt{2}};$$

$$\begin{bmatrix}\beta''\\ \beta'''\end{bmatrix} = \frac{\pm\sqrt{(P-Q)}}{A\sqrt{2}}, \qquad \begin{bmatrix}\alpha''\\ \alpha'''\end{bmatrix} = \frac{\pm\sqrt{-(P+Q)}}{A\sqrt{2}}.$$

Zuerst ist klar, dass in beiden Gruppen von Coordinaten-Werthen, die Werthe für β, β', α und α' immer reell sind, weil $+Q$, oder die positive arithmetische Wurzel aus dem Ausdrucke $\{4(BD-AE)^2+P^2\}$, nothwendig grösser ist als P.

Ob wir ferner die erste oder zweite Gruppe von Coordinaten-Werthen nehmen müssen, hängt davon ab, ob

$$BD-AE > o,$$

oder

$$BD-AE < o.$$

Es folgt nemlich aus der Gleichung:

$$x''y'' = \frac{BD-AE}{A^2},$$

dass in dem ersten Falle das Product der zusammengehörigen Werthe von y'' und x'' positiv sein muss, und also die reellen Werthe β und α, so wie β' und α', mit demselben Zeichen genommen werden müssen, hingegen die imaginären Werthe β'' und α'', so wie β''' und α''', mit entgegengesetztem Zeichen. Diesem entspricht die erste Gruppe. Aus derselben Gleichung folgt, dass in dem zweiten Fallè das Product der zusammengehörigen Werthe von y'' und x'' negativ sein muss, so dass wir β und α, β' und α' mit entgegengesetztem, β'' und α'', β''' und α''' aber mit gleichem Zeichen nehmen müssen. Diesem entspricht die zweite Gruppe.

Wenn

$$BD-AE = o,$$

so ist $P = Q$ und mithin $\alpha = \alpha' = o$ und $\beta'' = \beta''' = o$. Alsdann liegen die beiden reellen Puncte (β, α) und (β', α') auf der neuen zweiten Axe und die beiden imaginären Puncte (β'', α'') und $\beta''', \alpha''')$ auf der neuen ersten Axe.

475. Diejenige gerade Linie, welche die beiden reellen Durchschnittspuncte (β, α) und (β', α') verbindet, und diejenige, welche die beiden imaginären Durchschnittspuncte (β'', α'') und (β''', α''') enthält, gehen beide durch den Mittelpunct der gegebenen Curve zweiter Classe und bilden mit der ersten Coordinaten-Axe Winkel, deren trigonometrische Tangenten gleich sind:

$$\frac{\beta}{\alpha} = \pm\sqrt{\left\{-\frac{P+Q}{P-Q}\right\}},$$

$$\frac{\beta''}{\alpha''} = \mp\sqrt{\left\{-\frac{P-Q}{P+Q}\right\}};$$

und da das Product dieser beiden trigonometrischen Tangenten gleich ist: (-1), so sehen wir, dass jene beiden geraden Linien auf einander senkrecht stehen.

Wir kommen zu demselben Resultate, wenn wir berücksichtigen, dass in dem Falle rechtwinkliger Coordinaten die beiden Hyperbeln (6) und (10) gleichseitige sind und dass die geraden Linien, welche die Durchschnittspuncte zweier gleichseitigen Hyperbeln, paarweise genommen, verbinden, sich unter rechten Winkeln schneiden (295). Diese letzte Bemerkung gilt auch dann, wenn, wie in dem vorliegenden Falle, zwei jener Durchschnitte imaginär sind.

476. Wir haben in dem Vorstehenden nachgewiesen, dass, wenn man irgend zwei rechtwinklige Coordinaten-Axen beliebig annimmt, sich immer solche vier Puncte, von denen zwei reell sind, bestimmen lassen, welche die Eigenschaft besitzen, dass, wenn man in einen beliebigen dieser (reellen) Puncte den Anfangspunct der Coordinaten verlegt, die allgemeine Gleichung der Curven zweiter Classe die Form der Kreis-Gleichung erhält. Es bietet sich uns hier die natürliche Frage dar, ob, wenn wir die Richtung der beiden rechtwinkligen Coordinaten-Axen beliebig ändern, die in Rede stehenden vier Puncte immer dieselben bleiben oder auf irgend einem geometrischen Orte fortrücken. Dass der erste dieser beiden Fälle der wirkliche ist, wird in dem folgenden Paragraphen unmittelbar sich ergeben. Um dies indess schon hier zu zeigen, bemerken wir, dass, wenn diess Statt finden soll, das mit uv behaftete Glied aus der umgeformten Gleichung immer ausfallen muss, wie wir auch das neue Coordinaten-System um einen der in dem

Obigen bestimmten Puncte drehen mögen. Dies geschieht aber immer und nur dann, wenn die beiden von diesem Puncte an die Curve gelegten (imaginären) Tangenten mit je zwei beliebigen in demselben Puncte sich rechtwinklig schneidenden geraden Linien vier Harmonicalen bilden (469). Wir müssen also untersuchen, in welchen Fällen diese Bedingung erfüllt wird.

Zwei vom Anfangspuncte der Coordinaten aus an eine Curve zweiter Classe gelegte Tangenten können wir immer durch folgende beiden Gleichungen ausdrücken:

$$y = tang\alpha . x, \qquad y = tang\alpha' . x,$$

indem wir die Winkel, welche dieselben mit der ersten Axe bilden, α und α' nennen. (Wenn diese Tangenten, wie in demjenigen Falle, welchen wir vor Augen haben, imaginär sind, so sind es auch α und α'. Diese Winkel, so wie ihre trigonometrischen Tangenten, sind indess immer noch durch bestimmte algebraische Ausdrücke gegeben). Wenn die beiden Axen und die beiden Tangenten vier Harmonicalen bilden sollen, so erhalten wir, wie bekannt, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$tang\alpha + tang\alpha' = 0.$$

Lassen wir die beiden Coordinaten-Axen um irgend einen Winkel, den wir ω nennen wollen, sich drehen, und sollen jene beiden Tangenten auch noch mit den neuen Coordinaten-Axen vier Harmonicalen bilden, so ergibt sich, ähnlich wie eben, folgende Bedingungs-Gleichung:

$$tang(\alpha-\omega)+tang(\alpha'-\omega),$$

oder, wenn wir entwickeln:

$$(tang\alpha+tang\alpha')(1-tang^2\omega)+2(tang\alpha tang\alpha'-1)tang\omega = 0:$$

eine Gleichung, die nach der ursprünglichen Bedingungs-Gleichung sich auf folgende von ω unabhängige Gleichung reducirt:

$$tang\alpha tang\alpha' = 1,$$

und also, in Verbindung mit jener Gleichung, zeigt, dass $tang\alpha$ und $tang\alpha'$ die Wurzeln folgender Gleichung sind:

$$z^2+1 = 0.$$

Wenn aber die allgemeine Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

eine Curve zweiter Classe darstellen soll, welche von solchen zwei, durch den Anfangspunct gehenden geraden Linien berührt wird, die mit der ersten Axe Winkel bilden, deren trigonometrische Tangenten die Wurzeln der Gleichung $z^2+1 = 0$ sind, so muss diese Gleichung mit derjenigen, welche wir erhalten, wenn wir in den allgemeinen Gleichung $w = 0$ setzen, durch u^2 dividiren, und $\left(-\frac{v}{u}\right)$ als unbekannte Grösse betrachten, nemlich mit folgender Gleichung:

$$C\left(\frac{v}{u}\right)^2-2E\left(-\frac{v}{u}\right)+F = 0,$$

übereinstimmen. Dies gibt uns neben der Bedingungs-Gleichung: $E = 0$, auch noch folgende: $C = F$.

Wenn wir also den Anfangspunct der Coordinaten in einen der beiden Puncte $(\beta\ \alpha)$, und (β', α') (wir abstrahiren hier von den beiden andern Puncten, die imaginär sind,) verlegen, so erhält die allgemeine Gleichung der Curven zweiter Classe, welche Richtung wir auch den Coordinaten-Axen geben mögen, sobald wir dieselben nur auf einander senkrecht nehmen, jedesmal die Form der Kreis-Gleichung. Diese Puncte, die also

von der Annahme des Coordinaten-Systems unabhängig sind, und sich einzig durch die Natur der Curve bestimmten, heissen **Brennpuncte**.

Wir können von zwei **reellen** und zwei **imaginären** Brennpuncten sprechen.

477. Wir erhalten die Coordinaten der beiden (reellen) Brennpuncte der durch die allgemeine Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

dargestellten Oerter zweiter Classe, wenn wir die Werthe von α und α', β und β' (12) in die Gleichung (11) für x'' und y'' substituiren. Auf diese Weise ergibt sich, wenn wir zugleich auch für P und Q ihre Werthe schreiben und zusammenziehen:

$$y = \frac{D\sqrt{2}\pm\sqrt{\left((C-F)A-(B^2-D^2)+\sqrt{[4(DB-AE)^2+((C-F)A-(B^2-D^2))^2]}\right)}}{A\sqrt{2}},$$

$$x = \frac{B\sqrt{2}\pm\sqrt{-\left((C-F)A-(B^2-D^2)\right)+\sqrt{[4(DB-AE)^2+((C-F)A-(B^2-D^2))^2]}}}{A\sqrt{2}}.$$

Wir müssen in den vorstehenden Ausdrücken die obern und untern Zeichen, oder jedes obere Zeichen mit einem untern zusammennehmen, je nachdem der Ausdruck (BD—AE) positiv oder negativ ist.

Wenn wir annehmen, dass die allgemeine Gleichung auf den Mittelpunct der Curve als Anfangspunct der Coordinaten bezogen sei, und dem entsprechend B und D gleich Null setzen, so gehen die obigen Werthe für y und x in folgende über:

$$y = \frac{\pm\sqrt{\left(C-F+\sqrt{[(C-F)^2+4E^2]}\right)}}{\sqrt{2A}},$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{\left(F-C+\sqrt{[(C-F)^2+4E^2]}\right)}}{\sqrt{2A}}.$$

Die Gleichung des **Kreises** hat für den Fall, dass der Mittelpunct desselben zum Anfangspuncte der Coordinaten genommen wird, folgende Form (442):

$$v^2+u^2 = r^2;$$

und mithin müssen wir zur Bestimmung der Brennpuncte in den letzten Ausdrücken $E = 0$ und $C = F$ setzen. Wir sehen alsdann sogleich, dass alle vier Brennpuncte in den Mittelpunct des Kreises zusammenfallen und es eigentlich keine imaginären Brennpuncte gibt.

Wenn endlich die Gleichung:

$$Aw^2+Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0,$$

ein **System von zwei Puncten** darstellen soll, die alsdann folgende sind (458):

$$\left[\sqrt{\left(-\frac{F}{A}\right)},\ \sqrt{\left(-\frac{C}{A}\right)}\right],\qquad \left[-\sqrt{\left(-\frac{F}{A}\right)},-\sqrt{\left(-\frac{C}{A}\right)}\right],$$

so erhalten wir die Bedingungs-Gleichung:

$$E^2-CF = 0,$$

und hiernach verwandeln sich die Coordinaten-Werthe der beiden reellen Brennpuncte in folgende:

$$y = \frac{\pm\sqrt{[C-F\pm(C+F)]}}{\sqrt{2A}},$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{[F-C\pm(C+F)]}}{\sqrt{2A}}.$$

In dem vorliegenden Falle, wo wir den Werth von Q durch Wurzel-Ausziehung auf rationale Weise erhalten, müssen wir vor diesem Ausdrucke, nemlich vor (C+F), das

doppelte Zeichen einführen, und zwar müssen wir in jedem Falle das Zeichen so wählen, dass $\pm(C+F)$ positiv ist. Wenn in dem vorliegenden Falle die beiden durch die gegebene Gleichung dargestellten Puncte reell sind, so sind (wir nehmen A positiv) C und F beide negativ, und wir erhalten:

$$y = \frac{\pm\sqrt{[C-F-(C+F)]}}{\sqrt{2A}} = \pm\sqrt{\left(-\frac{F}{A}\right)},$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{[F-C-(C+E)]}}{\sqrt{2A}} = \pm\sqrt{\left(-\frac{C}{A}\right)}.$$

Die Rolle der beiden Brennpuncte spielen alsdann die beiden gegebenen Puncte selbst.

Aber auch wenn die durch die gegebene Gleichung dargestellten Puncte imaginär sind, erhalten wir zwei reelle Brennpuncte. In diesem Falle müssen wir, da C und F alsdann beide positiv sind, den Ausdruck $(C+F)$ mit positivem Zeichen nehmen und erhalten:

$$y = \pm\sqrt{\left(\frac{C}{A}\right)},$$

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{F}{A}\right)}.$$

Die beiden imaginären Brennpuncte sind, wie man sogleich sieht, die gegebenen Puncte selbst.

478. Wir wollen die Difinition der Brennpuncte einer Curve zweiter Classe, die wir in dem Vorstehenden gegeben haben, von der geometrischen Seite noch näher ins Auge fassen. Diese Puncte sind solche, welche die Eigenschaft haben, dass die, durch jeden derselben gehenden, beiden (imaginären) Tangenten der Curve und irgend zwei in demselben sich rechtwinklig schneidende gerade Linien vier Harmonicalen bilden.

Als mit dieser Difinition gleichbedeutend können wir folgende nehmen:

Die Brennpuncte einer Curve zweiter Classe sind solche Puncte, welche die Eigenschaft haben, dass jede durch dieselben gehende imaginäre gerade Linie eine (imaginäre) Tangente der Curve ist.

Diese Definition scheint mir die allgemeinste und natürlichste zu sein. *)

---

*) Jede durch den Brennpunct gehende Tangente bildet mit der ersten Axe einen Winkel, dessen trigonometrische Tangente $\sqrt{-1}$ ist und dies für jede beliebige Richtung dieser Axe. Um das Paradoxe dieser Behauptung von der analytischen Seite fortzuräumen (von geometrischer Bedeutung kann gar keine Rede sein) oder wenigstens doch zu zeigen, dass hierin kein Widerspruch liegt, füge ich die folgende Bemerkung hinzu.

Man hat allgemein, indem man durch φ und ψ irgend zwei Bogen bezeichnet:

$$tang(\varphi+\psi) = \frac{tang\varphi + tang\psi}{1 - tang\varphi\, tang\psi}.$$

Setzen wir nun $tang\varphi = \sqrt{-1}$, so kommt:

$$tang(\varphi+\psi) = \frac{\sqrt{-1} + tang\psi}{1 - tang\psi\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}.$$

Um welche reelle oder imaginäre Grösse ψ man also den Bogen φ, der zur Tangente $\sqrt{-1}$ gehört, auch wachsen lassen mag, die trigonometrische Tangente des neuen Bogens bleibt immer gleich $\sqrt{-1}$.

Wir haben in der 469. Nummer gesehen, dass der geometrische Ort für diejenigen Puncte, in welchen solche zwei Tangenten der Curve sich schneiden, welche mit den in denselben Punct verlegten Coordinaten-Axen vier Harmonicalen bilden, eine gleichseitige Hyperbel ist, deren Asymptoten den Coordinaten-Axen parallel sind, deren Mittelpunct der Mittelpunct der gegebenen Curve ist, und welche diese Curve in denjenigen vier Puncten schneidet, in welchen dieselbe von den, den beiden Coordinaten-Axen parallelen, Tangenten berührt wird. Wir erhalten eine solche gleichseitige Hyperbel für jede beliebige Annahme rechtwinkliger Coordinaten-Axen. Alle diese Curven schneiden sich also in denselben vier Puncten, von denen immer zwei reell und zwei imaginär sind, nemlich in den Brennpuncten der gegebenen Curve.

479. Es liegen die Brennpuncte zugleich aber auch auf der, bei einer durchaus beliebigen Annahme der Coordinaten-Axen, durch die Gleichung (10) dargestellten Hyperbel, welche der geometrische Ort derjenigen Puncte ist, welche die Eigenschaft haben, dass, wenn man in einen beliebigen derselben den Anfangspunct verlegt, ohne die Richtung der beliebig angenommenen Coordinaten-Axen zu ändern, in der umgeformten Gleichung:

Wir wollen in dem Nächstfolgenden einen analytischen Ausdruck für denjenigen Bogen suchen, welcher zur Tangente $\sqrt{-1}$ gehört. Wenn wir irgend einen Bogen durch φ und die zugehörige Tangente durch u bezeichnen, so ist bekanntlich:

$$\varphi = \frac{u}{1} - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \text{etc.}$$

und wir erhalten also für $u = \sqrt{-1}$:

$$\varphi = \left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \text{etc.}\right\}\sqrt{-1}.$$

Die Reihe im zweiten Theile dieser Gleichung ist divergent; wir können daher ihre arithmetische Summe nicht unmittelbar bestimmen. Statt hier in detaillirte Entwicklungen einzugehen, um zu zeigen, dass diese Summe unendlich wird, wollen wir die Sache lieber auf eine andere Weise angreifen.

Man hat nemlich allgemein:

$$\varphi = -\log(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)\sqrt{-1}.$$

Wenn φ wiederum den Bogen bedeutet, dessen trigonometrische Tangente $\sqrt{-1}$ ist, so ergibt sich:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{(1+\tan g^2\varphi)}} = \infty,$$

$$\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} = \infty\sqrt{-1},$$

und mithin erscheint φ unter der unbestimmten Form:

$$-\log(\infty - \infty)\sqrt{-1}.$$

Es ist leicht, den wahren Werth von φ zu erhalten. Denn, entwickeln wir nach der Binomial-Formel den Werth von $\sin\varphi$, so kommt:

$$\sin\varphi = \sqrt{-1}\cos\varphi\sqrt{\left\{1-\frac{1}{\cos^2\varphi}\right\}},$$

$$= \sqrt{-1}\cos\varphi\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\cos^4\varphi}-\text{etc.}\right\};$$

und hiernach:

$$\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1} = \left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos\varphi}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\cos^3\varphi}+\text{etc.}\right\} = 0,$$

und endlich:

$$-\log(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1})\sqrt{-1} = \infty\sqrt{-1}.$$

$$Aw^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+F'u^2 = o,$$

$C' = F'$ wird. Die geometrische Deutung dieser Bedingungs-Gleichung ergibt sich leicht; denn, setzen wir in der umgeformten Gleichung nach einander u und v gleich Null, so kommt:

$$\left(\frac{w}{v}\right)^2+2\frac{B'}{A}\cdot\frac{w}{v}+\frac{C'}{A} = o,$$
$$\left(\frac{w}{u}\right)^2+2\frac{D'}{A}\;\frac{w}{v}+\frac{F'}{A} = o.$$

Wenn $C' = F'$, so ist das Product der beiden Werthe von $\frac{w}{v}$, welche die erste dieser beiden Gleichungen gibt, dem Producte der beiden Werthe von $\frac{w}{u}$, welche die zweite Gleichung gibt, gleich. Wenn man also die beiden, jeder der beiden Coordinaten-Axen parallelen, Tangenten zieht; so ist das Product der Segmente, die von diesen Tangenten auf der ersten Axe bestimmt werden, dem Producte der analogen Segmente auf der zweiten Axe gleich. Hieraus ist zugleich ersichtlich, dass die Hyperbel (10) auch durch die vier Winkelpuncte desjenigen Parallelogramms geht, das der gegebenen Curve umschrieben ist und dessen Seiten den Coordinaten-Axen parallel sind. Denn für diese Winkelpuncte verschwinden die in Rede stehenden Producte beide zugleich.

Die Bestimmung der Hyperbel (10) ist nur in so fern von der gegebenen Curve abhängig, als durch diese Curve das umschriebene Parallelogramm gegeben ist: nehmen wir dieses Parallelogramm beliebig an, so ist jene Hyperbel vollkommen bestimmt. Wir erkennen hierin unter andern folgenden Satz:

Die Brennpuncte aller Curven zweiter Classe, welche demselben Parallelogramm eingeschrieben sind, liegen auf einer Hyperbel, die eine gleichseitige wird, wenn jenes Parallelogramm ein Rechteck ist.

Für jede veränderte Richtung der beiden rechtwinkligen Coordinaten-Axen erhalten wir ein anderes umschriebenes Parallelogramm und eine andere Hyperbel. Alle solche Hyperbeln gehen durch die Brennpuncte der gegebenen Curve zweiter Classe. Hiernach erhalten wir folgenden Satz:

Das Product der Abstände eines Brennpunctes einer Curve zweiter Classe von zwei parallelen Tangenten ist constant, welche Richtung wir diesen parallelen Tangenten auch geben mögen.

An diesen Satz hätten wir ebenfalls die Definition der Brennpuncte anknüpfen und also solche Puncte Brennpuncte nennen können, welche die eben ausgesprochene Eigenschaft haben. Doch wenn diese geometrische Definition vor der obigen auch den Vorzug haben mag, dass sie von imaginären Grössen unabhängig ist, so ist sie, von der andern Seite, weniger allgemein, denn sie verliert für den Fall der Parabel ihre Anwendbarkeit.

Aus dem letzten Satze und einer allbekannten Eigenschaft des Kreises geht endlich noch folgender Satz hervor:

Die Fusspuncte der von einem der Brennpuncte auf alle Tangenten einer Curve zweiter Classe gefällten Perpendikel, oder überhaupt, der nach denselben unter irgend einem gegebenen Winkel gezogenen geraden Linien, liegen auf dem Umfange ein und desselben Kreises.

Dieser bekannte Satz (342) schliesst sich also unmitteldar an die Definition der Brennpuncte an.

480. Wir haben bis jetzt denjenigen Fall unberücksichtigt gelassen, wo die gegebene Curve eine **Parabel** ist. Nehmen wir für die allgemeine Gleichung derselben:

$$2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

so geht die umgeformte Gleichung (1) in folgende über:

$$2Buw+(C-2Bx')v^2+2Duw+2(E-Dx'-By')uv+(F-2Dy')u^2 = 0.$$

Wenn wir die Coordinaten des neuen Anfangspunctes durch folgende beide lineare Gleichungen bestimmen:

$$\begin{aligned} By'+Dx'-E &= 0, \\ 2(Dy'-Bx')+C-F &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

so erhält die umgeformte Gleichung folgende Form:

$$2Bvw+2Duw+C'(v^2+u^2) = 0, \tag{14}$$

und hiernach folgende:

$$\left(v+\frac{B}{C'}w\right)^2+\left(u+\frac{D}{C'}w\right)^2 = \frac{B^2+D^2}{C'^2}w^2.$$

Aus den beiden Gleichungen (13) erhalten wir:

$$y' = \frac{2BE-D(C-F)}{2(B^2+D^2)},$$

$$x' = \frac{2DE+B(C-F)}{2(B^2+D^2)}.$$

Diese Werthe von y' und x' werden nur dann unendlich, wenn

$$B^2+D^2 = 0,$$

und diese Gleichung wird nur dann befriedigt, wenn zugleich

$$B = 0, \qquad D = 0.$$

In diesem Falle geht die gegebene Gleichung in folgende über:

$$Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0,$$

und stellt also ein System zweier unendlich weit entfernt liegender Puncte dar. Wenn wir von diesem speciellen Falle abstrahiren, so ist die in Rede stehende Coordinaten-Umformung immer, aber nur auf eine einzige Weise, möglich; denn für den Coordinaten des neuen Anfangspunctes erhalten wir in allen obigen Fällen reelle und endliche Werthe.

Den neuen Anfangspunct, der immer derselbe Punct bleibt, wie wir auch die Richtung der beiden rechtwinkligen Coordinaten-Axen bestimmen mögen (476), nennen wir den **Brennpunct der Parabel**. Die Parabel hat nur *einen* Brennpunct.

Wir haben:

$$C' = C-2Bx' = \frac{CD^2-2BDE+FB^2}{B^2+D^2},$$

und hiernach verwandelt sich die Gleichung (13) in folgende:

$$2B(B^2+D^2)vw+2D(B^2+D^2)uw+(CD^2-2BDE+FB^2)(u^2+v^2) = 0.$$

481. Wenn wir y' und x' als veränderliche Grössen betrachten und demnach die Accente fortlassen, so stellt die erste der beiden Gleichungen (13):

$$By+Dx-E = 0, \tag{16}$$

wie wir schon in der 471. Nummer bemerkt haben, diejenige gerade Linie dar, welche die Berührungspuncte auf den beiden den Coordinaten-Axen parallelen Tangenten verbindet. Wenn wir die Richtung der Axen auf alle mögliche Weise ändern, so erhalten wir unendlich viele solcher gerader Linien, die alle durch ein und denselben Punct gehen.

Hiernach können wir die allgemeine Definition der Brennpuncte (478) für den Fall der Parabel auf folgende Weise umschreiben:

Diejenige gerade Linie, welche die Berührungspuncte auf irgend zweien auf einander senkrechten Tangenten einer gegebenen Parabel verbindet, geht durch einen festen Punct: dieser Punct heisst der Brennpunct der Parabel.

482. Der Brennpunct liegt ferner auf der durch folgende Gleichung:

$$2(Dy-Bx)+C-F = 0, \qquad (16)$$

dargestellten geraden Linie. Diese Gleichung wird befriedigt, wenn wir zugleich

$$y = \frac{F}{2D}, \qquad x = \frac{C}{2B},$$

setzen. Hieraus folgt, wie man leicht sieht (468), dass die bezügliche gerade Linie durch den Durchschnitt der beiden, der Coordinaten-Axen parallelen, Tangenten geht. Zugleich ist ersichtlich, dass diese gerade Linie auf der geraden Linie (15) senkrecht steht. Also:

Wenn man von dem Durchschnittspuncte zweier auf einander senkrechter Tangenten einer gegebenen Parabel ein Perpendikel auf diejenige gerade Linie, welche die beiden Berührungspuncte verbindet, fällt, so ist der Fusspunct dieses Perpendikels der Brennpunct der Parabel.

Auch an diesen Satz könnten wir die Definition des Brennpunctes der Parabel anknüpfen.

483. Wenn, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, in der umgeformten Gleichung, die wir wiederum, der Kürze halber, auf folgende Weise schreiben wollen:

$$Aw^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+E'u^2 = 0,$$

die Coefficienten von v^2 und u^2 gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen sind, so hat diese Gleichung, wenn wir $w = 1$ setzen und v und u als die eigentlichen veränderlichen Grössen betrachten, die Form der gewöhnlichen Gleichung der gleichseitigen Hyperbel. Die Gleichung:

$$C' = -F',$$

gibt aber, wenn wir substituiren, folgende Bedingungs-Gleichung zwischen den Coordinaten des neuen Anfangspunctes:

$$Ay^2-2Dy+F = -(Ax^2-2Bx+C), \qquad (17)$$

wenn y und x diese Coordinaten bedeuten. Dieser Gleichung können wir folgende Form geben:

$$\left(y-\frac{D}{A}\right)^2+\left(x-\frac{B}{A}\right)^2 = \frac{B^2+D^2-A(C+F)}{A^2}. \qquad (18)$$

Wir können also, im Allgemeinen, auf unendlich viele Arten durch blosse Verlegung des Anfangspunctes der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe die Form der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel geben. Der geometrische Ort für den neuen Anfangspunct der Coordinaten ist ein Kreis, dessen Mittelpunct der Mittelpunct des gegebenen Ortes zweiter Classe ist.

Um den in Rede stehenden Kreis zu construiren, bemerken wir, dass die Gleichung (17) befriedigt wird, wenn wir y und x durch folgende beide Gleichungen:

$$Ay^2-Dy+F = 0,$$
$$Ax^2-Bx+C = 0,$$

bestimmen. Es geht dieser Kreis also durch die vier Winkelpuncte eines um die gegebene Curve beschriebenen Rechtecks, dessen gegenüberliegende Seiten den Coordinaten-Axen parallel sind. Der Kreis ist hierdurch vollkommen bestimmt.

Wenn C' gleich $(-F')$ ist, und wir in der umgeformten Gleichung w gleich Null setzen, so ergibt sich:

$$\left(\frac{u}{v}\right)^2+\left(\frac{E'}{A'}\right)\frac{u}{v}-1=0.$$

Hieraus folgt, dass die beiden durch den neuen Anfangspunct gehenden Tangenten auf einander senkrecht stehen. Wenn, umgekehrt, diese Tangenten auf einander senkrecht stehen; so ist in derjenigen Gleichung, die der letzten Gleichung entspricht, das letzte Glied immer gleich (-1) und also sind in der allgemeinen Gleichung die Coefficienten von u^2 und v^2 gleich, aber von entgegengesetztem Zeichen. Wenn wir also die neuen Coordinaten-Axen um den Anfangspunct sich drehen lassen, so behält die allgemeine Gleichung immer die besagte Form. Hieraus folgt zugleich, dass, welch ein rechtwinkliges Coordinaten-System wir ursprünglich auch annehmen mögen, der durch (18) dargestellte Kreis immer derselbe bleibt, und dass mithin die Winkelpuncte aller der gegebenen Curve zweiter Classe umschriebenen Rechtecke auf dem Umfange ein und desselben Kreises liegen. Demselben Satze werden wir später nochmals begegnen (510).

Der durch die Gleichung (18) dargestellte Kreis wird imaginär und also die in Rede stehende Coordinaten-Verwandlung unmöglich, wenn

$$B^2+D^2 < A(C+F);$$

derselbe Kreis reducirt sich auf einen Punct und die Coordinaten-Verwandlung ist nur auf eine einzige Weise möglich, wenn

$$B^2+D^2 = A(C+F).$$

Dieser letzte Fall bezieht sich auf die gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten sich unter rechten Winkeln schneiden. Der Mittelpunct derselben liegt nothwendig auf dem Kreise (18) und dieser Kreis muss daher auf einen Punct sich reduciren. In der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel sind die Coefficienten von v^2 und u^2 nur dann gleich und von entgegengesetztem Zeichen, wenn die rechtwinkligen Coordinaten-Axen zwei Durchmesser derselben sind (343).

Für den Fall der Parabel, wo A gleich Null ist, reducirt sich die Gleichung (17) auf folgende:

$$Dx+Bx = C+F, \qquad (19)$$

und stellt mithin eine gerade Linie dar.

Die Winkelpuncte aller rechten Winkel, deren Schenkel eine gegebene Parabel berühren, liegen auf derselben geraden Linie.

Wenn die Coordinaten-Axen rechtwinklig sind und in irgend einem Puncte der geraden Linie (19) sich schneiden, so sind in der Gleichung der Parabel die Coefficienten von v^2 und u^2 gleich und von entgegengesetztem Zeichen.

484. Wenn wir in der umgeformten Gleichung:

$$Aw^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+F'u^2=0,$$

nochmals w gleich Eins setzen, so ist dieselbe in Beziehung auf die beiden übrigen veränderlichen Grössen v und u, eben so beschaffen, als die gewöhnliche Gleichung der Parabel in Beziehung auf x und y, wenn nachstehende Bedingungs-Gleichung Statt findet

$$E'^2 - C'F' = 0. \qquad (20)$$

Es ist aber:

$$C' = Ax'^2 - 2Bx' + C,$$
$$F' = Ay'^2 - 2Dy' + F,$$
$$E' = Ax'y' - By' - Dx' + E.$$

Substituiren wir diese Werthe für C', F' und E' in die obige Bedingungs-Gleichung, so kommt nach einer leichten Reduction, wenn wir zugleich die Accente von y' und x' fortlassen:

$$(B^2 - AC)y^2 + 2(AE - BD)xy + (D^2 - AF)x^2 + 2(CD - BE)y$$
$$+ 2(BF - DE)x + (E^2 - CF) = 0. \qquad (21)$$

Wenn wir in der hiernach umgeformten Gleichung $w = 0$ setzen, so erhalten wir für die beiden durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden Tangenten:

$$C'\left(\frac{v}{u}\right)^2 + E'\left(\frac{v}{u}\right) + F' = 0,$$

und diese Gleichung hat gleiche Wurzeln, wenn die Bedingungs-Gleichung (21) befriedigt wird. Jene beiden Tangenten fallen in diesem Falle zusammen, was, wenn die allgemeine Gleichung nicht ein System von zwei Puncten darstellt, offenbar nur dann geschehen kann, wenn der neue Anfangspunct auf dem Umfange der gegebenen Curve zweiter Classe angenommen wird. Wenn wir also y und x als veränderliche Grössen betrachten, so stellt die Gleichung (21) dieselbe Curve durch gewöhnliche Coordinaten dar.

485. Wir können der allgemeinen Gleichung der Curven zweiter Classe:

$$Aw^2 + Bvw + Cv^2 + 2Duw + 2Euv + Fu^2 = 0,$$

eine symmetrische Form geben, wenn neben der Bedingungs-Gleichung:

$$E^2 - CF = 0,$$

auch noch die beiden Bedingungs Gleichungen:

$$B^2 - AC = 0, \qquad D^2 - AF = 0,$$

bestehen. Wir erhalten alsdann:

$$C = \frac{B^2}{A}, \qquad F = \frac{D^2}{A}, \qquad E = \pm\frac{BD}{A},$$

und hiernach verwandelt sich die gegebene Gleichung, wenn wir zugleich mit A multipliciren, in folgende:

$$A^2w^2 + 2ABvw + B^2v^2 + 2ADuw \pm 2BDuv + D^2u^2 = 0.$$

Wenn wir in dieser Gleichung das obere Zeichen nehmen, so können wir ihr folgende Form geben:

$$(Aw + Bv + Du)^2 = 0,$$

sie stellt also in diesem Falle zwei zusammenfallende Puncte dar. Es ist dies in Uebereinstimmung mit der 459. Nummer, weil man alsdann

$$AE - BD = 0$$

erhält. Abstrahiren wir von diesem Falle und nehmen das untere Zeichen, so stellt die allgemeine Gleichung eine Hyperbel dar, die durch den Anfangspunct der Coordinaten geht und deren Asymptoten den Coordinaten-Axen parallel sind. Diese Gleichung nimmt alsdann folgende Form an:

$$(Aw + Bv + Du)^2 = 4BDuv.$$

Wenn wir die Quadrat-Wurzel aus den beiden Theilen dieser Gleichung ziehen, so kommt:

$$Aw + Bv + Du = 2B^{1/2}D^{1/2}u^{1/2}v^{1/2},$$

und wenn wir anders ordnen:

$$Bv+2B^{1/2}D^{1/2}u^{1/2}v^{1/2}+Du = -Aw.$$

Ziehen wir nochmals die Quadrat-Wurzel aus, so ergibt sich:

$$B^{1/2}v^{1/2}+D^{1/2}u^{1/2} = (-A)^{1/2}w^{1/2}.$$

Die Constanten dieser Gleichung sind, wenn wir A gleich Eins setzen, die Mittelpunct-Coordinaten der gegebenen Curve.

§ 2.

Veränderung der Richtung der Coordinaten-Axen. Bestimmung der Grösse und Richtung zugeordneter Durchmesser.

486. Es sei wiederum:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0, \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung der geometrischen Oerter zweiter Classe. Den Winkel, den die beiden Coordinaten-Axen mit einander bilden, wollen wir ϑ nennen. Indem wir den Anfangspunct beibehalten, wollen wir die erste Axe um irgend einen Winkel φ und die zweite Axe um irgend einen Winkel ψ' sich drehen lassen. Alsdann müssen wir, um dieselbe Curve, welche bei einer beliebigen Constanten-Bestimmung durch die Gleichung (1) dargestellt wird, auf die neuen Coordinaten-Axen zu beziehen, in der Gleichung (1), nachdem wir zuvor durch w^2 dividirt haben:

$$\frac{u\sin\varphi - v\sin\varphi'}{w\sin\xi} \text{ und } \frac{u\sin\psi - v\sin\psi'}{w\sin\xi},$$

an die Stelle von $\frac{v}{w}$ und $\frac{u}{w}$ schreiben; wenn wir die Bezeichnung der 452. Num. beibehalten und demnach den neuen Coordinaten-Winkel ξ, den Winkel, welchen die neue zweite Axe mit der ersten ursprünglichen bildet, φ', und endlich den Winkel, den die neue erste Axe mit der zweiten ursprünglichen bildet, ψ nennen. Durch diese Substitution verwandelt sich die gegebene Gleichung in folgende:

$$\begin{aligned} Aw^2 &- 2.\frac{B\sin\varphi+D\sin\psi}{\sin\xi}.uw + 2.\frac{B\sin\varphi'+D\sin\psi'}{\sin\xi}.vw \\ &- 2.\frac{C\sin\varphi\sin\varphi'+E(\sin\varphi\sin\psi'+\sin\psi\sin\varphi')+F\sin\psi\sin\psi'}{\sin^2\xi}.uv \\ &+ \frac{C\sin^2\varphi+2E\sin\varphi\sin\psi+F\sin^2\psi}{\sin^2\xi}.u^2 \\ &+ \frac{C\sin^2\varphi'+2E\sin\varphi'\sin\psi'+F\sin^2\psi'}{\sin^2\xi}.v^2 = 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Für die beiden neuen Axen erhalten wir folgende Coordinaten-Werthe:

$$v = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi}, \qquad v = \frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'},$$

die wir der Kürze halber durch v' und v'' bezeichnen wollen. Durch die Einführung dieser Grössen erhält die Gleichung (2) folgende Form:

$$\begin{aligned} Aw^2 &- 2\frac{\sin\psi}{\sin\xi}(Bv'+D)uw + 2\frac{\sin\psi'}{\sin\xi}(Bv''+D)vw \\ &- 2.\frac{\sin\psi\sin\psi'}{\sin^2\xi}(Cv'v''+E(v'+v'')+F)uv \end{aligned}$$

$$+\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\xi}(Cv'^2+2Ev'+F)u^2$$
$$+\frac{\sin^2\psi'}{\sin^2\xi}(Cv''^2+2Ev''+F)v^2 = 0. \qquad (3)$$

487. Wenn wir zuerst die Coefficienten von u^2 und v^2 betrachten, nemlich folgende Ausdrücke:

$$\frac{\sin^2\psi}{\sin^2\xi}(Cv'^2+2Ev'+F),$$
$$\frac{\sin^2\psi'}{\sin^2\xi}(Cv''^2+2Ev''+F),$$

so ist ersichtlich, dass eine einzige Gleichung vom zweiten Grade diejenigen Werthe von v' und v'' zu Wurzeln hat, die machen, dass aus der umgeformten Gleichung die mit u^2 und v^2 behafteten Glieder ausfallen. Diese Gleichung, deren Wurzeln jene Werthe von v' und v'' sind, ist folgende:

$$Cz^2+2Ez+F = 0. \qquad (4)$$

Hieraus folgt, dass, wenn es möglich ist, aus der allgemeinen Gleichung das eine der beiden in Rede stehenden Glieder fortzuschaffen, es immer auch möglich ist, das andere derselben aus dieser Gleichung ausfallen zu lassen. Und dieses ist dann immer möglich, wenn

$$E^2-CF > 0 \text{ oder } E^2-CF = 0.$$

Doch können in dem letztern Falle nicht jene beiden Glieder zugleich fortgeschafft werden, denn, wenn dies geschähe, würden die beiden neuen Coordinaten-Axen zusammenfallen.

488. Wenn aus der umgeformten Gleichung die beiden mit u^2 und v^2 behafteten Glieder verschwinden, so stellt diese Gleichung, wie wir schon früher bemerkt haben, einen geometrischen Ort dar, der von den beiden Coordinaten-Axen berührt wird. Durch die Wurzeln der Gleichung (4) ist also die Richtung derjenigen beiden geraden Linien bestimmt, die durch den ursprünglichen Anfangspunct gehen und die durch die allgemeine Gleichung gegebene Curve berühren. Dieser Anfangspunct liegt ausserhalb der Curve, innerhalb derselben oder auf ihrem Umfange, je nachdem

$$E^2-CF > 0, \qquad E^2-CF < 0, \qquad E^2-CF = 0.$$

489. Wenn der Mittelpunct der Curve in den Anfangspunct der Coordinaten fällt, d. h. wenn in der gegebenen Gleichung B und D gleich Null sind, so bestimmen die Wurzeln der Gleichung (4), nemlich:

$$\frac{-E\pm\sqrt{(E^2-CF)}}{C}, \qquad (5)$$

die Richtung der beiden Asypmtoten. Dieser Ausdruck zeigt, dass, weil der Mittelpunct der Hyperbel ausserhalb, der Mittelpunct der Ellipse aber innerhalb der Curve liegt, in dem ersten Falle die Asymptoten reell, in dem zweiten Falle imaginär sind.

Wenn der Mittelpunct nicht in den Anfangspunct der Coordinaten fällt, so müssen wir, um die Richtung der Asymptoten zu bestimmen, zuvörderst den Anfangspunct in jenen Punct verlegen, und also, was sogleich aus der Form der Gleichung (4) der 455. Nummer erhellt, C, E und F mit

$$\frac{AC-B^2}{A^2}, \qquad \frac{AE-BD}{A^2}, \qquad \frac{AF-D^2}{A^2},$$

vertauschen und erhalten mithin statt (5):

$$\frac{-(AE-BD)\pm\sqrt{\left((AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)\right)}}{AC-B^2}: \qquad (6)$$

dieselben Ausdrücke, die wir bereits schon in der 456. Nummer erhalten haben.

Um die Segmente zu bestimmen, welche auf der zweiten Axe von den beiden Asymptoten abgeschnitten werden, müssen wir in die Gleichung des Mittelpunctes der Curve:

$$Aw+Bv+D = 0,$$

für v die vorstehenden Werthe substituiren, und die entsprechenden Werthe für w entwickeln. Auf diese Weise kommt:

$$w = \frac{A(BE-CD)\mp B\sqrt{\left((AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)\right)}}{A(AC-B^2)}.$$

490. Der Winkel, den die beiden Asymptoten mit einander bilden, und den wir η nennen wollen, ist, wenn wir die beiden Ausdrücke bei (6) durch a und a' bezeichnen, durch folgende Gleichung gegeben:

$$tang\eta = \frac{(a-a')sin\vartheta}{1+(a+a')cos\vartheta+aa'}.$$

Wir haben aber:

$$a+a' = -\frac{2(AE-BD)}{AC-B^2},$$

$$aa' = \frac{AF-D^2}{AC-B^2},$$

$$a-a' = 2.\frac{\sqrt{\left((AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)\right)}}{AC-B^2};$$

und mithin:

$$tang\eta = \frac{2\sqrt{\left((AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)\right)}sin\vartheta}{(AC-B^2)-2(AE-BD)cos\vartheta+(AF-D^2)}. \qquad (7)$$

Wenn die Hyperbel eine **gleichseitige** d. h. der Asymptoten-Winkel ein rechter ist, so kommt:

$$(AC-B^2)-2(AE-BD)cos\vartheta+(AF-D^2) = 0, \qquad (8)$$

und für den besondern Fall eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems:

$$A(C+F)-B^2-D^2 = 0. \qquad (9)$$

Wenn der Anfangspunct der Coordinaten mit dem Mittelpuncte der Curve zusammenfällt, so reduciren sich die Gleichungen (7), (8) und (9), indem wir B = D = 0 setzen, auf folgende:

$$tang\eta = \frac{2\sqrt{\{E^2-CF\}}sin\vartheta}{C-2Ecos\vartheta+F}, \qquad (10)$$

$$C-2Ecos\vartheta+F = 0, \qquad (11)$$

$$C+F = 0. \qquad (12)$$

491. Wenn aus der umgeformten Gleichung durch die angezeigte Coordinaten-Verwandlung die mit v^2 und u^2 behafteten Glieder ausfallen, so verwandelt sich der Coefficient von uv, nemlich der Ausdruck:

$$-2.\frac{sin\psi sin\psi'}{sin^2\xi}(Cv'v''+E(v'+v'')+F), \qquad (13)$$

da

$$v'v'' = \frac{F}{C}, \qquad v'+v'' = -\frac{2E}{C},$$

zunächst in folgenden:

$$4.\ \frac{\sin\psi\sin\psi'}{\sin^2\xi}\cdot\frac{E^2-CF}{C}. \qquad (14)$$

Aus den Gleichungen:

$$v' = \frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\sin(\psi+\vartheta)}{\sin\psi}, \qquad v'' = \frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'} = \frac{\sin(\psi'+\vartheta)}{\sin\psi'},$$

folgt ferner:

$$\cot\psi = \frac{v'-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}, \qquad \cot\psi' = \frac{v''-\cos\vartheta}{\sin\vartheta};$$

und da endlich:

$$\sin\xi = \sin(\psi'-\psi),$$

so ergibt sich:

$$\frac{\sin\xi}{\sin\psi\sin\psi'} = \cot\psi-\cot\psi',$$
$$= \frac{v'-v''}{\sin\vartheta} = \frac{2\sqrt{[E^2-CF]}}{C\sin\vartheta}.$$

Hiernach geht der Ausdruck (14) in folgende über:

$$2.\ \frac{\sin\vartheta}{\sin\xi}\sqrt{[E^2-CF]} = \frac{C\sin^2\vartheta}{\sin\psi\sin\psi'}.$$

492. Wir wollen uns hier auf den Fall beschränken, dass der Anfangspunct der Coordinaten mit dem Mittelpuncte der bezüglichen Curve zusammenfällt. Wenn wir alsdann die beiden Axen sich so drehen lassen, dass sie mit den beiden Asymptoten der Curve, die, wenn die in Rede stehende Coordinaten-Verwandlung möglich ist, eine Hyperbel sein muss, zusammenfallen, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$Aw^2+2.\ \frac{\sin\vartheta}{\sin\eta}\sqrt{(E^2-CF)}uv = 0,$$

indem wir η an die Stelle von ξ schreiben. Aus (10) erhalten wir:

$$\sin\eta = 2\sqrt{\left\{\frac{E^2-CF}{C^2+4E^2+F^2-4E(C+F)\cos\vartheta+2CF\cos2\vartheta}\right\}}\sin\vartheta,$$

und hiernach verwandelt sich die vorstehende Gleichung der auf ihre Asymptoten bezogene Hyperbel in folgende:

$$Aw^2+\sqrt{[C^2+4E^2+F^2-4E(C+F)\cos\vartheta+2CF\cos2\vartheta]}uv = 0,$$

und wenn der ursprüngliche Coordinaten-Winkel ein rechter ist, in:

$$Aw^2+\sqrt{[(C-F)^2+4E^2]}uv = 0. —$$

493. Wenn aus der umgeformten Gleichung (3) das mit uv behaftete Glied ausfallen soll, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichung:

$$Cv'v''+E(v'+v'')+F = 0.$$

Diese Gleichung kann auf unendlich verschiedene Weise befriedigt werden, und zwar so, dass wir hierbei den Werth für v' und v'' beliebig annehmen können. Bestimmen wir v'' durch v', so kommt:

$$v'' = -\frac{F+Ev'}{E+Cv'}.$$

Hiernach erhalten wir:

$$Cv''^2+2Ev''+F = \frac{(CF-E^2)(Cv'^2+2Ev'+F)}{(E+Cv')^2}. \qquad (15)$$

Wenn wir also die umgeformte Gleichung, der Kürze halber, auf folgende Weise schreiben:

$$Aw^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+F'u^2 = 0, \qquad (16)$$

und mithin:

$$C' = \frac{sin^2\psi}{sin^2\xi}(Cv'^2+2Ev'+F),$$

$$F' = \frac{sin^2\psi'}{sin^2\xi}(Cv''^2+2Ev''+F),$$

setzen, so ergibt sich:

$$\frac{F'}{C'} = \frac{sin^2\psi'}{sin^2\psi} \cdot \frac{CF-E^2}{(E+Cv')^2}, \qquad (17)$$

494. Aus der Gleichung (16) können wir, im Allgemeinen, keines der beiden mit u^2 und v^2 behafteten Glieder mehr fortschaffen; denn wenn z. B. F' gleich Null sein soll, so müssen wir im Allgemeinen:

$$Cv''^2+2Ev''+F = 0, \qquad (18)$$

setzen, und diese Gleichung bringt nach (15), im Allgemeinen folgende mit sich:

$$Cv'^2+2Ev'+F = 0,$$

und also würde C' zugleich mit F' verschwinden. Es könnte diess aber nur auf eine doppelte Weise geschehen, einmal wenn v'' und v' gleich, das andere Mal wenn v'' und v' Wurzeln derselben quadratischen Gleichung wären. In dem erstern Falle würde die Coordinaten-Verwandlung illusorisch, weil die beiden neuen Axen zusammenfallen würden. In dem zweiten Falle erhalten wir die Bedingungs-Gleichung:

$$CF-E^2 = 0.$$

Wenn aber diese Gleichung befriedigt wird, so verschwindet in diesem besondern Falle C' und F', im Allgemeinen, nicht zu gleicher Zeit. Die Gleichung (18) gibt alsdann für v'' gleiche Werthe, und man hat:

$$Cv''+E = 0.$$

Die Gleichung (15) zeigt, dass alsdann, im Allgemeinen, F' verschwindet und C' nicht. In diesem Falle liegt aber der Anfangspunct auf der Curve und die zweite Axe ist eine Tangente derselben. Wenn wir, immer in der Voraussetzung, dass:

$$CF-E^2 = 0,$$

C' = o setzen, so ergibt sich:

$$Cv'+E = 0;$$

und die Curve wird von der ersten Coordinaten-Axen berührt, während die zweite Axe jede beliebige Richtung haben kann. Alsdann aber erscheint der Ausdruck für $\frac{F'}{C'}$ unter der Form $\frac{0}{0}$, und wir sehen sogleich, dass der wahre Werth dieses Ausdruckes unendlich wird und also F' nicht zugleich mit C' verschwindet.

495. Wenn also der Anfangspunct der Coordinaten in irgend einem Puncte der durch die Gleichung (1) dargestellten Curve liegt, so geht die umgeformte Gleichung (3), wenn wir:

$$Cv''+E = 0,$$

setzen, in folgende über:

$$Aw^2-2\frac{sin\psi}{sin\xi}(Bv'+D)uw-2\frac{sin\psi'}{sin\xi}\left(\frac{BE-CD}{C}\right)vw$$
$$+\frac{sin^2\psi}{sin^2\xi}(Cv'+E)^2u^2 = 0. \qquad (19)$$

Wir können die Form dieser Gleichung noch vereinfachen, wenn wir die erste Axe durch den Mittelpunct der Curve legen und zu diesem Ende:

$$Bv'+D = 0$$

setzen. Alsdann verwandelt sich nemlich die letzte Gleichung in folgende:

$$Aw^2 - 2\frac{\sin\psi'}{\sin\xi}\cdot\frac{BE-CD}{C}\cdot vw + \frac{\sin^2\psi}{\sin^2\xi}\cdot\left(\frac{BE-CD}{B}\right)^2\cdot u^2 = 0. \qquad (20)$$

Wenn $A = 0$ und also die bezügliche Curve eine Parabel ist, so gehen die beiden Gleichungen (19) und (20) in folgende über:

$$2\sin\psi(Bv'+D)uw + 2\sin\psi'\cdot\frac{BE-CD}{C}\cdot uw - \frac{\sin^2\psi}{\sin\xi}(Cv'+E)^2u^2 = 0,$$

$$u^2 = 2\frac{\sin\psi'\sin\xi}{\sin^2\psi}\cdot\frac{B^2}{C(BE-CD)}vw.$$

Die Coefficienten, die in der letzten Gleichung vorkommen, zu entwickeln, liegt nicht in unserer Absicht; es kommt uns nur darauf an, auf die Form dieser Gleichungen aufmerksam zu machen.

496. Nachdem wir den besondern Fall, wo der Anfangspunct auf der Curve liegt, und wo, wenn wir das mit u^2 oder v^2 behaftete Glied fortschaffen wollen, zugleich auch das mit uv behaftete Glied ausfällt, betrachtet haben, wenden wir uns zur Gleichung (16):

$$Aw^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+F'u^2 = 0 \qquad (16)$$

zurück. Die beiden neuen Axen, auf welche diese Gleichung bezogen ist, bilden, wie wir es für den gleichen Fall in der 469. Nummer schon bemerkt haben, mit den beiden vom Anfangspuncte an die Curve gelegten Tangenten vier Harmonicalen. Diess hat in der Construction dann, wenn der Anfangspunct innerhalb liegt, keine unmittelbare Bedeutung mehr; doch, analytisch genommen, können wir diese Beziehung auch dann uns fortbestehend denken. Denn, von vier Harmonicalen sowol, als von vier harmonischen Theilungspuncten, können zwei imaginär werden.

497. Wenn der Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve fällt, so ist:

$$B' = \frac{\sin\psi'}{\sin\xi}(Bv'+D) = 0,$$

$$D' = -\frac{\sin\psi}{\sin\xi}(Bv'+D) = 0,$$

und hiernach geht die Gleichung (16) in folgende über:

$$Aw^2+Cv^2+Fu^2 = 0. \qquad (21)$$

In diesem Falle sind die beiden neuen Axen zwei Durchmesser der Curve, und aus dem Vorstehenden ergibt sich, dass wir einen derselben ganz beliebig annehmen und dann, auf einzige Weise, den andern bestimmen können. Setzen wir in der vorstehenden Gleichung nach einander $\frac{w}{u}$ und $\frac{w}{v}$ gleich Null, so erhalten wir beidesmal für $\frac{v}{u}$ zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe. Wenn man also von irgend einem Puncte eines beliebigen jener beiden Durchmesser zwei Tangenten an die Curve und eine dem andern Durchmesser parallele gerade Linie, zieht, so bilden die drei gerade Linien, welche man auf diese Weise erhält, mit jenem erstgenannten Durchmesser vier Harmonicalen. Liegt jener auf einem Durchmesser beliebig angenommene Punct zugleich auf der Curve, so fallen die beiden Tangenten zusammen und sind mithin, da mit zwei zusammenfallenden Harmonicalen nothwendig noch eine dritte zusammenfallen muss, dem andern Durchmesser parallel.

Wir erhalten die jenen beiden Durchmessern parallele Tangenten, wenn wir in der letzten Gleichung nach einander u und v gleich Null setzen. Auf diese Weise kommt:

$$\frac{w}{v} = \pm\sqrt{-\frac{C}{A}},$$
$$\frac{w}{u} = \pm\sqrt{-\frac{F}{A}}.$$

Durch diese Ausdrücke für $\frac{w}{v}$ und $\frac{w}{u}$ ist also die Grösse der beiden halben in der erste und zweite Coordinaten-Axe fallenden Durchmesser der Curve gegeben.

Die beiden in Rede stehenden Durchmesser heissen zugeordnete. Jeder Durchmesser hat seinen zugeordneten.

498. Setzen wir in der Gleichung (21) $w = 0$, so erhalten wir für die Asymptoten der Curve,

$$\frac{v}{u} = \pm\sqrt{-\frac{F}{C}}.$$

Es bilden dieselben also mit den beiden Coordinaten-Axen, wie wir bereits schon bemerkt haben, vier Harmonicalen.

Die beiden Asymptoten und irgend zwei zugeordnete Durchmesser einer Curve zweiter Classe bilden ein System von vier Harmonicalen.

Nach dem vorstehenden Satze ergibt sich auf die leichteste Weise die Construction folgender beiden Aufgaben:

Wenn die Richtung der beiden Asymptoten und eines Durchmessers einer Curve zweiter Classe gegeben ist, die Richtung des zugeordneten Durchmessers zu finden.

Wenn die Richtung irgend zweier zugeordneten Durchmesser und einer Asymptote einer Hyperbel gegeben ist, die Richtung der andern Asymptote zu bestimmen.

Und endlich schliesst sich hier auch noch folgende Aufgabe an:

Wenn die Richtung irgend zweier Paare zugeordneter Durchmesser einer Curve zweiter Classe gegeben ist, die Richtung der beiden Asymptoten zu bestimmen.

Diese letzte Aufgabe kömmt darauf hinaus, zwei gerade Linien zu construiren, die mit jedem der beiden Paare zugeordneter Durchmesser ein System von vier Harmonicalen bilden, und hierzu gelangen wir durch die Construction der Wurzeln einer leicht zu entwickelnden quadratischen Gleichung. Für den Falle, dass diese Wurzeln imaginär werden, sind die Curven, denen jene beiden Paare zugeordneter Durchmesser angehören, Ellipsen.

An die letzten Bemerkungen knüpft sich auch noch folgender Satz:

Wenn man einer Asymptote einer Hyperbel irgend eine gerade Linie parallel zieht, so werden von irgend zwei Durchmessern und ihren beiden zugeordneten auf dieser geraden Linie gleiche Stücke interceptirt. —

499. Wenn wir die Grössen der in die beiden Coordinaten-Axen fallenden Durchmesser der Curve zweiter Classe als Constante in der Gleichung derselben einführen und demnach

$$\sqrt{-\frac{C}{A}} = a,$$
$$\sqrt{-\frac{F}{A}} = b,$$

setzen, so geht die Gleichung (21) in folgende über:

$$w^2 = a^2v^2 + b^2u^2.$$

Für den Fall der Ellipse sind a und b beide reell; für den Fall der Hyperbel ist eine dieser beiden Grössen reell, die andere imaginär. Vertauschen wir demnach, wenn a oder b imaginär werden, diese Grössen mit $a\sqrt{-1}$ und $b\sqrt{-1}$, so erhalten wir:

$$w = \pm a^2v^2 \mp b^2u^2,$$

für die Gleichung einer auf zwei ihrer zugeordneten Durchmesser bezogenen Hyperbel. Wir müssen in dieser Gleichung die obern oder untern Zeichen nehmen, je nachdem die erste oder zweite Coordinaten-Axe der Curve begegnet. Von zweien zugeordneten Durchmessern einer Hyperbel ist immer einer imaginär. Gewöhnlich aber nimmt man für diesen Durchmesser eine reelle Grösse und nennt z. B. a und b diejenigen halben Durchmesser der durch die letzte Gleichung dargestellten Hyperbel, die in die erste und zweite Coordinaten-Axe fallen. —

500. Zwei zugeordnete Durchmesser einer Curve zweiter Classe, die auf einander senkrecht stehen, heissen die Axen der Curve. Wenn wir annehmen, dass der Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve falle, und wir also folgende Gleichung zu Grunde legen:

$$Aw^2 + Cv^2 + 2Euv + Fu^2 = 0, \qquad (22)$$

so erhalten wir, um die Richtung der beiden Axen zu bestimmen, folgende beide Gleichungen:

$$\begin{aligned} Cv'v'' + E(v'+v'') + F &= 0, \\ v'v'' + (v'+v'')\cos\vartheta + 1 &= 0. \end{aligned} \qquad (23)$$

Da diese beiden Gleichungen in Beziehung auf v' und v'' symmetrisch sind, so sind diese Grössen Wurzeln derselben Gleichung des zweiten Grades, und diese Gleichung erhalten wir sogleich, wenn wir zwischen den vorstehenden beiden Gleichungen die Werthe von $v'v''$ und $(v'+v'')$ eliminiren. Man findet:

$$v^2 + \frac{F-C}{E-C\cos\vartheta}v - \frac{E-F\cos\vartheta}{E-C\cos\vartheta} = 0. \qquad (24)$$

Wenn:

$$F = C,$$

so reducirt sich die vorstehende Gleichung auf folgende:

$$v^2 - 1 = 0.$$

Bezeichnen wir den Winkel, welchen eine der beiden Axen der Curve mit der ersten Coordinaten-Axe bildet, durch ω, so sind die beiden Wurzeln der Gleichung (24):

$$-\frac{\sin\omega}{\sin(\vartheta-\omega)} \text{ und } -\frac{\sin(\omega+\tfrac{1}{2}\pi)}{\sin(\vartheta-\omega-\tfrac{1}{2}\pi)} = \frac{\cos\omega}{\cos(\vartheta-\omega)},$$

und da die Summe dieser Wurzeln für den in Rede stehenden Fall Null ist, so kommt:

$$0 = \sin(\vartheta-\omega)\cos\omega - \sin\omega\cos(\vartheta-\omega) = \sin(\vartheta-2\omega),$$

also ist $\omega = \tfrac{1}{2}\vartheta$, und somit halbiren die beiden Axen die beiden Paare der von den Coordinaten-Axen gebildeten Scheitelwinkel.

Die beiden Coefficienten in der Gleichung (24) erscheinen unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$, oder, was dasselbe heisst, die beiden Gleichungen (23) werden identisch, wenn

$$F = C, \qquad E - C\cos\vartheta = E - F\cos\vartheta = 0.$$

Alsdann gibt es nur rechtwinklige Systeme zugeordneter Durchmesser und die erste der Gleichungen (23) drückt anders nichts aus, als dass je zwei sich rechtwinklig schneidende Durchmesser zugeordnete sind.

Wenn wir statt der Gleichung (22) die allgemeinste Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = o,$$

zu Grunde legen; so gehen die beiden letzten Bedingungs-Gleichungen in folgende über:

$$AC-B^2 = AF-D^2; \qquad AE-BD = (AC-B^2)cos\vartheta.$$

Wir können der allgemeinen Gleichung, nachdem wir dieselbe mit A multiplicirt haben, folgende Form geben:

$$(Aw^2+Bv+Du)^2+(AC-B^2)v^2+2(AE-BD)uv+(AF-D^2)u^2 = o,$$

und dann erhalten wir mit Berücksichtigung der letzten Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{v^2+2uvcos\vartheta+u^2}{(Aw+Bv+Du)^2} = B^2-AC.$$

In dieser Gleichung erkennen wir (442) sogleich die Gleichung eines Kreises wieder, dessen Mittelpuncts-Coordinaten $\frac{B}{A}$ und $\frac{D}{A}$ sind und dessen Radius $\sqrt{B^2-AC}$ ist.

Je zwei zugeordnete Durchmesser eines Kreises stehen auf einander senkrecht; und, umgekehrt, je zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser eines Kreises sind zugeordnete.

501. Wenn wir annehmen, dass der Coordinaten-Winkel ein rechter sei, so verwandelt sich die Gleichung (24) in folgende:

$$v^2+\frac{F-C}{E}v-1 = o, \qquad (25)$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind die, mit entgegengesetztem Zeichen genommenen, trigonometrischen Tangenten derjenigen beiden Winkel, welche die beiden Axen der Curve mit der ersten Coordinaten-Axe bilden. Nennen wir diese Winkel ω und ω', so ist $\omega' = \omega+{}^1/_2\pi$, mithin:

$$tang2\omega = tang2\omega',$$

und da:

$$tang2\omega = \frac{2tang\omega}{1-tang^2\omega} = -\frac{2v}{1-v^2},$$

und ferner nach (25):

$$\frac{1-v^2}{v} = \frac{F-C}{E},$$

so kommt:

$$tang2\omega = \frac{2E}{C-F} = tang2\omega'.$$

502. Wenn der Winkel, den zwei zugeordnete Durchmesser mit einander bilden, irgend ein gegebener ist, so können wir die Richtungen dieser Durchmesser selbst leicht bestimmen. Denn, bezeichnen wir jenen Winkel durch ξ und diejenigen beiden Winkel, welche die Durchmesser mit der ersten Axe bilden, durch ω und ω', so ist $\xi = \omega'-\omega$ mithin:

$$tang\omega' = \frac{tang\omega+tang\xi}{1-tang\omega tang\xi}.$$

Neben dieser Gleichung erhalten wir, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, nachstehende Gleichung, welche ausdrückt, dass die durch jene Werthe von ω und ω' bestimmten Durchmesser zugeordnete sind:

$$Ctang\omega tang\omega'-E(tang\omega+tang\omega')+F = o.$$

Eliminiren wir zwischen diesen beiden Gleichungen $tang\omega'$, so ergibt sich folgende Glei-

chung des zweiten Grades zur Bestimmung von $tang\omega$:

$$tang^2\omega - \frac{2E-(C-F)tang\xi}{C+Etang\xi}tang\omega + \frac{F-Etang\xi}{C+Etang\xi} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$tang\omega = \frac{2E-(C-F)tang\xi \pm \sqrt{[(C+F)^2tang^2\xi+4(E^2-CF)(1+tang^2\xi)]}}{2(C+Etang\xi)}.$$

Diesen beiden Werthen für $tang\omega$ entsprechen zwei Werthe für $tang\omega'$ oder $tang(\omega+\xi)$, die wir unmittelbar erhalten, wenn wir in den vorstehenden Ausdrücken für $tang\omega$ das Zeichen von $tang\xi$ ändern (246).

Es gibt also im Allgemeinen zwei Systeme zugeordneter Durchmesser, die einen gegebenen Winkel mit einander bilden. Diese beiden Systeme fallen zusammen, wenn der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in den Werthen von $tang w$ verschwindet. Alsdann ist:

$$sin^2\xi = 4.\frac{CF-E^2}{(C+F)^2}. \qquad (26)$$

Diese Gleichung gibt das Minimum für den Sinus der Winkel, die irgend zwei zugeordnete Durchmesser mit einander bilden können. Es kann diese Gleichung nur für den Fall der Ellipse befriedigt werden, nur hier gibt es ein Minimum, während, wenn die bezügliche Curve eine Hyperbel ist, der Winkel zugeordneter Durchmesser jeder beliebige sein kann. Für den Fall des Kreises reducirt sich die letzte Gleichung auf:

$$sin^2\xi = 1:$$

es gibt, wie wir schon bemerkt haben, nur rechtwinklige Systeme zugeordneter Durchmesser. —

503. Wenn wir von der Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+2Duw+C(v^2+u^2) = 0, \qquad (1)$$

die bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, irgend einen Ort zweiter Classe darstellt, dessen Brennpunct zum Anfangspuncte der Coordinaten genommen worden ist, ausgehen, und die der umgeformten Gleichung (2) der 486. Nummer entsprechende Gleichung, der Kürze halber auf folgende Weise schreiben:

$$Aw^2+2B'vw+2D'uw+C'v^2+2E'uv+F'u^2 = 0,$$

so kommt, indem wir:

$$sin\psi = -cos\varphi, \qquad sin\psi' = -cos\varphi',$$
$$C = F, \qquad E = 0,$$

setzen:

$$E' = -\frac{C(sin\varphi sin\varphi'+cos\varphi cos\varphi')}{sin^2\xi} = -\frac{Ccos(\varphi'-\varphi)}{sin^2\xi} = -\frac{Ccos\xi}{sin^2\xi},$$

$$C' = F' = \frac{C}{sin^2\xi}.$$

Die umgeformte Gleichung ist hiernach folgende:

$$(Aw^2+2B'vw+2D'uw)sin^2\xi+C(v^2-uvcos\xi+u^2) = 0. \qquad (2)$$

Diese Gleichung ist also, wenn wir A, B', D' und C als unbestimmte Coefficienten betrachten, die allgemeine Gleichung der Curven zweiter Classe, wenn wir den Anfangspunct in einen Brennpunct derselben legen und ξ der beliebige Coordinaten-Winkel ist. Aus der Zusammenstellung der beiden Gleichungen (1) und (2) ergeben sich direct die Folgerungen, bei denen wir schon in der 476. Nummer verweilt haben. Wenn ξ ein rechter Winkel ist, so geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$Aw^2+2B'vw+2D'uw+C(v^2+u^2) = o, \qquad (3)$$

eine Gleichung, welche, ausser dass die beiden Coefficienten von vw und uw andere Werthe erhalten, mit der ursprünglichen Gleichung identisch ist. Wir haben in diesem Falle, indem wir:

$$sin\varphi' = cos\varphi, \quad sin\psi = -cos\varphi, \quad sin\psi' = sin\varphi, \quad sin\xi = 1,$$

setzen, folgende Bestimmung dieser Coefficienten:

$$B' = Bcos\varphi+Dsin\varphi, \qquad D' = -(Bsin\varphi-Dcos\varphi). \qquad (4)$$

Hiernach erhält man ferner für jede Annahme des Winkels φ:

$$B'^2+D'^2 = B^2+D^2;$$

ein Resultat, das wir, wenigstens für den Fall der Ellipse und Hyperbel, hätten voraussehen können, weil die letzten Ausdrücke, dividirt durch A^2, anders nichts sind, als das Quadrat der Entfernung des Brennpunctes vom Mittelpuncte der Curve. Es ist also auch, wenn wir ein und dieselbe Curve um den Anfangspunct, wenn derselbe im Brennpuncte angenommen wird, beliebig drehen, in der Gleichung derselben die Quadrat-Summe der Coefficienten von vw und uw constant.

Wenn wir die Coordinaten-Axen so drehen, dass die eine derselben, etwa die erste Axe, durch den Mittelpunct der Curve geht, so wird D' gleich Null und folglich:

$$B' = \pm\sqrt{B^2+D^2},$$

und wir erhalten statt (3):

$$Aw^2\pm2\sqrt{(B^2+D^2)}.\ vw+C(v^2+u^2). \qquad (5)$$

504. Für den Fall der Parabel verwandeln sich die Gleichungen (1) und (5) in folgende:

$$2Bvw+2Duw+C(v^2+u^2) = o,$$
$$vw+P(v^2+u^2) = o,$$

indem wir in der letzten Gleichung:

$$\frac{\pm C}{\sqrt{(B^2+D^2)}} = 2P$$

setzen. Es bedeuten, wie man sogleich sieht, die Ausdrücke $\frac{C}{2B}$ und $\frac{C}{2D}$ diejenigen Segmente, die auf der ursprünglichen ersten und zweiten Axe von solchen zwei Tangenten, die der zweiten und ersten Axe parallel sind, bestimmt werden. Die Quadrat-Summe der reciproken Werthe dieser Segmente

$$4.\frac{B^2+D^2}{C^2}$$

ist also constant und gleich $\frac{1}{P^2}$; P ist die Entfernung des Brennpunctes vom Scheitel der Axe der Parabel. Das Vierfache dieser Entfernung heisst Parameter.

Die erste der Gleichungen (4) gibt, wenn wir D = o setzen:

$$B' = Bcos\varphi,$$

und mithin kommt:

$$\frac{C}{2B'}cos\varphi = \frac{C}{2B} = P.$$

Die geometrische Deutung dieser Gleichung gibt folgenden bekannten Satz:

Die Fusspuncte der vom Brennpuncte einer gegebenen Parabel auf alle Tangenten derselben gefällten Perpendikel liegen in gerader Linie, der Tangente im Scheitel der Axe.

Die analogen Sätze für Ellipse und Hyperbel haben wir schon angeführt (479).

505. Nach dem Vorstehenden können wir alle diejenigen Curven, welche dieselben beiden Brennpuncte haben, wenn wir die erste Coordinaten-Axe durch diese beiden Puncte legen und einen derselben zum Anfangspuncte nehmen, durch folgende Gleichung darstellen:

$$w^2+2Bvw+C(v^2+u^2) = 0,$$

indem wir durch $2B$ die Entfernung der beiden Brennpuncte von einander und durch C nach einander alle möglichen Grössen bezeichnen.

506. An die letzten Entwicklungen knüpft sich auf eine bequeme Weise die Bestimmung der Dimensionen einer durch die allgemeine Gleichung:

$$2Bvw+2Duw+Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0, \qquad (1)$$

dargestellten Parabel. Wenn diese Gleichung auf schiefwinklige Coordinaten-Axen bezogen ist und wir den Coordinaten-Winkel ϑ nennen, so können wir dieselbe Curve zuvörderst auf rechtwinklige Axen beziehen. Lassen wir zu diesem Ende bloss die zweite Axe um einen Winkel $(\frac{1}{2}\pi-\vartheta)$ sich drehen, so erhalten wir, indem wir:

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \psi = -\vartheta, \quad \psi' = \tfrac{1}{2}\pi-\vartheta,$$

setzen, und

$$2B'vw+2D'uw+C'v^2+2E'uv+F'u^2 = 0, \qquad (2)$$

für die umgeformte Gleichung nehmen und nicht reduciren, nach der 486. Nummer folgende Coefficienten-Bestimmung:

$$B' = B+D\cos\vartheta, \qquad D' = D\sin\vartheta,$$
$$E' = E\sin\vartheta+F\sin\vartheta\cos\vartheta, \qquad F' = F\sin^2\vartheta,$$
$$C' = C+2E\cos\vartheta+F\cos^2\vartheta.$$

Wenn wir ferner den Anfangspunct der Coordinaten in den Brennpunct der gegebenen Parabel verlegen, so nimmt ihre Gleichung folgende Form an:

$$2B''vw+2D''uw+C''(v^2+u^2) = 0$$

und wir haben nach der 480. Nummer:

$$\frac{C''}{B''} = \frac{C'D'^2-2B'D'E'+F'B'^2}{B'(B'^2+D'^2)}$$
$$\frac{C''}{D''} = \frac{C'D'^2-2B'D'E'+F'B'^2}{D'(B'^2+D'^2)}.$$

Wenn wir wiederum den vierten Theil des Parameters P nennen, so kommt endlich nach der 504. Nummer:

$$P = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{C''^2}{B''^2+D''^2}\right)};$$

und nach successiven Substitutionen:

$$P = \pm\frac{C'D'^2-2B'D'E'+F'B'^2}{2(B'^2+D'^2)^{3/2}},$$
$$= \pm\frac{(CD^2-2BDE+FB^2)\sin^2\vartheta}{2(B^2+2BD\cos\vartheta+D^2)^{3/2}}.$$

Wir können auch auf eine ganz analoge Weise die Grösse der beiden Axen der durch die allgemeine Gleichung dargestellten mit einem Mittelpuncte versehenen Curven zweiter Classe bestimmen. Doch zu demselben Ziele kommen wir auch auf einem andern Wege, der demjenigen entspricht, auf welchem wir im ersten Bande dieselben Bestimmungen bei Gleichungen zwischen Punct-Coordinaten gemacht haben.

507. Wir wollen, indem wir für den Coordinaten-Winkel einen rechten nehmen und den Anfangspunct in den Mittelpunct der Curve legen, und, der Kürze wegen, den

Coefficienten von w^2 gleich der Einheit setzen, folgende Gleichung:

$$w^2+Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0, \qquad (1)$$

als die allgemeine Gleichung der geometrischen Oerter zweiter Classe betrachten. Um denselben Ort auf zwei andere Durchmesser als Coordinaten-Axen zu beziehen, die mit einander irgend einen Winkel ϑ und mit der ursprünglichen ersten Axe die Winkel φ und φ' bilden, so dass mithin

$$\varphi'-\varphi = \vartheta,$$

müssen wir uns nachstehender Verwandlungs-Formeln bedienen (452):

$$\frac{v}{w} = \frac{\upsilon sin\varphi'-usin\varphi}{\omega sin\vartheta}, \qquad \frac{u}{w} = -\frac{\upsilon cos\varphi'-ucos\varphi}{\omega sin\vartheta}. \qquad (G)$$

Hiernach erhalten wir statt (1) eine Gleichung, die wir folgendergestallt schreiben können:

$$\omega^2+C'\upsilon^2+2E'u\upsilon+F'u^2 = 0 \qquad (2)$$

indem wir:

$$\frac{Csin^2\varphi'-2Esin\varphi'cos\varphi'+Fcos^2\varphi'}{sin^2\vartheta} = C', \qquad (3)$$

$$\frac{Csin^2\varphi-2Esin\varphi cos\varphi+Fcos^2\varphi}{sin^2\vartheta} = F', \qquad (4)$$

$$-\frac{Csin\varphi sin\varphi'-E(sin\varphi cos\varphi'+sin\varphi' cos\varphi)+Fcos\varphi cos\varphi'}{sin^2\vartheta} = E', \qquad (5)$$

setzen. Um von der Gleichung (2) zur Gleichung (1) zurückzugehen, haben wir folgende Verwandlungs-Formeln:

$$\frac{\upsilon}{\omega} = \frac{vcos\varphi+usin\varphi}{w}, \qquad \frac{u}{\omega} = \frac{vcos\varphi'+usin\varphi'}{w}; \qquad (G')$$

und erhalten, indem wir die hierdurch angezeigten Substitutionen ausführen:

$$C = C'cos^2\varphi+2E'cos\varphi cos\varphi'+F'cos^2\varphi', \qquad (6)$$

$$F = C'sin^2\varphi+2E'sin\varphi sin\varphi'+F'sin^2\varphi', \qquad (7)$$

$$E = C'sin\varphi cos\varphi+E'(sin\varphi cos\varphi'+cos\varphi sin\varphi')+F'sin\varphi' cos\varphi'. \qquad (8)$$

508. Aus der Gleichung (3), (4) und (5) erhalten wir, wenn wir darauf Rücksicht nehmen, dass ϑ gleich $(\varphi'-\varphi)$ ist, nach einigen trigonometrischen Umformungen:

$$E'^2-C'F' = \frac{E^2-CF}{sin^2\vartheta},$$

mithin:

$$(E'^2-C'F')sin^2\vartheta = E^2-CF. \qquad (9)$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir, wenn wir die Gleichungen (6) und (7) addiren:

$$C'+2E'cos\vartheta+F' = C+F. \qquad (10)$$

Aus den Gleichungen (9) und (10) folgt, dass die Ausdrücke:

$$(E'^2-C'F')sin^2\vartheta, \qquad C'+2E'cos\vartheta+F' \qquad (11)$$

unverändert dieselben bleiben, auf welche zwei, irgend einen Winkel ϑ einschliessende, Durchmesser wir auch die Gleichung der gegebenen Curve beziehen mögen.

Wenn wir die gegebene Curve auf beliebige, aber unter rechten Winkeln sich schneidende, Durchmesser beziehen, so sind folgende Ausdrücke constant:

$$E'^2-C'F', \qquad C'+F'. \qquad (12)$$

Wenn wir endlich nur zugeordnete Durchmesser zu Coordinaten-Axen nehmen, so sind folgende Ausdrücke constant:

$$C'F'sin^2\vartheta, \qquad C'+F'. \qquad (13)$$

509. Die Deutung der vorstehenden Resultate führt uns zu bekannten Sätzen. Es seien zuvörderst:

$$w^2 = a^2v^2+b^2u^2,$$
$$w^2 = a'^2v^2+b'^2u^2,$$

die Gleichungen irgend einer Ellipse, bezogen auf zwei verschiedene Systeme zugeordneter Durchmesser. Alsdann ist (13):

$$a^2b^2\sin^2\vartheta = a'^2b'^2\sin^2\vartheta',$$

wenn wir die von den beiden Paaren zugeordneten Durchmesser eingeschlossenen Winkel ϑ und ϑ' nennen. Es ist also auch:

$$4ab\sin\vartheta = 4a'b'\sin\vartheta':$$

Alle um eine gegebene Ellipse beschriebenen Parallelogramme, deren gegenüberliegende Seiten zweien zugeordneten Durchmessern parallel sind, sind einander gleich.

Es ist ferner (13):

$$a^2+b^2 = a'^2+b'^2:$$

Die Summe der Quadrate irgend zweier zugeordneter Durchmesser einer gegebenen Ellipse bleibt sich immer gleich.

510. Wenn

$$w^2+cv^2+2cuv+fu^2 = 0$$

die Gleichung einer auf zwei sich unter rechten Winkeln schneidende Durchmesser bezogenen Ellipse ist, so ist (12)

$$c+f$$

constant, wie wir auch jene rechtwinkligen Durchmesser annehmen mögen. Es ist aber sogleich ersichtlich, dass $(-c)$ und $(-f)$ die Quadrate derjenigen Segmente sind, die auf der ersten und zweiten Axe von solchen Tangenten der Ellipse, die bezüglich der zweiten und ersten Axe parallel sind, abgeschnitten werden. Die Summe dieser Quadrate ist also constant und zwar gleich der Quadratsumme der beiden halben Axen der Curve. Man sieht hieraus, dass die Diagonalen aller um eine gegebene Ellipse beschriebenen Rechtecke dieselbe Länge haben und doppelt so gross sind, als diejenige Chorde, welche die Scheitel der beiden Axen der Ellipse verbindet. Also (I, 343):

Der Ort für die Durchschnitte zweier auf einander senkrechten Tangenten einer gegebenen Ellipse (oder Hyperbel) ist ein Kreis. *)

511. Wenn die Coordinaten-Axen, auf welche wir ein und dieselbe gegebene Curve zweiter Classe beziehen, irgend zwei beliebige sind, und wir demnach die allgemeine Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

---

*) In der Behandlung der geometrischen Oerter zweiter Ordnung haben wir gezeigt, dass

$$\mu+\beta$$

constant ist, wenn die allgemeine Gleichung:

$$\mu y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+1 = 0,$$

dieselbe Ellipse auf beliebige rechtwinkliche Coordinaten-Axen bezogen, darstellen soll. Wenn γ und δ gleich Null sind und also der Anfangspunct der Coordinaten in den Mittelpunct der Curve fällt, so bedeuten $\frac{1}{\beta}$ und $\frac{1}{\mu}$ die Quadrate der halben in die Coordinaten-Axen fallenden Durchmesser. Also:

Die Summe der Quadrate der reciproken Werthe irgend zweier auf einander senkrecht-stehender Durchmesser einer Ellipse oder Hyperbel ist eine constante Grösse.

zu Grunde legen, so können wir für diesen allgemeinsten Fall unmittelbar die Ausdrücke der letzten Nummern umformen, indem wir (455):

$$\frac{AC-B^2}{A^2},\quad \frac{AE-BD}{A^2},\quad \frac{AF-D^2}{A^2}$$

für C, E und F schreiben. Statt der Ausdrücke (11) erhalten wir alsdann folgende:

$$\frac{[(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)]\sin^2\vartheta}{A^4}, \qquad (14)$$

$$\frac{(AC-B^2)+2(AE-BD)\cos\vartheta+(AF-D^2)}{A^4}; \qquad (15)$$

indem wir, wie dort, den jedesmaligen Coordinaten-Winkel durch ϑ bezeichnen. Für den Fall der Parabel, wo $A = o$, werden die beiden vorstehendrn Ausdrücke unendlich. Wenn aber A nicht gleich Null ist, und wir dasselbe ein für alle Mal beliebig annehmen, so sind diese Ausdrücke constant, auf welches Coordinaten-System wir die gegebene Curve auch beziehen mögen. Indem wir insbesondere zwei zugeordnete Durchmesser der Curve, die irgend einen Winkel ξ mit einander bilden, als Coordinaten-Axen nehmen, erhalten wir, wenn wir die Quadrate dieser Durchmesser durch z' und z'' bezeichnen, und, der Einfachheit halber, in der allgemeinen Gleichung $A = 1$ setzen:

$$z'+z'' = (C-B^2)+2(E-BD)\cos\vartheta+(F-D^2),$$

$$-z'z''\sin^2\xi = [(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2)]\sin^2\vartheta.$$

z' und z'' sind also die beiden Wurzeln folgender quadratischer Gleichung:

$$z^2-[(C-B^2)+2(E-BD)\cos\vartheta+(F-D^2)]z-\frac{\sin^2\vartheta}{\sin^2\xi}[(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2)] = o. \quad (16)$$

Wenn das letzte Glied dieser Gleichung negativ ist, so lehrt die Theorie der algebraischen Gleichungen, dass die Wurzeln beide reell und von entgegengesetztem Zeichen sind. Für diesen Fall, wo die bezügliche Curve eine Hyperbel ist, haben wir also folgende Bedingung:

$$(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2) > o,$$

in Uebereinstimmung mit der 457. Nummer.

Die Hyperbel ist eine gleichseitige, wenn das mit der ersten Potenz von z behaftete Glied aus der obigen Gleichung ausfällt, also in dem Falle, dass:

$$(C-B^2)+2(E-BD)\cos\vartheta+(F-D^2) = o.$$

Wenn das von z unabhängige Glied der Gleichung (16) einen positiven Werth erhält, so sind die Wurzeln dieser Gleichung entweder imaginär oder reell und von demselben Zeichen. Diesem Falle entspricht die Bedingung:

$$(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2) < o. \qquad (17)$$

In dem Falle reeller Wurzeln können beide positiv oder beide negativ sein, einmal ist die Curve eine Ellipse, das andere Mal ist dieselbe imaginär. Jenes findet Statt, wenn der Coefficient von z in der Gleichung (16) negativ, dieses, wenn derselbe positiv ist. Dieser Coefficient:

$$-[(C-B^2)+2(E-BD)\cos\vartheta+(F-D^2)], \qquad (18)$$

hat offenbar das entgegengesetzte Zeichen mit den Ausdrücken:

$$(C-B^2) \text{ und } (F-D^2), \qquad (19)$$

die nach der vorstehenden Bedingung nothwendig im Zeichen übereinstimmen müssen. Wenn nemlich dem Ausdrucke (18) dasselbe Zeichen als den Ausdrücken (19) zukommen sollte, so müsste $2(E-BD)\cos\vartheta$ mit den beiden letztgenannten Ausdrücken von entgegen-

gesetztem Zeichen und, abgesehen vom Zeichen, grösser als die Summe dieser Ausdrücke sein, was unmöglich ist, da, nach (17):

$$(E-BD) < \sqrt{[(C-B^2)(F-D^2)]}.$$

Für den Fall der Ellipse sind also die Ausdrücke (19) negativ; sie sind positiv für den Fall, dass die bezügliche Curve imaginär ist.

512. Die beiden Wurzeln der Gleichung (16) sind:

$$z = \tfrac{1}{2}[(C-B^2)+2(E-BD)\cos\vartheta+(F-D^2)],$$
$$\pm\frac{\sqrt{([C-B^2+2(E-BD)\cos\vartheta+F-D^2]^2\sin^2\xi+4[(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2)]\sin^2\vartheta)}}{2\sin\xi}, \quad (20).$$

und als Bedingung für die Realität dieser Wurzeln erhalten wir:

$$\sin^2\xi > -4.\frac{(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2)}{(C-B^2+2(E-BD)\cos\vartheta+F-D^2)^2}.\sin^2\vartheta.$$

Für den Fall der Hyperbel wird diese Bedingung immer erfüllt; für den Fall der Ellipse und imaginären Curve, ist, wovon man sich leicht überzeugt, derjenige Ausdruck, welcher, nach dieser Bedingung, kleiner sein muss als $\sin^2\xi$, immer kleiner als die Einheit, und somit hat die Gleichung (16) bei gehöriger Bestimmung des Winkels ξ immer reelle Wurzeln. Die Gleichung (16) hat gleiche Wurzeln, wenn:

$$\sin^2\xi = -4\frac{(E-BD)^2-(C-B^2)(F-D^2)}{(C-B^2+2(E-BD)\cos\vartheta+F-D^2)^2}.\sin^2\vartheta.$$

Dieser Werth von $\sin^2\xi$ ist derselbe, der, nach der 501. Nummer, sich auf diejenigen beiden zugeordneten Durchmesser bezieht, welche sich unter den kleinsten (und grössesten) Winkeln schneiden. Denn die letzte Gleichung geht in die Gleichung (26) der eben angezogenen Nummer über, wenn $B = D = 0$. Von allen zugeordneten Durchmessern schneiden die gleichen einander unter dem kleinsten Winkel.

Wenn wir annehmen, dass der Coordinaten-Winkel ein rechter ist, und wir die Grösse der beiden Axen bestimmen wollen, so gehen, indem wir $\vartheta = \xi = \tfrac{1}{2}\pi$ setzen, die Ausdrücke für z (20) in folgende über:

$$z = \tfrac{1}{2}((C-B^2)+(F-D^2))\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{([(C-B^2)-(F-D^2)]^2+4(E-BD)^2)}.$$

Wenn wir annehmen, dass der Anfangspunct der Coordinaten mit dem Mittelpuncte der Curve zusammenfalle, und demnach $B = D = 0$ setzen, so erhalten wir aus (16) zur Bestimmung der Quadrate der beiden Axen der Curve, folgende Gleichung:

$$z = \tfrac{1}{2}[C+2E\cos\vartheta+F]\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{[(C+2E\cos\vartheta+F)^2+4(E^2-CF)]},$$

und wenn wir überdiess noch die Annahme rechtwinkliger Coordinaten-Axen machen:

$$z = \tfrac{1}{2}(C+F)\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{[(C-F)^2+4E^2]}.$$

§ 3.

Allgemeinere Coordinaten-Bestimmung. Zweite Discussion aller einzelnen Fälle, welche die allgemeine Gleichung umfasst.

513. Wenn man in dem gewöhnlichen Systeme der Punct-Coordinaten y und x den Anfangspunct verlegt, ohne die Richtung der Axen zu ändern, so wachsen oder vermindern sich diese Coordinaten um eine constante Grösse. Wenn wir erstens, indem wir $w = 1$ setzen, jede der beiden Linien-Coordinaten v und u um eine constante Grösse

ändern, so erhalten wir aus den Gleichungen zwischen diesen Linien-Coordinaten andere Gleichungen desselben Grades und diese Umformung entspricht derjenigen Umformung der Gleichungen zwischen Punct-Coordinaten, die aus der blossen Verlegung des Anfangspunctes hervorgeht. Es tritt uns hier also die natürliche Frage entgegen, was die neuen veränderlichen Grössen bedeuten, die aus den ursprünglich gegebenen Coordinaten v und u sich ergeben, wenn wir diese um constante Grössen v' und u' wachsen oder sich vermindern lassen.

v, als Ordinate irgend einer geraden Linie QP, bedeutet den reciproken Werth des mit entgegengesetztem Zeichen genommenen, von dieser geraden Linie auf der ersten Axe bestimmten, Segmentes OP. Wir wollen die Ordinate v um eine gegebene Grösse v' verkleinern. Wenn wir diese gegebene Grösse, ähnlich wie v, als Ordinate construiren, so gehört dieselbe irgend einer geraden Linie Q'P' an, die in einem bestimmten Puncte, P', in die erste Axe einschneidet und es kommt: Fig. 9.

$$v' = -\frac{1}{OP'}.$$

Es ist hiernach, wenn wir die neue veränderliche Grösse durch $\mathfrak{v}$ bezeichnen:

$$\mathfrak{v} = v - v',$$

und also:

$$\mathfrak{v} = -\left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{OP'}\right) = \frac{OP - OP'}{OP.OP'} = \frac{P'P}{OP.OP'}.$$

Bei einer analogen Bezeichnung erhält man:

$$\mathfrak{u} = u - u' = \frac{Q'Q}{OQ.OQ'}.$$

Wenn v' und u' ihr Zeichen ändern, so rücken die beiden Puncte P' und Q' auf die negative Seite der x und y.

Wir sehen hieraus, dass, wenn wir statt v und u die neuen veränderlichen Grössen und Coordinaten, $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$, durch folgende Gleichungen einführen:

$$v = \mathfrak{v} + v', \qquad u = \mathfrak{u} + u',$$

diese neuen Coordinaten die reciproken Werthe der vierten Proportionalen zu den auf den beiden Coordinaten-Axen zwischen der beliebigen geraden Linie (v, u) und der geraden Linie (v', u') und den auf diesen Axen zwischen jeder der beiden eben bezeichneten geraden Linien und dem Anfangspuncte liegenden Segmente bedeuten. Wir können die bisherige Bestimmung der Linien-Coordinaten als einen besondern Fall dieser neuen Coordinaten-Bestimmung betrachten; denn wir kommen auf jene zurück, wenn wir die gerade Linie (v', u') sich unendlich weit vom Anfangspuncte entfernen lassen. Die neue Coordinaten-Bestimmung wird illusorisch, wenn v' und u' unendlich werden und also die gerade Linie (v', u') durch den Anfangspunct geht. Für jede durch den Durchschnitt dieser Linie mit der ersten und zweiten Axe gehende gerade Linie sind $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ gleich Null, für diese Linie selbst ist $\mathfrak{v}$ sowol als $\mathfrak{u}$ gleich Null. Je nachdem eine gerade Linie in Beziehung auf die Durchschnittspuncte P' und Q' nach der positiven oder negativen Seite der x und y einschneidet, sind $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ positiv oder negativ. Für jede durch den Anfangspunct gehende gerade Linie sind $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{u}$ beide unendlich, aber:

$$\frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}} = \frac{PP'}{OP.OP'} : \frac{QQ'}{OQ.OQ'} = \frac{1}{OP} : \frac{1}{OQ} = \frac{v}{u}.$$

514. Wir können zweitens auch, indem wir u = 1 setzen, die Linien-Coordinaten w und v um constante Grössen w' und v' sich ändern lassen. Wenn wir wiederum diese Fig. 9.

Grössen als Coordinaten irgend einer geraden Linie P'Q' betrachten, so erhalten wir:

$$w' = -OQ', \qquad v' = \frac{OQ'}{OP'}.$$

Beziehen wir ferner w und v auf irgend eine beliebige gerade Linie PQ, so ist

$$w = -OQ, \qquad v = \frac{OQ}{OP},$$

und wenn wir

$$w - w' = \varpi, \qquad v - v' = \varrho,$$

setzen, so kommt:

$$\varpi = -Q'Q,$$

$$\varrho = \frac{OQ}{OP} - \frac{OQ'}{OP'} = \frac{OQ.OP' - OQ'.OP}{OP.OP'} = \frac{Q'Q}{MN},$$

indem wir die Abscisse des Durchschnittspunctes der beiden geraden Linien PQ und P'Q', für welche sich sogleich folgender Werth ergibt:

$$\frac{OP.OP'(OQ - OQ')}{OQ.OP' - OQ'.OP},$$

durch MN bezeichnen.

Wir sehen hieraus, dass, wenn wir neue Linien-Coordinaten durch folgende beide Gleichungen:

$$w = \varpi + w', \qquad v = \varrho + v',$$

einführen, die erste dieser beiden Coordinaten, ϖ, das negativ genommene Segment bedeutet, das sich auf der zweiten Axe von ihrem Durchschnittspuncte mit der geraden Linie (w', v') bis zu ihrem Durchschnitte mit der geraden Linie (w, v) erstreckt. Die zweite neue Coordinate ϱ ist der Quotient der Abscisse des Durchschnittspunctes der beiden eben genannten geraden Linien in das, zwischen diesen beiden geraden Linien liegende, Segment der zweiten Axe. ϖ ist positiv oder negativ, je nachdem die bezügliche gerade Linie in Beziehung auf (w', v') in die zweite Axe nach der negativen oder positiven Seite der y einschneidet. ϱ ist positiv oder negativ, je nachdem das Segment Q'Q und die Abscisse MN gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben; oder, was für den Fall rechtwinkliger Axen dasselbe heisst, je nachdem

$$tang QPX < tang Q'P'X, \quad \text{oder} \quad tang QPX < tang Q'P'X.$$

Für die gerade Linie P'Q' sind ϖ und ϱ beide gleich Null. Für irgend eine gerade Linie, die mit P'Q' parallel ist, ist $\varrho = 0$. Für irgend eine der zweiten Axe parallele gerade Linie, MR, sind ϖ und ϱ beide unendlich, aber es ist:

$$\frac{\varpi}{\varrho} = -MN.$$

Wenn die gerade Linie P'Q' oder (w', v') der ersten Axe parallel ist, so haben ϱ und v dieselbe geometrische Bedeutung; wir kommen ganz auf die ursprüngliche Coordinaten-Bestimmung zurück, wenn wir diese gerade Linie mit der ersten Axe zusammenfallen lassen. Wenn die gerade Linie P'Q' der zweiten Axe parallel ist, so wird die neue Coordinaten-Bestimmung illusorisch. Wenn diese gerade Linie durch den Anfangspunct geht, so haben ϖ und w dieselbe Bedeutung und den Werth von ϱ können wir wie oben construiren. Für parallele gerade Linien hat ϱ dieselben Werthe.

515. Wir wollen, indem wir u gleich Eins setzen, von der allgemeinen Gleichung:

$$Aw^2 + 2Bvw + Cv^2 + 2Dw + 2Ev + F = 0, \qquad (1)$$

ausgehen. Diese Gleichung verwandelt sich, wenn wir

$$w = t + w', \qquad v = s + v',$$

setzen, in folgende:

$$At^2 + 2Bst + Cs^2 + 2(Aw' + Bv' + D)t + 2(Bw' + Cv' + E)s$$
$$+ Aw'^2 + 2Bv'w' + Cv'^2 + 2Dw' + 2Ev' + F = 0. \qquad (2)$$

Da wir über die beiden constanten Grössen w' und v' vorläufig durchaus keine nähere Bestimmung gemacht haben, so können wir dieselben nun so annehmen, dass die Form der letzten Gleichung sich vereinfacht. Setzen wir demnach:

$$\left.\begin{array}{l} Aw' + Bv' + D = 0, \\ Bw' + Cv' + E = 0, \end{array}\right\} \qquad (3)$$

so erhalten wir für w' und v' folgende Werthe:

$$v' = \frac{BD - AE}{AC - B^2}, \qquad w' = \frac{BE - CD}{AC - B^2}. \qquad (4)$$

Diese Coordinaten-Werthe werden nur dann unendlich oder unbestimmt, wenn

$$AC - B^2 = 0;$$

abstrahiren wir also von diesem besondern Falle, so können wir der Gleichung (2) jedesmal, und nur auf eine einzige, Weise folgende Form geben:

$$At^2 + 2Bst + Cs^2 + F' = 0, \qquad (5)$$

indem wir, der Kürze halber,

$$Aw'^2 + 2Bv'w' + Cv'^2 + 2Dw' + 2Ev' + F = F' \qquad (6)$$

setzen. Wenn wir die erste der beiden Gleichungen (3) mit w', die zweite derselben mit v' multipliciren und dann ihre Summe von der Gleichung (6) abziehen, so kommt:

$$Dw' + Ev' + F = F',$$

mithin, wenn wir für w' und v' ihre Werthe substituiren:

$$\frac{(AC - B^2)F - CD^2 + 2BDE - AE^2}{AC - B^2} = F';$$

oder auch, wie man leicht sieht:

$$-\frac{(AE - BD)^2 - (AC - B^2)(AF - D^2)}{A(AC - B^2)} = F',$$

$$-\frac{(BE - CD)^2 - (AC - B^2)(CF - E^2)}{C(AC - B^2)} = F'.$$

516. Die Gleichung:

$$t = \varkappa s, \qquad (7)$$

stellt, wenn wir durch $\varkappa$ irgend eine constante Grösse bezeichnen, einen Punct dar, und dieser Punct liegt, da in dieser Gleichung t und s zugleich verschwinden, auf der geraden Linie (w', v'). $\varkappa$ bedeutet, was sogleich aus der 514. Nummer folgt, die mit entgegengesetztem Zeichen genommene Abscisse dieses Punctes. Eliminiren wir aus dieser Gleichung und der Gleichung (5) die Werthe für t und s, d. h. für die Coordinaten der durch den Punct (7) gehenden Tangenten der gegebenen Curve zweiter Classe, so kommt:

$$s = \pm\left(\frac{-F'}{A\varkappa^2 + 2B\varkappa + C}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad t = \pm\left(\frac{-F'\varkappa^2}{A\varkappa^2 + 2B\varkappa + C}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (8)$$

Wir erhalten also, sowol für t als für s, gleiche und entgegengesetzte Werthe. Wenn wir also von irgend einem Puncte der geraden Linie (w', v') an die gegebene Curve zwei Tangenten legen, so wird das von diesen beiden Tangenten auf der zweiten Axe interceptirte Stück von jener geraden Linie (w', v') halbirt: diese Linie, die beiden Tangenten und eine, durch ihren gemeinschaftlichen Durchschnittspunct gehende, der

zweiten Axe parallele, gerade Linie, bilden also ein System von vier Harmonicalen. Setzen wir $x = \infty$, so kommt:

$$s = \pm 0, \qquad t = \pm\left(-\frac{F'}{A}\right)^{1/2}.$$

Die beiden, der geraden Linie (w', v') parallelen, Tangenten der gegebenen Curve liegen also zu beiden Seiten dieser Linie und gleich weit von ihr entfernt. (Der letzte Werth für t ist gleich demjenigen halben Durchmesser der gegebenen Curve, welcher der zweiten Axe parallel ist). Setzen wir $x = 0$, so kommt:

$$s = \pm\left(-\frac{F'}{C}\right)^{1/2}, \qquad t = \pm 0.$$

Bestimmen wir x so, dass

$$Ax^2+2Bx+C = 0, \tag{9}$$

so kommt:

$$s = \pm\infty; \qquad t = \pm\infty.$$

Für jeden der beiden so bestimmten Werthe für x erhalten wir also zwei, der zweiten Axe parallele, und zusammenfallende Tangenten: es sind diese Werthe für x die Abscissen derjenigen beiden Puncte, in welchen die gerade Linie (w', v') der Curve begegnet und die Tangenten in diesen beiden Puncten sind der zweiten Axe parallel. Alle diese Bemerkungen führen dahin, dass die gerade Linie (w', v') derjenige Durchmesser der gegebenen Curve ist, dessen zugeordneter der zweiten Axe parallel ist.

Wir sehen auf den ersten Blick, wie sich an das Vorstehende eine vollständige Bestimmung der durch die gegebene Gleichung dargestellten Curve bequem anschliesst. In dem Folgenden wollen wir indess uns bloss darauf beschränken, die Discussion der verschiedenen Fälle, welche die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen w und v umfasst, kurz anzudeuten, und zeigen, wie wir auch auf diesem andern Wege zu den Resultaten der 456. — 467. Nummer gelangen können.

517. Wenn wir erstens annehmen, dass

$$AC-B^2 < 0, \tag{10}$$

so hat die Gleichung (9) reelle Wurzeln, die wir x' und x'' nennen wollen und die gerade Linie (w', v') begegnet also der Curve wirklich in zwei Puncten, deren Abscissen jene beiden Wurzeln sind. Für gewisse Werthe von x erhält man also reelle, für andere Werthe von x imaginäre Tangenten. Wir können dem Ausdrucke unter dem Wurzelzeichen in dem Werthe für s folgende Form geben:

$$\frac{-F'}{A(x-x')(x-x'')},$$

und dieser Ausdruck muss positiv sein, wenn die bezüglichen Tangenten reell sein sollen.

Wenn:

$$\frac{F'}{A} < 0 \quad \text{oder} \quad \frac{F'}{A} > 0,$$

so ergibt sich, wenn wir für F' seinen Werth substituiren und auf die Bedingung (10) Rücksicht nehmen:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) < 0 \tag{11}$$

oder:

$$(AE-BD)^2-(AE-B^2)(AF-D^2) > 0. \tag{12}$$

Wenn also die Bedingung (11) neben der Bedingung (10) besteht, so erhalten wir nur dann reelle Tangenten, wenn wir für x einen solchen Werth annehmen, der nicht

zwischen x' und x'' fällt. Es kann dieser Werth bis $\pm\infty$ wachsen und abnehmen. Die durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellte Curve liegt in diesem Falle ganz innerhalb der beiden der zweiten Axe parallelen Tangenten, ist eine geschlossene Curve und heisst Ellipse.

Wenn hingegen die Bedingung (12) zugleich mit der Bedingung (10) besteht, so entsprechen nur solchen Werthen von x reelle Tangenten, die zwischen x' und x'' fallen. Es gibt alsdann einen grössten negativen Werth für den Ausdruck:

$$(x-x')(x-x''). \qquad (13)$$

Bekanntlich erhalten wir diesen, wenn wir

$$x = \frac{x'+x''}{2}$$

setzen und also der durch (7) dargestellte Punct die Mitte des von der Curve auf der geraden Linie (w′, v′) interceptirten Segmentes (der Mittelpunct der Curve) ist. Es ergibt sich für die Abscisse dieser Mitte aus (9):

$$-\frac{x'+x''}{2} = \frac{B}{A}.$$

Dem auf diese Weise bestimmten *maximum* entspricht ein kleinster positiver und negativer Werth von s. Wenn wir also von einem derjenigen beiden Puncte der geraden Linie (w′, v′), auf welche x' und x'' sich beziehen, die auf der Curve liegen und in denen die Tangenten der zweiten Axe parallel sind, zu Puncten übergehen, welche zwischen denselben liegen, so nähert sich die Richtung der durch solche Puncte gehenden Tangenten immer mehr der Richtung der geraden Linie (w′, v′), bis wir zu jenem Puncte kommen, der in der Mitte der beiden eben bezeichneten liegt. Die beiden Tangenten, die dieser Gränze entsprechen, heissen Asymptoten. Denken wir uns nun die Puncte der Curve als die Durchschnitte der stetig auf einander folgenden Tangenten, so ist offenbar, dass diese Curve aus zwei Zweigen besteht, die ganz auf den beiden äussern Seiten der, der zweiten Axe parallelen, Tangenten liegen. Die Puncte dieser beiden Zweige liegen immer weiter von diesen Tangenten entfernt, je mehr sich die ihnen entsprechenden Tangenten den Asymptoten nähern. Die Berührungspuncte auf den Asymptoten liegen unendlich weit, oder wenn man sich so ausdrücken will, jede Asymptote schneidet die beiden Zweige in zwei, nach entgegengesetzter Seite hin, unendlich weit entfernt liegenden Puncten und solche Puncte sind als zusammenfallend zu betrachten; sie bildet den Uebergang von den Tangenten, die einen Zweig berühren, zu den Tangenten, die den andern Zweig berühren.

Die Curve, welche in dem in Rede stehenden Fall durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellt wird, heisst Hyperbel, und liegt in denjenigen beiden von den Asymptoten gebildeten Scheitelwinkeln, in denen derjenige Durchmesser nicht liegt, welcher der zweiten Axe parallel ist.

518. Wenn A = o, so reduciren sich die Gleichungen (8) auf folgende:

$$s = \pm\left(\frac{-F'}{2Bx+C}\right)^{1/2} \qquad t = \pm\left(\frac{-F'x^2}{2Bx+C}\right)^{1/2}.$$

Nehmen wir in der ersten dieser beiden Gleichungen:

$$x = -\frac{C}{2B} = x',$$

so erhalten wir:

$$s = \pm\infty.$$

Die gerade Linie (w', v') begegnet der Curve nur in dem einzigen Puncte, dessen Abscisse gleich ist $(-x')$ und nur in diesem Puncte ist die Tangente der zweiten Axe parallel. Nehmen wir $x = \infty$, so kommt:

$$s = \pm 0, \qquad t = \pm\infty.$$

Die Curve erstreckt sich also zu beiden Seiten der geraden Linie (w', v') ins Unendliche. Dem allgemeinen Ausdrucke für s können wir folgende Form geben:

$$s = \pm\left(\frac{-F'}{B(x-x')}\right)^{1/2}.$$

Der Werth für F' reducirt sich in vorliegendem Falle auf:

$$\frac{FB^2-2BDE+CD^2}{B^2}.$$

Nehmen wir daher an, was immer erlaubt ist, B sei positiv, so ist $\left(-\frac{F}{B}\right)$ positiv oder negativ, je nachdem:

$$FB^2-2BDE+CD^2 < 0, \qquad (14)$$

oder:

$$FB^2-2BDE+CD^2 > 0. \qquad (15)$$

Wenn die Bedingung (14) erfüllt wird, so ist also der Werth von s reell, wenn wir:

$$x > x'$$

nehmen, und imaginär im entgegengesetzten Falle; d. h. alle reelle Tangenten schneiden in Beziehung auf die der zweiten Axe parallele Tangente nach der positiven Seite der x in die gerade Linie (w', v') ein. Die Curve liegt also ganz nach der negativen Seite und erstreckt sich nach dieser Seite hin ins Unendliche. Wenn statt der Bedingung (14) die Bedingung (15) befriedigt wird, erhalten wir gerade die umgekehrten Beziehungen.

Die durch die allgemeine Gleichung (1), in dem Falle, dass A = 0 ist, dargestellte Curve heisst Parabel.

519. Wenn wir zweitens annehmen, dass

$$AC-B^2 > 0, \qquad (16)$$

so sind die beiden Wurzeln der Gleichung (9) imaginär und das Zeichen des ersten Theiles dieser Gleichung stimmt immer mit dem Zeichen des Werthes von A überein, wie wir auch x annehmen mögen. Je nachdem

$$\frac{F'}{A} > 0 \text{ oder } \frac{F'}{A} < 0$$

sind die Werthe für s und t immer imaginär oder immer reell. In dem ersten dieser beiden Fälle erhalten wir, wenn wir auf die Bedingung (16) Rücksicht nehmen:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) > 0, \qquad (17)$$

in dem zweiten Falle:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2) < 0. \qquad (18)$$

Wenn also die beiden Bedingungen (16) und (17) befriedigt werden, so lassen sich von keinem Puncte der geraden Linie (w', v') reelle Tangenten an die durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellte Curve legen. Diese Curve hat überhaupt keine Tangenten und ist imaginär.

Wenn hingegen den beiden Bedingungen (16) und (18) Genüge geschieht, so lassen sich von jedem Puncte der geraden Linie (w', v') zwei reelle Tangenten an die gegebene Curve legen. Die Werthe von s und t können durch keine Annahme für x unendlich werden, es gibt also keine der zweiten Axe parallele Tangenten. Es findet aber ein

maximum für den Werth von s Statt, dem ein *minimum* des Ausdruckes

$$\left(x^2+2\frac{B}{A}x+\frac{C}{A}\right)$$

entspricht. Wir erhalten dieses *minimum* bekanntlich, indem wir

$$x=-\frac{B}{A},$$

also gleich der halben Summe der (imaginären) Wurzeln der Gleichung (9) setzen. Wenn wir uns von dem durch diesen Werth von x bestimmten Puncte, auf der geraden Linie (w', v'), nach beiden Seiten hin entfernen, so erhalten wir solche Paare von Tangenten, deren Richtung sich der Richtung dieser geraden Linie immer mehr nähert, bis wir endlich diejenigen beiden Tangenten erhalten, die mit ihr parallel sind und für welche sich, indem wir $x=\infty$ setzen:

$$s=\pm o, \qquad t=\pm\sqrt{\left(-\frac{F}{A}\right)},$$

ergibt. Indem man auf diese Weise die Richtung der Tangenten, welche in den verschiedenen Puncten der geraden Linie (w', v') einschneiden, verfolgt, überzeugt man sich leicht, dass die durch die allgemeine Gleichung dargestellte Curve zwei Asymptoten hat, wodurch eine Gränze für die Richtung ihrer Tangenten bezeichnet wird. Die Curve ist eine Hyperbel und liegt in denjenigen von den beiden Asymptoten gebildeten Scheitelwinkeln, in welchen auch der, der zweiten Axe parallele, Durchmesser derselben fällt.

520. Wir haben bis jetzt denjenigen Fall unberücksichtigt gelassen, dass F' verschwindet und also:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)=o.$$

Alsdann bestehen die drei Gleichungen:

$$Aw+Bv+D=o,$$
$$Bw+Cv+E=o,$$
$$Dw+Ev+F=o,$$

zugleich und mithin liegt auch der durch die dritte dieser Gleichungen dargestellte Punct auf der geraden Linie (w', v'), welche die durch die beiden ersten Gleichungen dargestellten Puncte enthält. In diesem Falle nimmt die umgeformte Gleichung (5) folgende Form an:

$$At^2+2Bst+Cs^2=o, \qquad (19)$$

und stellt mithin ein System von zwei Puncten dar, die auf der geraden Linie (w', v') liegen. Diese beiden Puncte sind reell oder imaginär, je nachdem

$$AC-B^2<o,$$

oder:

$$AC-B^2>o,$$

Wenn insbesondere $A=o$, so verwandelt sich die Gleichung (19) in

$$s(2Bt+Cs)=o,$$

und diese Gleichung stellt, wie man leicht sieht, zwei solche Puncte dar, von welchen der eine unendlich weit entfernt liegt.

Wir erhalten die Gleichung der beiden durch (19) dargestellten Puncte in w und v, wenn wir von den neuen Coordinaten t und s zu den ursprünglichen vermittelst der Gleichungen:

$$t=w-w', \qquad s=v-v',$$

zurückgehen und für w' und v' ihre Werthe (4) substituiren.

521. In dem Falle, dass die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen w und v ein System von zwei reellen Puncten darstellt, können wir uns auch des Ausdruckes bedienen, es stelle diese Gleichung eine solche Ellipse dar, die aus irgend einer gegebenen Ellipse entstanden ist, indem eine Axe derselben unverändert geblieben, die andere aber bis zum Verschwinden abgenommen hat, so dass die beiden Hälften, in welche die Ellipse durch die erstgenannte Axe getheilt wird, in dieser Axe zusammenfallen und als eine, nach beiden Seiten hin, begränzte gerade Linie erscheinen. Jede beliebige durch einen der beiden Endpuncte derselben gehende gerade Linie ist als Tangente zu betrachten.

Man kann aber auch mit gleichem Rechte sagen, dass in dem vorliegenden Falle die allgemeine Gleichung eine Hyperbel darstelle, deren imaginäre Axe bis zum Verschwinden abgenommen hat, so dass dieselbe als eine, nach beiden Seiten hin, unbegränzte, in der Mitte aber unterbrochene gerade Linie erscheint. Als Tangente ist jede beliebige gerade Linie zu betrachten, welche durch einen derjenigen beiden Puncte geht, in welchen jene gerade Linie, nach der Mitte hin, begränzt wird.

Es erscheinen also hier, indem wir Linien-Coordinaten zu Grunde legen, eine Ellipse und eine Hyperbel, die eine Axe gemeinschaftlich haben, und deren andere Axe bis zum Verschwinden abgenommen hat, oder, mit andern Worten, eine begränzte gerade Linie, und die Verlängerungen derselben, nach beiden Seiten, ins Unendliche hin, in analytischer Hinsicht als identisch unter sich und mit einem Systeme von zwei Puncten. Ein solches System von zwei Puncten bildet den Uebergang von Ellipsen zu Hyperbeln; die zweite reelle Axe der Ellipse geht, indem sie, oder vielmehr ihr Quadrat, durch Null geht, in die imaginäre zweite Axe der Hyperbel über.

Wenn wir die reelle Axe einer gegebenen Hyperbel immer mehr abnehmen lassen, während die imaginäre Axe unverändert bleibt, so nähert sich die Hyperbel immer mehr einer geraden Linie, und geht in diese Linie selbst über, wenn die reelle Axe gleich Null wird. Diese gerade Linie ist, in analytischer Hinsicht, als identisch zu betrachten mit einem Systeme zweier imaginärer Puncte (458) und bildet den Uebergang von einer Hyperbel zu einer imaginären Curve, wobei die reelle Axe der erstern, indem ihr Quadrat durch Null geht, imaginär wird.

Wenn der Brennpunct einer gegebenen Parabel dem Scheitel derselben sich immer mehr nähert, so nähert sich die Curve immer mehr ihrer Axe. Diese Axe, mithin eine, nach einer Seite hin, begränzte, nach der andern Seite hin, aber unbegränzte gerade Linie, die mit dem Systeme zweier Puncte, von welchen der eine nach der Richtung der Axe unendlich weit liegt und der andere der Scheitel derselben ist, in analytischer Hinsicht als identisch zu betrachten ist, bildet die Gränze und den Uebergang zu solchen Parabeln, die sich nach entgegengesetzter Seite hin öffnen.

522. Es bleiben uns jetzt noch diejenigen Fälle zu betrachten übrig, in welchen

$$AC-B^2 = 0, \qquad (20)$$

und also, da die gerade Linie (w', v') im Allgemeinen der zweiten Axe parallel wird, die bisherige Coordinaten-Umformung nicht mehr Statt finden kann. Setzen wir in diesen Fällen:

$$Aw'+Bv'+D = 0, \qquad (21)$$

$$Bw'+Cv'+E = E', \qquad (22)$$

so fallen, wenn wir die erste dieser beiden Gleichungen, nachdem wir sie zuvor mit

$\frac{B}{A}$ multiplicirt haben, von der zweiten abziehen, w' und v', beide zugleich aus der resultirenden Gleichung aus und wir erhalten:

$$E' = \frac{AE-BD}{A}.$$

Setzen wir überdiess:

$$Aw'^2+2Bv'w'+Cv'^2+2Dw'+2Ev'+F = o, \quad (23)$$

so geht die umgeformte Gleichung (2) in folgende über:

$$At^2+2Bst+Cs^2+2E's = o, \quad (24)$$

und dieser Gleichung können wir, mit Berücksichtigung der Bedingungs-Gleichung (20), folgende Form geben:

$$(At+Bs)^2+2AE's = o.$$

Diese Gleichung zeigt uns, dass wir, um reelle Tangenten der durch die gegebene Gleichung (1) dargestellten Curve zu erhalten, s negativ nehmen müssen, wenn

$$AE' = AE-BD > o, \quad (25)$$

und positiv, wenn

$$AE-BD < o. \quad (26)$$

In beiden Fällen sind:

$$s = \infty, \qquad s = o,$$

Gränzwerthe für die Richtung der reellen Tangenten. Der erste dieser beiden Werthe zeigt, dass die zweite Axe einer Asymptote der Curve parallel ist. Der zweite dieser Werthe bezieht sich auf die Richtung der geraden Linie (w', v'). Diese Linie ist die andere Asymptote selbst; denn sie ist eine Tangente der Curve, was daraus hervorgeht, dass, wenn s und t zugleich verschwinden, die Gleichung (24) befriedigt wird. Zugleich sehen wir, dass diese gerade Linie durch den Mittelpunct der Curve geht, denn, wenn wir in der eben angezogenen Gleichung s = o setzen, kommt

$$\frac{t}{s} = -\frac{B}{A}.$$

Um die Lage dieser Asymptote in Beziehung auf die Coordinaten-Axe zu bestimmen, müssen wir w' und v' zwischen den beiden Gleichungen (21) und (23) eliminiren. Der zweiten dieser beiden Gleichungen können wir, mit Berücksichtigung von (21) und (22), folgende Form geben:

$$E'v'+Dw'+Ev'+F = o,$$

oder, indem wir für E' seinen Werth substituiren:

$$ADw'+(2AE-BD)v'+AF = o,$$

und wenn wir zwischen dieser Gleichung und der Gleichung (21) die Werthe für w' und v' eliminiren, erhalten wir sogleich:

$$v' = \frac{1}{2}\frac{D^2-AF}{AE-BD},$$

$$w' = \frac{1}{2}\frac{ABF-2AED+BD^2}{A(AE-BD)}.$$

Wenn die Gleichung (20) befriedigt wird, so ist aus dem Vorstehenden klar, dass die durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellte Curve eine Hyperbel ist, deren eine Asymptote der zweiten Axe parallel ist. Je nachdem überdiess die Bedingung (25) oder (26) erfüllt wird, erstreckt sich ein Zweig der Hyperbel nach der positiven Seite der y und der negativen Seite der x und der andere Zweig nach der negativen Seite der y und der positiven Seite der x, oder ein Zweig erstreckt sich nach der positiven Seite der y und der x und der andere Zweig nach der negativen Seite der y und der x.

Diese letzte Bemerkung folgt unmittelbar daraus, dass für alle Tangenten der gegebenen Curve in dem ersten Falle s negativ und im zweiten Falle positiv ist (514).

523. Wenn endlich die beiden Gleichungen

$$Aw'+Bv'+D = 0, \quad Bw'+Cv'+E = 0, \qquad (27)$$

identisch sind, so erhalten wir neben der Bedingungs-Gleichung:

$$AC-B^2 = 0,$$

auch noch folgende beide Gleichungen:

$$AE-BD = 0, \qquad BE-CD = 0.$$

(Von diesen drei Gleichungen bedingen je zwei die dritte). In diesem Falle erscheinen die Werthe für w' und v' (4) unter der unbestimmten Form $\frac{0}{0}$. Indem wir die gerade Linie (w', v') beliebig durch denjenigen Punct legen, der durch die Gleichungen (27) dargestellt wird, wenn wir in diesen Gleichungen w' und v' als veränderlich betrachten, können wir der allgemeinen Gleichung auf unendlichfache Weise die Form:

$$At^2+2Bst+Cs^2+F' = 0,$$

oder:

$$(At+Bs)^2++F' = 0, \qquad (28)$$

geben. Es ist:

$$F' = Dw'+Ev'+F = \frac{AF-D^2}{A}.$$

Die Gleichung (28) stellt ein System von zwei solchen Puncten dar, die, wie man leicht einsieht, zu beiden Seiten der geraden Linie (w', v') und gleich weit von derselben entfernt, auf einer der zweiten Axe parallelen geraden Linie liegen. Diese Puncte sind reell, imaginär oder fallen zusammen, je nachdem:

$$AF-D^2 < 0, \qquad AF-D^2 > 0, \qquad AF-D^2 = 0.$$

Im letzten Falle ist noch folgende Gleichung:

$$Dw'+Ev'+F = 0,$$

mit den beiden Gleichungen (27) identisch. —

§ 4.

Geometrische Bedeutung der Constanten in der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe.

524. Wir wollen wieder, wie früher, folgende Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

als die allgemeine Gleichung der Oerter zweiter Classe betrachten, und dieser Gleichung folgende Form geben:

$$Aw^2+2(Bv+Du)w+Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0.$$

Alsdann ist sogleich ersichtlich, dass, wenn wir $u = 1$ setzen, für v irgend einen bestimmten Werth v' substituiren, und die entsprechenden Werthe von w durch w' und $w_,$ bezeichnen, für irgend zwei parallele Tangenten folgende Gleichung sich ergibt:

$$\frac{w'+w_,}{2} = -\frac{Bv'+D}{A}.$$

$\frac{w'+w_,}{2}$ und v' sind die Coordinaten einer geraden Linie, welche den beiden Tangenten

parallel ist und von beiden gleich weit absteht. Betrachten wir diese Coordinaten als veränderliche Grössen, so stellt die letzte Gleichung denjenigen geometrischen Ort dar, der von allen solchen geraden Linien, die wir für beliebige Paare paralleler Tangenten erhalten, umhüllt wird. Die letzte Gleichung geht, wenn wir w' und v an die Stelle von $\frac{w'+w_{,}}{2}$ und v' schreiben, in folgende über:

$$Aw+Bv+D = 0.$$

Da diese Gleichung vom ersten Grade ist, gehen alle jene geraden Linien durch ein und denselben Punct: den Mittelpunct der Curve. Die Coordinaten dieses Mittelpunctes, den wir durch (y', x') bezeichnen wollen, sind folgende:

$$x' = \frac{B}{A}, \qquad y' = \frac{D}{A}.$$

525. Wenn wir der allgemeinen Gleichung folgende Form geben:

$$Cv^2+2(Bw+Eu)v+Aw^2+2Duw+Fu^2 = 0,$$

u gleich Eins setzen, für w irgend einen Werth w' substituiren und die entsprechenden Werthe von v durch v' und $v_{,}$ bezeichnen, so kommt ähnlich wie eben:

$$\frac{v'+v_{,}}{2} = -\frac{Bw'+E}{C}.$$

v' und $v_{,}$ beziehen sich auf zwei durch denselben Punct der zweiten Axe gehende Tangenten der durch die allgemeine Gleichung dargestellten Curve, und $\frac{v'+v_{,}}{2}$, wie man leicht einsieht, auf eine gerade Linie, die zu jenen beiden Tangenten und der zweiten Axe als vierte Harmonicale gehört. Die letzte Gleichung zeigt, dass alle solche gerade Linien durch denselben Punct gehen, wie wir auch w' annehmen mögen. Dieser Punct heisst der Pol der zweiten Axe und für die Gleichung desselben erhalten wir

$$Bw+Cv+E = 0.$$

Die Coordinaten dieses Punctes, den wir durch (y'', x'') bezeichnen wollen, sind also:

$$x'' = \frac{C}{B}, \qquad y'' = \frac{E}{B}.$$

Wenn wir der allgemeinen Gleichung folgende Form geben:

$$Fu^2+2(Dw+Ev)u+Aw^2+2Bvw+Cv^2 = 0,$$

und v gleich Eins setzen, so gibt eine ganz analoge Schlussweise:

$$Dw+E+Fu = 0$$

für die Gleichung des Poles der ersten Axe. Bezeichnen wir daher diesen Punct durch (y''', x'''), so kommt:

$$x''' = \frac{E}{D}, \qquad y''' = \frac{F}{D}.$$

Aus der Definition des Poles der zweiten Axe oder, überhaupt, jeder beliebigen geraden Linie, folgt unmittelbar, dass, wenn dieselbe die Curve zweiter Classe in zwei Puncten schneidet, der Pol auf der Tangente in jedem dieser beiden Puncte und also im Durchschnitte dieser beiden Tangenten liegt. *)

*) I. Die Entwicklungen der beiden letzten Nummern des Textes lassen sich auf beliebige Curven jeder beliebigen Classe, das heisst, auf alle beliebigen algebraischen Curven, ausdehnen. Der allgemeinen Gleichung der Curven irgend einer n. Classe können wir folgende Form geben:

$$Aw^n+n\,w^{n-1}(Bv+C)+n(n-1)w^{n-2}(Dv^2+Ev+F)+\ldots = 0. \qquad (a)$$

526. Wenn die allgemeine Gleichung, statt eine Curve, ein System von zwei Puncten darstellt, so können wir immer noch von dem Pole einer beliebigen geraden Linie sprechen. Durch diesen Pol gehen alsdann alle solchen geraden Linien, welche zu der gegebenen geraden Linie und denjenigen beiden, die einen beliebigen Punct derselben mit den bei-

---

Wenn wir für v irgend einen Werth v′ beliebig annehmen, so erhalten wir, im Allgemeinen, n verschiedene und endliche Werthe für w, die wir durch $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$ bezeichnen wollen, und die sich auf solche n verschiedene, unter einander parallele, Tangenten der gegebenen Curve beziehen, deren Richtung durch die obige Annahme des Werthes von v bestimmt ist. Aus der allgemeinen Theorie der quadratischen Gleichung folgt alsdann:

$$\frac{w_1+w_2+w_3+\ldots+w_n}{n} = -\frac{Bv+C}{A}. \qquad (b)$$

$\left(\frac{w_1+w_2+w_3+\ldots+w_n}{n}\right)$ und v′ sind Coordinaten derjenigen geraden Linie, die mit den in Rede stehenden n parallelen Tangenten parallel ist und für welche die Ordinate des Durchschnittspunctes mit der zweiten Coordinaten-Axe das arithmetische Mittel aus den Ordinaten der entsprechenden Durchschnittspuncte jener n parallelen Tangenten ist. Es bezeichnet diese gerade Linie, um uns kurz auszudrücken, die Richtung der Mittelkraft aus n gleichen Kräften, welche nach jenen n parallelen Tangenten wirken.

Für jeden Ordinaten-Werth v′ erhalten wir einen entsprechenden Werth für $\left(\frac{w_1+w_2+w_3+\ldots+w_n}{n}\right)$; betrachten wir beide Grössen als veränderlich und schreiben w an die Stelle der letztern, so verwandelt sich die Gleichung (b) in folgende:

$$Aw+Bv+C = o, \qquad (c)$$

und stellt also einen Punct dar. Auf diese Weise ergibt sich folgender Satz:

Wenn nach allen einer beliebigen geraden Linie parallelen Tangenten irgend einer gegebenen algebraischen Curve beliebige, unter einander gleiche, Kräfte wirken, so geht die Mittelkraft aus allen diesen Kräften beständig durch einen festen Punct, wie sich die Richtung der parallelen Tangenten auch ändern mag.

Wenn die allgemeine Gleichung (a) insbesondere ein System von n Puncten darstellt, so erhalten wir einen bekannten Satz der Statik.

Man könnte, und zwar, wie mir scheint, sehr passend, den Punct (c) den Mittelpunct der gegebenen Curve n. Classe nennen. Diese Definition des Mittelpunctes ist allgemeiner als die gewöhnliche, und nach derselben hat, im Allgemeinen, jede algebraische Curve einen Mittelpunct. Wenn dieser Punct zum Anfangspuncte genommen wird, und (a) die bezügliche Curve darstellen soll, so erhält man:

$$B = o, \qquad C = o.$$

Der Mittelpunct liegt unendlich weit, und also auch eine derjenigen Tangenten, die einer beliebigen geraden Linie parallel sind, wenn

$$A = o.$$

Die Curve hat in diesem Falle einen parabolischen Zweig. Der Mittelpunct wird unbestimmt, wenn die drei letzten Gleichungen zugleich befriedigt werden. Ich gehe in kein Detail hier ein; man sieht indess leicht, wie sich hier auf sehr natürliche Weise, die Discussion der allgemeinen Gleichung der Oerter irgend einer Classe ergibt.

Wenn wir die Gleichung irgend einer Curve n. Classe zwischen den drei Coordinaten w, v und u, der Kürze halber, durch

$$U = o \qquad (d)$$

darstellen, so ergibt sich für die Gleichung ihres Mittelpunctes:

$$\frac{d^nU}{dw^n}w+\frac{d^nU}{dw^{n-1}dv}v+\frac{d^nU}{dw^{n-1}du}u = o.$$

II. Wenn wir der allgemeinen Gleichung der Curven n. Classe folgende Form geben:

$$Av^n+nv^{n-1}(Bw+C)+n(n-1)v^{n-2}(Dw^2+Ew+F)+\ldots = o$$

und diejenigen Werthe von v, die einem besondern Werthe von w, den wir durch w′ unterscheiden wollen, entsprechen, durch $v_1, v_2, v_3, \ldots v_n$ bezeichnen, so ergibt sich

den Puncten des Systems verbinden, als vierte Harmonicalen gehören. Wir erkennen hieraus leicht, dass der Pol der gegebenen geraden Linie der vierte harmonische Theilungspunct zu den beiden Puncten des Systems und dem Durchschnittspuncte der geraden Linie, welche diese beiden Puncte verbindet, mit der gegebenen geraden Linie, ist.

---

sogleich:

$$\frac{v_1+v_2+v_3+\ldots v_n}{n} = -\frac{Bw'+C}{A}.$$

Die Ordinaten v_1, v_2, v_3, ... v_n beziehen sich auf n verschiedene Tangenten der gegebenen Curve, welche durch denselben Punct der zweiten Axe gehen. $\left(\frac{v_1+v_2+v_3+\ldots v_n}{n}\right)$ und w' sind Coordinaten einer leicht zu construirenden geraden Linie, welche ebenfalls durch diesen Punct geht. Wenn man nemlich der zweiten Axe irgend eine beliebige gerade Linie parallel zieht, und den Schwerpunct gleicher Gewichte sucht, die man in dem Durchschnitte dieser Linie mit jenen n. Tangenten der gegebenen Curve sich angebracht denkt, so geht die in Rede stehende gerade Linie zugleich auch durch diesen Schwerpunct. Man kann auch, was man ohne Mühe einsieht, dieselbe gerade Linie als die Richtung der Mittelkraft aus solchen n Kräften betrachten, die nach den Richtungen der in dem durch w' bestimmten Puncte der zweiten Axe sich schneidenden n Tangenten wirken und die sich verhalten wie diejenigen Segmente dieser n Tangenten, welche zwischen ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte auf der zweiten Axe und einer beliebigen dieser Axe parallelen geraden Linie liegen. Dieselben Kräfte verhalten sich also, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, umgekehrt wie die Sinus derjenigen Winkel, welche ihre Richtungen mit der zweiten Axe bilden.

Wenn wir w' als veränderlich betrachten und mithin nach einander von verschiedenen Puncten der zweiten Axe n Tangenten an die gegebene Curve legen, so ist auch $\left(\frac{v_1+v_2+v_3+\ldots v_n}{n}\right)$ veränderlich. Schreiben wir demnach an die Stelle von w' und an die Stelle des letzten Ausdruckes w und v, so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$Av+Bw+C = o, \qquad (e)$$

und stellt mithin einen Punct dar. Diesen Punct könnte man den Pol der zweiten Axe nennen. Da für diese Axe jede beliebige gerade Linie genommen werden kann, so ergibt sich der nachstehende Satz:

Wenn eine gerade Linie und irgend eine algebraische Curve gegeben sind und man sieht von irgend einem Puncte der geraden Linie alle möglichen Tangenten an die Curve und denkt sich nach den Richtungen dieser Tangenten Kräfte wirken, die sich umgekehrt verhalten wie die Sinus derjenigen Winkel, welche die Richtungen derselben mit der gegebenen geraden Linie bilden, so dreht sich, während der beliebige Punct auf der gegebenen geraden Linie fortrückt, die Richtung der Mittelkraft um einen festen Punct.

Wir können auch hier ein System von beliebig vielen Puncten an die Stelle der Curve setzen.

Wenn wir wiederum von der Gleichung (d) ausgehen, so erhalten wir für die Gleichung des Poles der zweiten Axe:

$$\frac{d^nU}{dv^n}v+\frac{d^nU}{dv^{n-1}dw}w+\frac{d^nU}{dv^{n-1}du}u = o,$$

und hiernach für die Gleichung des Poles der ersten Axe:

$$\frac{d^nU}{du^n}u+\frac{d^nU}{du^{n-1}dw}w+\frac{d^nU}{du^{n-1}dv}v = o.$$

III. In dem Systeme der Punct-Coordinaten erhalten wir Entwicklungen, die den vorstehenden ganz analog sind. Wenn wir **erstens** der allgemeinen Gleichung der Curven m Ordnung folgende Form geben:

$$Ay^n+ny^{n-1}(Bx+Cz)+n(n-1)y^{n-2}(Dx^2+Exz+Fz^2)+\ldots = o,$$

so ist sogleich ersichtlich, dass, wenn wir $z = 1$ setzen, jedem besondern Werthe von x, und wenn wir $x = 1$ setzen, jedem besondern Werthe von z im Allgemeinen n verschie-

527. Wenn wir A = 1 nehmen, so erhalten wir aus dem Vorstehenden folgende vollständige Constanten-Bestimmung vermittelst der Coordinaten des Mittelpunctes der gegebenen Curve und der Coordinaten der Pole der beiden Axen:

---

dene Werthe von y entsprechen, welche sich auf die Durchschnitte der Curve mit einer der zweiten Axe parallelen geraden Linie beziehen. Nach derselben Schlussweise als oben gelangen wir hier zu folgendem Satze:

Wenn irgend eine algebraische Curve gegeben ist, und man bewegt in der Ebene derselben eine gerade Linie parallel mit sich selbst, so beschreibt der Schwerpunct gleicher Gewichte, die man sich in allen Durchschnittspuncten der Curve mit der geraden Linie, in deren verschiedenen Lagen, angebracht denkt, eine gerade Linie.

Wir können ein System von geraden Linien an die Stelle der gegebenen Curve setzen.

Wenn wir n = 3 setzen und insbesondere noch annehmen, dass die mit der zweiten Axe parallelen geraden Linien die Curve berühren und also überdiess dieselbe nur noch in einem einzigen Puncte schneiden, so liegen diejenigen Puncte dieser Linien, welche zwischen den Berührungs- und Durchschnittspuncten, von diesen noch einmal so weit entfernt, als von jenen, sich befinden, auf der in Rede stehenden geraden Linie, dem geometrischen Orte der im Satze bezeichneten Schwerpuncte. Wenn wir endlich, statt der Curve dritter Ordnung, ein System von drei geraden Linien betrachten, und die der zweiten Axe parallelen geraden Linien durch die Durchschnittspuncte dieser drei geraden Linien legen, so ergibt sich folgender specieller Satz:

Wenn man von jedem der drei Winkelpuncte eines gegebenen Dreiecks aus nach gegebener Richtung eine gerade Linie bis zur gegenüberliegenden Seite zieht, so liegen auf den drei resultirenden geraden Linien die Endpuncte der ersten Drittel in gerader Linie.

IV. Wenn wir **zweitens** der allgemeinen Gleichung der Curven n. Ordnung folgende Form geben:

$$Az^n+nz^{n-1}(Ay+Cx)+n(n-1)z^{n-2}(Dy^2+Exy+Fx^2)+\ldots = 0,$$

so entsprechen, indem wir x = 1 setzen, jedem beliebig angenommenen Werthe von y n verschiedene Werthe von z, und diese n Werthe von z sind die, mit entgegengesetzten Zeichen genommenen reciproken Werthe der Abstände der n Durchschnittspuncte der Curve mit einer durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden geraden Linie, deren Richtung durch den für y beliebig angenommenen Werth bestimmt ist. Die Bestimmung des arithmetischen Mittels aus den reciproken Werthen dieser n Abstände knüpft sich an die harmonische Theilung und an Betrachtungsweisen der Statik. Wenn wir nemlich zuvörderst zwei Durchschnittspuncte betrachten, deren Abstände vom Anfangspuncte wir r und r′ nennen wollen, so ist $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$ der reciproke Werth des Abstandes: $\left(\frac{2rr'}{r+r'}\right)$ und der dadurch angezeigte Punct gehört als vierter harmonischer Theilungspunct zu den beiden erstgenannten Puncten und dem Anfangspuncte; denn man hat:

$$r : \frac{2rr'}{r+r'}-r = r' : r'-\frac{2rr'}{r+r'}.$$

Wenn man ferner in den beiden Puncten (r) und (r′) sich irgend zwei solche Gewichte g und g′ angebracht denkt, deren Momente in Beziehung auf den Anfangspunct einander gleich sind, und sich also umgekehrt verhalten, wie ihre Entfernungen vom Anfangspuncte, so kann man sich die beiden Gewichte vereint in jenem vierten harmonischen Theilungspuncte $\left(\frac{2rr'}{r+r'}\right)$ angebracht denken und erhält alsdann ein Moment, das der Summe der beiden eben bezeichneten Momente gleich ist. Wenn wir diese Betrachtungen auf beliebig viele Durchschnittspuncte ausdehnen, so führt uns die, nun öfter schon angewendete, Schlussweise zu folgendem Satze:

Wenn man durch irgend einen festen Punct eine beliebige gerade Linie legt und in allen Durchschnittspuncten dieser geraden Linie mit irgend einer gegebenen algebraischen Curve Gewichte sich angebracht denkt, deren Momente in Beziehung auf den festen Punct einander gleich sind, so gibt es einen Punct, in welchem man alle diese Gewichte sich vereinigt denken kann, so dass das Moment dieser vereinigten Gewichte der Summe der Momente aller einzelnen Gewichte gleich ist: dieser Punct beschreibt eine gerade Linie, wenn die beliebige schneidende gerade Linie sich um den festen Punct dreht.

$$\begin{aligned} B &= x', \\ C &= x'x'', \\ D &= y', \\ E &= x'y'' = y'x''', \\ F &= y'y'''. \end{aligned} \qquad (1)$$

V. Wenn wir $n = 2$ nehmen, so ist bekanntlich die unter III bestimmte gerade Linie ein Durchmesser der Curve zweiter Ordnung, und zwar derjenige, dessen zugeordneter der zweiten Axe parallel ist. Alle solche gerade Linien, die der verschiedenen Annahme der Richtung der zweiten Axe entsprechen, gehen durch denselben Punct: den Mittelpunct der Curve. Für den Fall, dass $n > 2$, können wir die auf analoge Weise bestimmten geraden Linien immer noch als Durchmesser der Curve betrachten, wenn wir dieses Wort in einem weitern Sinne nehmen. Es bietet sich uns hier aber die natürliche Frage dar, ob alle solche Durchmesser, die den verschiedenen Richtungen der beliebigen geraden Linie, die wir zur zweiten Axe genommen haben, entsprechen, auch in dem allgemeinen Falle durch denselben Punct gehen, oder, wenn diess nicht geschieht, was für eine Curve von denselben umhüllt wird. Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, wollen wir von der allgemeinen Gleichung der Curven dritter Ordnung ausgehen. Auf dieselbe Weise ergibt sich leicht das allgemeine Gesetz.

Wenn wir aus der Gleichung:

$$Ay^3+Bxy^2+Cx^2y+Dx^3+Ey^2+Fxy+Gx^2+Hy+Ix+K = o, \qquad (a)$$

vermittelst der linearen Gleichung:

$$y = ax+b, \qquad (b)$$

y eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung des dritten Grades in x von folgender Form:

$$px^3+(qb+r)x^2+mx+n = o,$$

wobei wir, der Kürze halber,

$$\begin{aligned} p &= Aa^3+Ba^2+Ca+D, \\ q &= 3Aa^2+2Ba+C, \\ r &= Ea^2+Fa+G, \end{aligned}$$

setzen. Für das arithmetische Mittel x' aus den drei Wurzeln der vorstehenden Gleichung in x, ergibt sich:

$$x' = -\frac{qb+r}{3p}. \qquad (c)$$

Dieser Abscissen-Werth bezieht sich also auf den Schwerpunct gleicher Gewichte, die man sich in den drei Durchschnitten der geraden Linie (b) und der Curve (a) angebracht denkt; für die Ordinate y' dieses Punctes erhält man:

$$y' = b-a.\frac{qb+r}{3p} = \frac{(3p-aq)b-ar}{3p} = \frac{sb-ar}{3p}, \qquad (d)$$

indem man, der Kürze halber:

$$s = 3p-aq = Ba^2+2Ca+3D$$

setzt. Wenn man zwischen den beiden Gleichungen (c) und (d) b iliminirt, so kommt:

$$qy'+sx'+r = o. \qquad (e)$$

Diese Gleichung stellt, wenn wir y' und x' als veränderlich betrachten, eine gerade Linie dar und zwar diejenige, welche der geometrische Ort aller Schwerpuncte der Durchschnitte ist, wenn wir die gerade Linie (b), parallel mit sich selbst, verrücken. Bezeichnen wir diese gerade Linie durch ihre Coordinaten, so kommt:

$$u = \frac{q}{r} = \frac{3Aa^2+2Ba+C}{Ea^2+Fa+G},$$

$$v = \frac{s}{r} = \frac{Ba^2+2Ca+3D}{Ea^2+Fa+G}.$$

In diesen beiden Gleichungen kommt a vor; die in Rede stehende gerade Linie ändert ihre Lage, wenn die gerade Linie (b) ihre Richtung ändert. Wenn wir a zwischen diesen beiden Gleichungen eliminiren, so erhalten wir eine Gleichung zwischen u und v, welche denjenigen geometrischen Ort darstellt, der von der geraden Linie (e) umhüllt wird, wenn wir für a nach einander alle möglichen Werthe nehmen. Die resultirende Gleichung steigt, in Beziehung auf u und v, bis zum dritten Grade.

Für den Fall der Parabel, wo $A = 0$, erhalten wir, wenn wir $B = 1$ setzen, folgende Constanten-Bestimmung:

$$C = x'', \qquad E = y'',$$
$$D = \frac{y''}{x'''}, \qquad F = \frac{y''y'''}{x'''}.$$

528. In der vorigen Nummer haben wir für E eine doppelte Bestimmung erhalten. Es ist hiernach:

$$\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x'''}.$$

Wenn wir diese Gleichung geometrisch deuten und berücksichtigen, dass wir irgend zwei beliebige gerade Linien zu Coordinaten-Axen nehmen können, so erhalten wir folgenden Satz:

Wenn eine Curve zweiter Classe und irgend zwei gerade Linien gegeben sind, und man legt durch den Pol jeder der letztern eine gerade Linie mit der andern parallel, so schneiden sich die beiden Parallelen in einem solchen Puncte, der mit dem Mittelpuncte der gegebenen Curve und dem Durchschnitte der beiden gegebenen geraden Linien in gerader Linie liegt. *)

---

*) Wenn wir die allgemeine Gleichung des zweiten Grades zwischen y und x:

$$y^2+2\alpha xy+\beta x^2+2\gamma y+2\delta x+\varepsilon = 0,$$

zu Grunde legen, so erhalten wir bekanntlich folgende drei Gleichungen:

$$y+\alpha x+\gamma = 0,$$
$$\alpha y+\beta x+\delta = 0,$$
$$\gamma y+\delta x+\varepsilon = 0,$$

für diejenigen beiden Durchmesser der Curve, deren zugeordnete der zweiten und ersten Coordinaten-Axe parallel sind, und für die Polare des Anfangspunctes. Nennen wir die Coordinaten dieser drei geraden Linien w' und v', w'' und v'', w''' und v''', so erhalten wir folgende Constanten-Bestimmung:

$$\alpha = v', \qquad \beta = v'v'', \qquad \gamma = w',$$
$$\delta = v'w'' = v'''w', \qquad \varepsilon = w'w'''.$$

Die Gleichung:

$$\alpha^2-\beta = 0,$$

welche die Bedingung enthält, dass die, durch die allgemeine Gleichung dargestellte, Curve eine Parabel ist, reducirt sich hiernach auf folgende:

$$v'' = v',$$

welche ausdrückt, dass diejenigen beiden Durchmesser, welche die, der ersten- und zweiten Axe parallelen Chorden halbiren, und, da diese Axen beliebig sind, dass alle Durchmesser parallel sind.

Aus der doppelten Bestimmung, die wir für den Coefficienten δ erhalten haben, folgt:

$$\frac{w'}{v'} = \frac{w''}{v'''}.$$

$\left(-\frac{w'}{v'}\right)$ ist das von dem Durchmesser (w', v') auf der ersten Axe bestimmte Segment;
$\left(-\frac{w''}{v'''}\right)$ ist dasjenige Segment, das auf derselben Axe von einer solchen geraden Linie bestimmt wird, die der Polaren des Anfangspunctes parallel ist, und durch den Durchschnitt des Durchmessers (w'', v'') mit der zweiten Axe geht. Hiernach ergibt sich folgender Satz:

Wenn eine Curve zweiter Ordnung und irgend zwei gerade Linien gegeben sind, so wird jede dieser beiden geraden Linien von demjenigen Durchmesser, dessen zugeordneter der andern parallel ist, so geschnitten, dass die beiden Durchschnittspuncte auf einer solchen geraden Linie liegen, die der Polaren des Durchschnittspunctes der beiden gegebenen geraden Linien parallel ist.

Wenn insbesondere die beiden gegebenen geraden Linien die gegebene Curve berühren, so folgt unmittelbar aus dem vorstehenden Satze, dass die Berührungs-Chorde von demjenigen Durchmesser halbirt wird, der durch den Durchschnitt der beiden Tangenten geht.

Es besteht der letzte Satz auch dann noch, wenn wir statt der gegebenen Curve zweiter Classe ein System von zwei Puncten nehmen.

529. Wenn der für die Discussion der verschiedenen Fälle, welche die allgemeine Gleichung des zweiten Grades darbietet, characteristische Ausdruck $(AC-B^2)$ Null ist, so kommt:

$$x' = x''.$$

Der Pol der zweiten Axe liegt also auf einem solchen Durchmesser, der der zweiten Axe parallel ist, was offenbar nur dann Statt finden kann, wenn diese Axe einer Asymptote der Curve, oder in dem Falle, dass ein System von zwei Puncten an die Stelle der Curve tritt, derjenigen geraden Linie, welche diese beiden Puncte verbindet, parallel ist.

Der Ausdruck $(AF-D^2)$ tritt an die Stelle des eben betrachteten, wenn wir die beiden Coordinaten-Axen mit einander vertauschen.

530. Ferner ist in der Discussion der allgemeinen Gleichung folgender Ausdruck:

$$\frac{[(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)]\sin^2\vartheta}{A^4},$$

von Bedeutung gewesen. Wenn wir nemlich (511) irgend zwei beliebige gerade Linien zu Coordinaten-Axen nehmen, und den jedesmaligen Coordinaten-Winkel ϑ nennen, so ist für dieselbe Curve der vorstehende Ausdruck constant und zwar gleich dem negativ genommenen Quadrate des Productes aus den beiden halben Axen der Curve. Wenn wir substituiren und das Product aus den beiden halben Axen Ω nennen, so kommt:

$$-\Omega^2 = (x'y''-x''y')^2\sin^2\vartheta-(x'x''-x'^2)(y'y'''-y'^2)\sin^2\vartheta.$$

Den zweiten Theil dieser Gleichung können wir leicht construiren. Beziehen wir uns zu diesem Ende auf die 10. Figur, in welcher der Mittelpunct durch C, die Pole der zweiten und ersten Axe durch P und Q bezeichnet sind, so ist z. B. Fig. 10.

$$x'(y''-y')\sin\vartheta = -CY'',$$
$$x'(y'''-y')\sin\vartheta = -CY''',$$
$$y'(x''-x')\sin\vartheta = -CX'';$$

und es ergibt sich:

$$\Omega^2 = (CY''')(CX'')-(CY'')^2.$$

Diese Gleichung gibt uns das Product der beiden halben Axen einer Curve zweiter Classe und hiernach den Flächen-Inhalt derselben, wenn die Pole irgend zweier gegebener gerader Linien und der Mittelpunct bekannt sind. Der Mittelpunct selbst ergibt sich, wenn wir nur eine gerade Linie kennen, auf welcher er sich befindet (528).

531. Für besondere Annahmen des Coordinaten-Systems vereinfacht sich die obige Construction des Inhaltes des unter den beiden halben Axen der Curve enthaltenen Rechtecks. Nehmen wir z. B. an, dass die Curve (Fig. 11) von den beiden Coordinaten-Axen berührt wird, so ist $C = 0$ und $F = 0$, mithin: Fig. 11.

$$\Omega^2 = -\frac{A^2E^2-2ABDE}{A^4}\sin^2\vartheta,$$
$$= (2x'^2y'y''+x'^2y''^2)\sin^2\vartheta.$$

also:

$$\Omega = x'\sqrt{[y''(2y'-y'')]}.\ sin\vartheta.$$

Diese Gleichung ist leicht zu construiren. Wenn wir, wie in der 11. Figur, rechtwinklige Coordinaten-Axen nehmen, so brauchen wir nur einen Kreis NX' zu beschreiben, dessen Mittelpunct C der Mittelpunct der gegebenen Curve ist und der die erste Axe berührt. Ziehen wir alsdann CX' nach dem Puncte, in welchem dieser Kreis die erste Axe berührt, und NY'', dieser Axe parallel, durch den Punct, in welchem die zweite Axe von der gegebenen Curve berührt wird, so ist

$$MN = \sqrt{[y''(2y'-y'')]},$$

und also:

$$\Omega = Y''M\,.\,MN. \qquad (1)$$

Hiernach ergibt sich eine leichte Construction einer Curve zweiter Classe, welche eine gegebene gerade Linie OY, in einem gegebenen Puncte Y'', berührt, einen gegebenen Punct C zum Mittelpuncte, und mit einer gegebenen Curve zweiter Classe, mit einem gegebenen Kreise zum Beispiel, gleichen Flächen-Inhalt hat. Die letzte Bestimmung kommt darauf hinaus, dass das Product der beiden halben Axen der zu construirenden Curve gegeben, gleich Ω, sei.

Wenn wir nemlich auf OY im Puncte Y'' ein Perpendikel errichten, so können wir auf diesem Perpendikel zunächst den Punct M, und dann, nach (1), den Punct N bestimmen; und endlich aus C als Mittelpunct einen Kreis beschreiben, der durch N geht. Diejenige Tangente dieses Kreises, welche auf OY senkrecht steht, ist zugleich eine Tangente der zu beschreibenden Curve.

532. Wenn die zweite Axe einer der beiden Asymptoten der gegebenen Curve zweiter Classe, die mithin eine Hyperbel ist, parallel ist, so erhält man, weil alsdann $AC-B^2 = 0$:

$$-\Omega^2 = \frac{(AE-BD)^2}{A^4} sin^2\vartheta$$

und folglich:

$$\Omega\sqrt{-1} = \frac{AE-BD}{A^2} sin\vartheta,$$

und hieraus, indem man substituirt:

$$\Omega\sqrt{-1} = y'(x'''-x')sin\vartheta.$$

Fig. 12. Wenn wir uns auf die 12. Figur beziehen, in welcher C der Mittelpunct der gegebenen Hyperbel, CA und CB die Asymptoten derselben sind, und für die zweite Axe eine beliebige, der einen Asymptote CB parallele, gerade Linie, OY, und für die erste Axe eine durchaus beliebige gerade Linie, OX, nehmen, deren Pol der Punct Q ist, durch den QD parallel mit CB gezogen ist, so ergibt sich, abgesehen vom Zeichen:

$$y' = CB, \qquad y'''-x' = BD,$$

und mithin $\Omega\sqrt{-1}$ gleich dem doppelten Inhalte des Dreiecks CBD; und da die Höhe DF dieses Dreiecks gleich ist der Entfernung QR des Poles Q von der Asymptote CB, ist auch:

$$-\Omega\sqrt{-1} = CB.QR.$$

Wir kommen auf diese Weise zu folgendem Satze:

Das Product desjenigen Segmentes, das auf einer Asymptote einer gegebenen Hyperbel zwischen dem Mittelpuncte und dem Durchschnitte derselben mit einer beliebigen geraden Linie liegt, in den Abstand des Poles dieser geraden Linie von derselben

Asymptote ist constant und gleich dem Producte der beiden halben Axen der gegebenen Hyperbel (243).

Wenn wir statt OY irgend eine, der andern Asymptote CA parallele, gerade Linie zur zweiten Axe genommen hätten, so würden wir gerade auf dieselbe Weise, wie oben, gefunden haben, dass $\Omega\sqrt{-1}$ auch gleich ist dem doppelten Inhalte des Dreiecks CAE. Die beiden Dreiecke CBD und CAE sind also einander gleich (es ist also auch BD = AE) und ihre Summe ist gleich dem unter den beiden halben Axen der gegebenen Hyperbel enthaltenem Rechtecke. Dieses Resultat besteht, gleich viel, ob die beliebige zur ersten Axe genommene gerade Linie der Curve begegnet oder nicht. Wenn dieselbe die Curve berührt, erhalten wir folgenden bekannten Satz:

Jede beliebige Tangente einer gegebenen Hyperbel schneidet von dem Asymptoten-Winkel ein Dreieck von constantem Inhalte ab und wird im Berührungspuncte halbirt. (Aus diesem Satze ergibt sich unmittelbar der frühere und allgemeinere, wenn wir berücksichtigen, was aus der Theorie der Pole sogleich folgt, dass, wenn man von demjenigen Puncte aus, in welchem eine gegebene gerade Linie einer Asymptote begegnet, eine Tangente an die Curve, und durch den Berührungspunct auf dieser Tangente eine gerade Linie mit jener Asymptote parallel zieht, diese gerade Linie durch den Pol der gegebenen geht.)

Die letzten Nummern machen an einigen Beispielen anschaulich, wie die obige geometrische Deutung der Constanten in der allgemeinen Gleichung zu Sätzen und Constructionen führt. Zur Bestimmung jener Constanten können wir auch noch auf andern Wegen gelangen und aus der Zusammenstellung verschiedenartiger Bestimmungen ergeben sich neue geometrische Beziehungen. Doch hierüber wollen wir in keine weitern Entwicklungen hier eingehen. —

533. Wenn wir in der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

$w = 0$ setzen, so erhalten wir zur Bestimmung der Richtung der beiden durch den Anfangspunct gehenden Tangenten folgende Gleichung:

$$Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0.$$

Dieselbe Gleichung hätten wir erhalten, wenn wir

$$Aw+2Bv+2Du = 0 \qquad (1)$$

gesetzt hätten. Es bilden also die beiden durch den Anfangspunct und die beiden durch den Punct (1) gehenden Tangenten ein Parallelogramm. Diejenige gerade Linie, welche den letztgenannten Punct mit dem Anfangspuncte verbindet, geht, was die letzte Gleichung zeigt, durch den Mittelpunct der Curve und wird in diesem Puncte halbirt. Liegt also der Anfangspunct auf dem Umfange der gegebenen Curve, so thut es auch der Punct (1).

Wir erhalten ferner, gleichviel, ob wir $v = 0$ setzen oder

$$2Bw+Cv+2Eu = 0, \qquad (2)$$

aus der allgemeinen Gleichung folgende:

$$Aw^2+2Duw+Fu^2 = 0.$$

Es schneiden also die der ersten Axe parallelen Tangenten in dieselben Puncte der zweiten Axe ein, als die durch den Punct (2) gehenden Tangenten. Hiernach ist die Construction dieses Punctes gegeben. Wenn wir ferner die Gleichung (2) mit der Gleichung:

$$Bw+Cv+Eu = o,$$

welche den Pol der zweiten Axe darstellt, vergleichen, so ist ersichtlich, dass der in Rede stehende Punct von der ersten Axe eben so weit und von der zweiten Axe halb so weit absteht, als dieser Pol. Hieraus folgt, dass, wenn wir die Richtung der ersten Axe beliebig ändern, der Punct (2) auf einer der zweiten Axe parallelen geraden Linie fortrückt. Also:

Wenn man von den beiden Durchschnittspuncten einer gegebenen geraden Linie mit irgend zweien parallelen Tangenten einer gegebenen Curve zweiter Classe noch zwei Tangenten an die Curve legt, so schneiden diese beiden neuen Tangenten sich in einem Puncte, der auf einer geraden Linie, die der gegebenen parallel ist, fortrückt, wenn wir die Richtung der beiden parallelen Tangenten beliebig ändern. Legen wir ferner durch diesen Punct eine gerade Linie parallel mit den bezüglichen parallelen Tangenten, so geht dieselbe durch einen festen Punct, den Pol der gegebenen geraden Linie.

Es stellt die Gleichung:

$$2Dw+2Ev+Fu = o,$$

einen solchen Punct dar, der eben so weit von der zweiten Axe und halb so weit von der ersten Axe absteht, als der Pol der letztgenannten Axe. —

534. Wenn in der allgemeinen Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = o,$$

die Coefficienten A, B, C, D, E und F theilweise ein für alle Mal gegeben sind, oder wenn zwischen denselben Bedingungs-Gleichungen Statt finden, so stellt diese Gleichung Curven dar, die gewissen Bedingungen unterworfen sind. Mit der Discussion einiger solcher Fälle, bei deren Auswahl wir auf die folgenden Paragraphen Rücksicht nehmen, wollen wir uns jetzt zunächst beschäftigen.

1. Wenn alle Coefficienten der allgemeinen Gleichung, mit Ausnahme des Coefficienten von u^2, gegeben sind, so berühren alle Curven, welche durch diese Gleichung noch dargestellt werden können, dieselben beiden, der zweiten Axe parallelen, geraden Linien in denselben beiden Puncten.

2. Wenn nur der Coefficient von v^2 beliebig zu bestimmen übrig bleibt, so berühren alle Curven dieselben beiden der ersten Axe parallelen geraden Linien in denselben beiden Puncten.

3. Wenn nur der Coefficient von w^2 beliebig zu bestimmen übrig bleibt, so berühren alle Curven dieselben beiden, durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden, geraden Linien in denselben beiden Puncten.

4. Wenn alle Coefficienten der allgemeinen Gleichung, mit Ausnahme des Coefficienten von uv, gegeben sind, so berühren alle Curven, welche alsdann durch diese Gleichung noch dargestellt werden können, dieselben vier geraden Linien, von welchen zwei der zweiten und zwei der ersten Axe parallel sind.

5. Wenn nur der Coefficient von uw beliebig zu bestimmen übrig bleibt, so berühren alle Curven dieselben vier geraden Linien, von welchen zwei der zweiten Axe parallel sind und zwei durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen.

6. Wenn nur der Coefficient von vw beliebig zu bestimmen übrig bleibt, so berühren alle Curven dieselben vier geraden Linien, von welchen zwei der ersten Axe parallel sind und zwei durch den Anfangspunct der Coordinaten gehen.

535. Die vorstehenden Sätze ergeben sich alle auf dieselbe Weise. Nehmen wir zum Beispiel den letzten Fall und stellen irgend zwei der bezüglichen Curven durch folgende beide Gleichungen dar:

$$Aw^2+2B'vw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$
$$Aw^2+2B''vw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

so erhalten wir, wenn wir abziehen, und durch $2(B'-B'')$ dividiren:

$$vw = 0;$$

das heisst: die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden in Rede stehenden Curven gehen, paarweise genommen, durch die beiden durch die letzte Gleichung dargestellten Puncte, von denen der eine unendlich weit, nach der Richtung der ersten Axe hin, liegt und der andere in den Anfangspunct der Coordinaten fällt. Die Richtung der beiden in dem letztbezeichneten Puncte sich schneidenden Tangenten bestimmt sich durch die Gleichung:

$$Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0,$$

in der C, E und F, der Voraussetzung nach, gegebene Grössen sind; und diejenigen Puncte, in welchen die durch den, nach der Richtung der ersten Axe hin, unendlich weit liegenden Punct gehende, oder, mit andern Worten, die dieser Axe parallele Tangenten in die zweite Axe einschneiden, bestimmen sich auf ähnliche Weise durch die Gleichung:

$$Aw^2+2Duw+Fu^2 = 0.$$

Was die drei ersten Fälle betrifft, so ist klar, dass, wenn die Gleichungen zweier Curven zweiter Classe sich zu der Gleichung zweier zusammenfallender Puncte verbinden lassen, gleichviel, ob diese beiden Puncte unendlich weit liegen oder nicht, die beiden Curven sich doppelt berühren und jene Puncte in den Durchschnitt ihrer gemeinschaftlichen Tangenten fallen.

536. Die Resultate der 534. Nummer bestehen auch dann noch, nur mit leichten Modificationen, wenn wir A gleich Null nehmen und die allgemeine Gleichung also nur Parabeln darstellt.

1. Wenn alsdann der Coefficient von u^2 einzig unbestimmt bleibt, so berühren alle diese Parabeln dieselbe, der zweiten Axe parallele, gerade Linie in demselben Puncte, und die Durchmesser aller Parabeln sind parallel (464).
2. Wenn nur der Coefficient von v^2 unbestimmt bleibt, so berühren alle Parabeln dieselbe der ersten Axe parallele gerade Linie in demselben Puncte und alle Durchmesser sind parallel (464).
3. Wenn nur der Coefficient von uv unbestimmt bleibt, so berühren alle Parabeln zwei der Coordinaten-Axen parallele gerade Linien und alle Durchmesser sind parallel (464).
4. Wenn nur der Coefficient von uw unbestimmt bleibt, so berühren alle Parabeln zwei durch den Anfangspunct gehende und eine der zweiten Axe parallele gerade Linien.
5. Wenn nur der Coefficient von vw unbestimmt bleibt, so berühren alle Parabeln zwei durch den Anfangspunct gehende und eine der ersten Axe parallele gerade Linie.

Nach den beiden letzten Fällen erhalten wir also unmittelbar die allgemeine Gleichung aller Parabeln, welche die Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren, wenn wir

einen Winkelpunct dieses Dreiecks zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen und eine der Axen der, diesem Winkelpuncte gegenüberliegenden, Seite parallel legen.

537. Wenn die Coefficienten B und D der allgemeinen Gleichung beide beliebig angenommen werden, jedoch so, dass zwischen denselben irgend eine gegebene Gleichung des ersten Grades besteht und die übrigen Coefficienten ein für alle Mal gegeben sind, so berühren alle diejenigen Curven, welche unter diesen Beschränkungen durch die allgemeine Gleichung noch dargestellt werden können, dieselben vier geraden Linien, von denen zwei in dem Anfangspuncte der Coordinaten sich schneiden und zwei irgend einer geraden Linie parallel sind.

Wir wollen, was erlaubt ist, $A = 1$ setzen. Unter dieser Voraussetzung ist die gegebene Gleichung zwischen B und D, für welche wir folgende nehmen wollen:

$$D = aB + b, \qquad (1)$$

wenn wir B und D als veränderlich, als x und y, betrachten, die Gleichung einer geraden Linie, des geometrischen Ortes für die Mittelpuncte aller durch die allgemeine Gleichung darstellbaren Curven. Stellen wir irgend zwei dieser Curven durch folgende Gleichungen dar:

$$w^2 + 2B'vw + Cv^2 + 2D'uw + 2Euv + Fu^2 = 0,$$
$$w^2 + 2B''vw + Cv^2 + 2D''uw + 2Euv + Fu^2 = 0,$$

und ziehen ab, so kommt:

$$[(B' - B'')v + (D' - D'')u]w = 0,$$

und da nach der gegebenen Bedingungs-Gleichung:

$$D' = aB' + b, \qquad D'' = aB'' + b,$$

und folglich:

$$(D' - D'') = a(B' - B''),$$

so ergibt sich:

$$[v + au]w = 0.$$

Wir kommen immer zu derselben Gleichung, welche zwei der in Rede stehenden Curven wir auch zusammenstellen mögen, und da diese Gleichung den Anfangspunct der Coordinaten und einen unendlich weit liegenden Punct darstellt, so ist die obige Behauptung gerechtfertigt. Diejenige Richtung, nach welcher der unendlich weit entfernte Punct liegt, bestimmt sich durch den Coefficienten a der gegebenen Bedingungs-Gleichung.

Die Richtung der beiden durch den Anfangspunct gehenden geraden Linien bestimmt sich unmittelbar durch die Gleichung:

$$Cv^2 + 2Euv + Fu^2 = 0,$$

die aus der allgemeinen Gleichung sich ergibt, indem man $w = 0$ setzt. Um die Durchschnitte der beiden parallelen Tangenten mit der zweiten Axe zu erhalten, können wir, der Bedingungs-Gleichung (1) Genüge leistend, in der allgemeinen Gleichung $B = 0$ und $D = b$ nehmen und dann für v in dieselbe $(-au)$ substituiren. Auf diese Weise kommt:

$$Aw^2 + 2buw + (Ca^2 - 2Ea + F)u^2 = 0.$$

538. Wenn die Coefficienten A und B beide beliebig angenommen werden, jedoch so, dass zwischen denselben irgend eine gegebene Gleichung des ersten Grades besteht und die übrigen Coefficienten ein für alle Mal gegeben sind, so berühren alle Curven, welche unter diesen Beschränkungen durch die allgemeine Gleichung noch dargestellt werden können, dieselben vier gerade Linien, von welchen zwei durch den Anfangspunct

der Coordinaten gehen und die beiden übrigen in einem zweiten Puncte der ersten Axe sich schneiden.

Es sei:

$$B = aA + b, \qquad (1)$$

die gegebene Bedingungs-Gleichung. Wenn wir alsdann irgend zwei der in Rede stehenden Curven durch die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} A'w^2+2B'vw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = o, \\ A''w^2+2B''vw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = o, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

darstellen, so ergibt sich, wenn wir abziehen:

$$[(A'-A'')w+2(B'-B'')vw]w = o;$$

und diese Gleichung verwandelt sich, da nach der gegebenen Bedingungs-Gleichung:

$$(B'-B'') = a(A'-A''),$$

in folgende:

$$(w+2av)w = o. \qquad (3)$$

Da diese Gleichung, welche zwei solche Puncte darstellt, die auf der ersten Axe liegen und von denen der eine überdiess mit dem Anfangspuncte zusammenfällt, unabhängig ist von der besondern Auswahl der beiden Curven (2), so ist die obige Behauptung bewiesen.

Die Axe der x ist also eine Diagonale derjenigen vierseitigen Figur, der alle in Rede stehenden Curven zweiter Classe eingeschrieben sind. Von den beiden Durchschnittspuncten, welche diese Diagonale verbindet, fällt der eine mit dem Anfangspuncte zusammen, die Abscisse des andern ist $2a$. Die Mittelpuncte aller jener Curven liegen in gerader Linie und diese gerade Linie schneidet in die zweite Axe in einem solchen Puncte ein, dessen Ordinate $\left(-\frac{Da}{b}\right)$ ist. Wenn b gleich Null ist, so ist die zweite Axe dieser geraden Linie parallel. Die Richtung der Seiten des allen Curven umschriebenen Vierecks bestimmt sich durch die gegebenen Coefficienten C, D, E und F und durch a und b. Wir erhalten nemlich zur Bestimmung der Richtung der beiden durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden Seiten jenes Vierecks die Gleichung:

$$Cv^2+2Euv+Fu^2 = o, \qquad (4)$$

eine Gleichung, die von a und b unabhängig ist, und zur Bestimmung der beiden übrigen Seiten etwa, indem wir $B = o$ und also $A = -\frac{b}{a}$ setzen, die beiden Gleichungen:

$$-\frac{b}{a}w^2+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = o,$$
$$w+2av = o,$$

aus denen folgende sich ergibt:

$$(C-4ab)v^2+2(E-2Da)uv+Fu^2 = o. \qquad (5)$$

Nach dem Vorstehenden können wir auch, wenn irgend ein Viereck gegeben ist, indem wir einen Winkelpunct desselben zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen und die erste Axe zugleich durch den gegenüberliegenden Winkelpunct legen, die allgemeine Gleichung aller derjenigen Curven zweiter Classe bestimmen, welche diesem Viereck eingeschrieben sind und sonach auf eine leichte Weise alle Eigenschaften solcher Curven im Allgemeinen und jeder derselben insbesondere entwickeln. Auf Beispiele hiervon werden wir in dem Folgenden zurückkommen, und zum Beispiel auf diesem Wege die grösste unter allen denjenigen Ellipsen bestimmen, die einem gegebenen Vierecke eingeschrieben werden können.

539. Die Sätze der beiden vorigen Nummern sind zwei Fälle folgenden allgemeinern Satzes:

Alle Curven, welche durch die allgemeine Gleichung dargestellt werden können, wenn irgend vier Coefficienten dieser Gleichung ein für alle Mal gegeben sind und zwischen den beiden übrigen eine gegebene Gleichung des ersten Grades Statt findet, berühren dieselben vier geraden Linie.

Dieser Satz schliesst so viele einzelne Fälle in sich ein, als die sechs Coefficienten der allgemeinen Gleichung sich zu zwei combiniren lassen, also $\frac{6.5}{1.2} = 15$. Wir wollen diese verschiedenen Fälle in folgendem Schema zusammenstellen, indem wir dieselbe durch die Bedingungs-Gleichung zwischen den jedesmaligen beiden Coefficienten unterscheiden.

1. $B = aA+b$	Zwei Seiten des, allen durch die allgemeine Gleichung dargestellten Curven, umschriebenen Vierecks schneiden sich im Anfangspuncte der Coordinaten; die beiden übrigen in einem Puncte der ersten Axe, dessen Abscisse gleich 2a ist (538).
2. $D = aA+b$	Zwei Seiten des Vierecks schneiden sich im Anfangspuncte, die beiden übrigen in einem Puncte der zweiten Axe, dessen Ordinate gleich 2a ist.
3. $C+a^2A-b^2 = 0$	Die gegenüberliegenden Seiten des umschriebenen Vierecks schneiden sich in solchen zwei Puncten der ersten Axe, die zu beiden Seiten des Anfangspunctes gleich weit, nemlich um $\pm a$ von demselben entfernt liegen. Man erhält für diese Seitenpaare auf einem ähnlichen Wege, wie in den vorigen beiden Nummern: $\left\{\begin{array}{c} w = av, \\ (b^2+2Ba)v^2+2(E+Da)uv+Fu^2 = 0. \end{array}\right\}$ $\left\{\begin{array}{c} w = -av, \\ (b^2-2Ba)v^2+2(E-Da)uv+Fu^2 = 0. \end{array}\right\}$
4. $F+a^2A-b^2 = 0$	Die gegenüberliegenden Seiten des umschriebenen Vierecks schneiden sich in solchen zwei Puncten der zweiten Axe, deren Ordinaten $\pm a$ sind.
5. $C = 2aB+b^2$	Zwei Seiten des umschriebenen Vierecks sind der ersten Axe parallel. Diejenigen beiden Puncte, in welchen dieselben in die zweite Axe einschneiden, sind durch folgende Gleichung gegeben: $Aw^2+2Duw+Fu^2 = 0.$ Die beiden übrigen Seiten schneiden sich in einem Puncte der ersten Axe, dessen Abscisse gleich a ist; ihre Richtung ist durch folgende Gleichung gegeben: $(Aa^2+b^2)v^2+2(E-Da)uv+Fu^2 = 0.$
6. $F = 2aD+b^2$	Zwei Seiten des Vierecks sind der zweiten Axe parallel; die beiden übrigen schneiden sich in einem Puncte derselben Axe, dessen Ordinate gleich a ist.

7. $D = aB+b$ — Zwei Seiten des umschriebenen Vierecks schneiden sich im Anfangspuncte der Coordinaten; die beiden übrigen sind parallel und ihre Richtung ist durch die Gleichung $\left(-\frac{v}{u}\right) = a$ gegeben (537).

8. $E = aB+b^2$ — Zwei Seiten des umschriebenen Vierecks sind der ersten Axe parallel, ihre Durchschnittspuncte mit der zweiten Axe sind durch folgende Gleichung bestimmt:

$$Aw^2+2Duw+Fu^2 = 0.$$

Die beiden übrigen Seiten schneiden sich auf der zweiten Axe in einem Puncte, dessen Ordinate gleich a ist; die Richtung derselben wird durch folgende Gleichung gegeben:

$$Cv^2+2Euv+(Aa^2-2Da+F)u^2 = 0.$$

9. $E = aD+b^2$ — Zwei Seiten des Vierecks sind der zweiten Axe parallel; die beiden übrigen schneiden sich in einem Puncte der ersten Axe, dessen Abscisse gleich a ist.

10. $C = aE+b^2$ — Das umschriebene Viereck ist ein Parallelogramm, worin zwei Seiten der ersten Axe parallel sind und dessen beide übrigen Seiten, der Richtung nach, durch die Gleichung $\left(-\frac{v}{u}\right) = a$ bestimmt werden. Die Durchschnittspuncte jener beiden ersten Seiten mit der zweiten Axe sind durch folgende Gleichung gegeben:

$$Aw^2+2Duw+Fu^2 = 0,$$

und die Durchschnittspuncte der beiden andern Seiten mit derselben Axe durch die Gleichung:

$$Aw^2+2(D-Ba)uw+(F+b^2)u^2 = 0.$$

11. $E = aF+b^2$ — Das Viereck ist ein Parallelogramm, in welchem zwei Seiten der zweiten Axe parallel sind und die Richtung der beiden übrigen durch die Gleichung $\left(-\frac{v}{u}\right) = a$ sich bestimmt.

12. $C+a^2F-b^2 = 0$ — Das umschriebene Viereck ist ein Parallelogramm. Die gegenüberliegenden Seiten desselben und die beiden Axen haben die Richtung von vier Harmonicalen. Man erhält für die Seiten des Parallelogramms folgende Coordinaten-Bestimmung:

$$v = \pm au$$

$$Aw^2+2(D\pm Ba)uw\pm(2E\pm b^2a)au^2 = 0,$$

wobei wir die obern und untern Zeichen zusammennehmen müssen.

13. $E = aA+b.$
14. $C = aD+b.$
15. $F = aB+b.$ — Die Bestimmung der vier, alle durch die allgemeine Gleichung dargestellten Curven berührenden, geraden Linien ist weniger einfach. *)

*) Ein analoges Schema ergibt sich, wenn wir von der allgemeinen Gleichung der Curven zweiter Ordnung:

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dyz+2exz+fz^2 = 0,$$

ausgehen. Wenn nemlich irgend vier Coefficienten dieser Gleichung ein für alle Mal ge-

540. Wenn wir über die in jedem der verschiedenen Fälle der vorigen Nummer ein für alle Mal gegebenen vier Coefficienten besondere Annahmen machen, so erhalten wir die allgemeinen Gleichungen von Curven, die mannigfaltigen Bestimmungen unterworfen sind und eine bestimmte Lage in Beziehung auf das Coordinaten-System haben. Wir werden ein Beispiel hiervon, in einem der folgenden Paragraphen, in dem wir uns mit der Osculation der Curven zweiter Classe beschäftigen werden, ausführlich behandeln. Hier wollen wir uns auf einige Andeutungen über denjenigen Fall beschränken, wo $A = 0$, und also alle Curven Parabeln sind.

In 5. — 9. Falle der vorigen Nummer berühren alle, durch die allgemeine Gleichung dargestellten Parabeln die Seiten desselben Dreiecks. In dem 5. und 6. Falle liegt ein Winkelpunct dieses Dreiecks auf einer der beiden Coordinaten-Axen und die diesem Winkelpuncte gegenüberliegende Seite des Dreiecks ist derselben Axe parallel. In dem 7. Falle fällt ein Winkelpunct des Dreiecks in den Anfangspunct. In dem 8. und 9. Falle liegt ein Winkelpunct des Dreiecks auf einer der beiden Coordinaten-Axen und die gegenüberliegende Seite ist der andern Axe parallel.

In dem 10. — 12. Falle der vorigen Nummer ist die Richtung der Durchmesser aller Parabeln gegeben (464) und alle Parabeln berühren dieselben beiden geraden Linien. In den beiden ersten dieser drei Fälle ist von diesen beiden geraden Linien eine einer der beiden Coordinaten-Axen parallel; in dem letzten Falle haben diese beiden geraden Linien und die beiden Coordinaten-Axen die Richtung von vier Harmonicalen.

541. Auch der allgemeinere Satz der 539. Nummer ist nur ein besonderer Fall von folgendem Satze:

---

geben sind und zwischen den beiden übrigen eine gegebene lineare Bedingungs-Gleichung Statt findet, so gehen alle Curven, welche, unter dieser Beschränkung, durch die allgemeine Gleichung noch dargestellt werden können, durch dieselben vier Puncte. Hiernach erhalten wir folgende 15 verschiedene Fälle, die wir durch diejenigen beiden Coefficienten, welche unbestimmt bleiben, bezeichnen wollen.

a, b. b, c.	Alle Curven gehen durch zwei feste Puncte einer durch den Anfangspunct gehenden geraden Linie, und überdiess einmal durch zwei feste Puncte der ersten, das andere Mal durch zwei feste Puncte der zweiten Axe.
a, c.	Alle Curven gehen durch die vier Winkelpuncte eines Parallogrammes, dessen beide Diagonalen durch den Anfangspunct gehen und mit den beiden Coordinaten-Axen vier Harmonicalen bilden.
a, d. c, e.	Alle Curven gehen durch die vier Winkelpuncte eines Parallel-Trapezes, von dessen parallelen Seiten eine in eine der beiden Coordinaten-Axen fällt, und die andere derselben Axe parallel ist.
a, f. c, f.	Alle Curven gehen durch die vier Winkelpuncte eines Parallel-Trapezes, dessen parallele Seiten einer der beiden Coordinaten-Axen parallel sind und gleich weit von derselben entfernt liegen.
b, d. b, e.	Alle Curven gehen durch zwei feste Puncte einer Coordinaten-Axe und durch zwei feste Puncte einer der andern Coordinaten-Axe parallelen geraden Linie.
d, e.	Alle Curven sind ähnliche und ähnlich liegende und gehen überdiess durch zwei feste Puncte einer durch den Anfangspunct gehenden geraden Linie.
d, f. e, f.	Alle Curven sind ähnliche und ähnlich liegende und gehen durch zwei feste Puncte einer solchen geraden Linie, die einer der beiden Coordinaten-Axen parallel ist.
a, e. c, d. b, f.	Die Bestimmung der vier gemeinschaftlichen Durchschnittspuncte ist weniger einfach.

Wenn zwischen den Coefficienten der allgemeinen Gleichung fünf Bedingungs-Gleichungen des ersten Grades Statt finden, so berühren alle Curven, welche unter diesen Beschränkungen durch die allgemeine Gleichung noch dargestellt werden können, dieselben vier geraden Linien.

Wir führen diesen Satz hier bloss an. In der zweiten Abtheilung dieses Bandes wird derselbe, so wie die analogen Sätze für Curven irgend einer beliebigen Classe, durch allgemeine Betrachtungen unmittelbar sich ergeben.

§ 4.

Neue Tangenten-Theorie.

542. Die allgemeine Theorie des Contactes, die ich in den folgenden Nummern entwickeln werde, ergibt sich unmittelbar aus der geometrischen Deutung des sogenannten Theorems über die homogenen Functionen. Nach diesem Theorem, das ich hier als bekannt voraussetze *), hat man, wenn

$$U = o \qquad (1)$$

irgend eine homogene algebraische Gleichung von einem beliebigen, etwa dem m., Grade zwischen den drei veränderlichen Grössen u, v und w ist:

$$\frac{dU}{dw}w+\frac{dU}{dv}v+\frac{dU}{du}u = m.U,$$

$$\frac{d^2U}{dw^2}w^2+2\frac{d^2U}{dvdw}vw+\frac{d^2U}{dv^2}v^2+2\frac{d^2U}{dudw}uw+2\frac{d^2U}{dudv}uv+\frac{d^2U}{du^2}u^2 = m(m-1).U,$$

$$\frac{d^3U}{dw^3}w^3+3\frac{d^3U}{dvdw^2}vw^2+3\frac{d^3U}{dv^2dw}v^2w+\frac{d^3U}{dv^3}v^3+3\frac{d^3U}{dudw^2}uw^2+6\frac{d^3U}{dudvdw}uvw+3\frac{d^3U}{du^2dw}u^2w$$

$$+3\frac{d^3U}{dudv^2}uv^2+3\frac{d^3U}{du^2dv}u^2v+\frac{d^3U}{du^3}u^3 = m(m-1)(m-2).U,$$

. . . .

. . . .

543. Wenn wir in der nachstehenden Gleichung die partiellen Differential-Coefficienten auf die bestimmten Werthe irgend einer gegebenen Tangente (w′, v′, u′) der gegebenen Curve (1) beziehen, und dieselben zur Unterscheidung einklammern, so stellt die Gleichung:

$$\left(\frac{dU}{dw}\right)w+\left(\frac{dU}{dv}\right)v+\left(\frac{dU}{du}\right)u = o, \qquad (2)$$

einen solchen Punct dar, der auf der gegebenen Tangente liegt, weil diese Gleichung, wenn wir w = w′, v = v′ und u = u′ setzen, nach dem eben angeführten Theorem keine andere ist, als die Gleichung der gegebenen Curve, wenn wir in diese Gleichung die Coordinaten-Werthe jener Tangente substituiren und mit m multipliciren.

Wenn wir ferner die Gleichung der gegebenen Curve vollständig in Beziehung auf die drei veränderlichen Grössen w, v und u differentiiren, so kommt:

$$\frac{dU}{dw}dw+\frac{dU}{dv}dv+\frac{dU}{du}du = o.$$

*) Vergl. LACROIX, *Traité élementaire de Calcul différentiel et intégral. Quatrième Edition Nro. 292.*

Differentiiren wir ebenfalls die Gleichung (2), in welcher die Coefficienten constant sind, so ergibt sich:

$$\left(\frac{dU}{dw}\right)dw+\left(\frac{dU}{dv}\right)dv+\left(\frac{dU}{du}\right)du = o.$$

Diese beiden Differential-Gleichungen sind identisch, wenn wir in die erstere derselben nach der Differentiation $w = w'$, $v = v'$ und $u = u'$ setzen. Es ist also gleichviel, ob wir von der geraden Linie (w', v', u'), welche eine Tangente der gegebenen Curve (1) ist, auf dieser Curve zu einer benachbarten Tangente, oder von derselben geraden Linie, welche auch durch den Punct (2) geht, zu einer benachbarten, durch denselben Punct gehenden, geraden Linie übergehen. Zwei auf einander folgende Tangenten jener Curve gehen beide durch diesen Punct; dieser Punct liegt auf dem Umfange der Curve: er ist der Berührungspunct auf der gegebenen Tangente.

544. Indem wir die partiellen Differential-Coefficienten der höhern Ordnung, welche sich auf eine gegebene Tangente (w', v', u') beziehen, zur Unterscheidung, ebenfalls in Klammern einschliessen, stellt die Gleichung:

$$\left(\frac{d^2U}{dw^2}\right)w^2+2\left(\frac{d^2U}{dvdw}\right)vw+\left(\frac{d^2U}{dv^2}\right)v^2+2\left(\frac{d^2U}{dudw}\right)uw+2\left(\frac{d^2U}{dudv}\right)uv+\left(\frac{d^2U}{du^2}\right)u^2 = o, \quad (3)$$

eine Curve zweiter Classe dar, deren Beziehung zu der gegebenen Curve wir jetzt nachweisen wollen.

Nach dem Theorem üben die homogenen Functionen ist die letzte Gleichung mit der Gleichung (1) identisch, wenn wir die letztgenannte Gleichung mit $m(m-1)$ multipliciren und dann in beiden Gleichungen $w = w'$, $v = v'$ und $u = u'$ setzen. Die gegebene Tangente der Curve (1) ist also auch eine Tangente der durch die Gleichung (3) dargestellten Curve zweiter Classe.

Der Kürze halber wollen wir die Gleichung (3) auf folgende Weise schreiben:

$$W = o.$$

Alsdann erhalten wir:

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)w+\left(\frac{dW}{dv}\right)v+\left(\frac{dW}{du}\right)u = o,$$

für die Gleichung desjenigen Punctes, in welchem die Curve zweiter Classe von der gegebenen gemeinschaftlichen Tangente (w', v', u') berührt wird, wenn wir die partiellen Differential-Coefficienten auf diese Tangente beziehen. Wir können leicht zeigen, dass diese Gleichung auf die Gleichung (2) zurückgeführt werden kann. Da nemlich $\frac{dU}{dw}$ eine ebenfalls homogene Function und zwar vom $(m-1)$. Grade ist, so ergibt sich:

$$\frac{d^2U}{dw^2}w+\frac{d^2U}{dvdw}v+\frac{d^2U}{dudw}u = (m-1)\frac{dU}{dw}.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist aber nichts anders als $\frac{1}{2}\frac{dW}{dw}$ und somit kommt:

$$\frac{dW}{dw} = 2(m-1)\frac{dU}{dw}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man:

$$\frac{dW}{dv} = 2(m-1)\frac{dU}{dv},$$

$$\frac{dW}{du} = 2(m-1)\frac{dU}{du};$$

und hiernach:

$$\left(\frac{dW}{dw}\right)w+\left(\frac{dW}{dv}\right)v+\left(\frac{dW}{du}\right)u = 2(m-1)\left\{\left(\frac{dU}{dw}\right)w+\left(\frac{dU}{dv}\right)v+\left(\frac{dU}{du}\right)u\right\}.$$

Es berührt also die gerade Linie (w', v', u') die beiden Curven (1) und (3) in demselben Puncte.

Wenn wir die gegebene Gleichung (1) zweimal nach einander vollständig differentiiren, so kommt:

$$\frac{d^2U}{dw^2}dw^2+2\frac{d^2U}{dvdw}dvdw+\frac{d^2U}{dv^2}dv^2+2\frac{d^2U}{dudw}dudw+2\frac{d^2U}{dudv}dudv+\frac{d^2U}{du^2}du^2 = 0.$$

Differentiiren wir ebenso die Gleichung (3), in welcher die partiellen Differential-Coefficienten constant sind, so kommt, wenn wir zugleich durch 2 dividiren:

$$\left(\frac{d^2U}{dw^2}\right)dw^2+2\left(\frac{d^2U}{dvdw}\right)dvdw+\left(\frac{d^2U}{dv^2}\right)dv^2+2\left(\frac{d^2U}{dudw}\right)dudw+2\left(\frac{d^2U}{dudv}\right)dudv$$
$$+\left(\frac{d^2U}{du^2}\right)du^2 = 0.$$

Diese beiden Differential-Gleichungen sind identisch, wenn wir in der erstern für die veränderlichen Grössen die Coordinaten-Werthe der gegebenen Tangente substituiren. Die beiden durch (1) und (3) dargestellten Curven haben also nicht bloss eine gemeinschaftliche Tangente und auf dieser gemeinschaftlichen Tangente denselben Berührungspunct, sondern sie haben auch in diesem Puncte einen innigern Contact, einen Contact der zweiten Ordnung.

545. Wir können diese Entwicklungen beliebig ausdehnen. Damit dass Gesetz derselben sich deutlicher ergebe, wollen wir auch noch einen Contact der dritten Ordnung betrachten. Folgende Gleichung nemlich:

$$\left(\frac{d^3U}{dw^3}\right)w^3+3\left(\frac{d^3U}{dvdw^2}\right)vw^2+3\left(\frac{d^3U}{dv^2dw}\right)v^2w+\left(\frac{d^3U}{dv^3}\right)v^3+3\left(\frac{d^3U}{dudw^2}\right)uw^2$$
$$+6\left(\frac{d^3U}{dudvdw}\right)uvw+3\left(\frac{d^3U}{du^2dw}\right)u^2w+3\left(\frac{d^3U}{dudv^2}\right)uv^2+3\left(\frac{d^3U}{du^2dv}\right)u^2v+\left(\frac{d^3U}{du^3}\right)u^3=0, \quad (4)$$

stellt eine Curve dritter Classe dar, die mit der gegebenen Curve auf der gegebenen Tangente (auf welche sich auch die eingeklammerten Differential-Coefficienten beziehen) einen Contact dritter Ordnung hat. Denn erstlich ist wiederum ersichtlich, dass auch diese Curve die gegebene Tangente (w', v', u') berührt, weil man die identische Gleichung

$$V = m(m-1)(m-2)U$$

erhält, indem man der Kürze halber die Gleichung der Curve dritter Classe durch

$$V = 0$$

darstellt und in diese Gleichung und in die Gleichung der gegebenen Curve die Coordinaten-Werthe w', v' und u' substituirt. Ferner ergibt sich, ebenfalls nach dem nun oft schon erwähnten Theorem, indem wir, neben den bisher gebrauchten Abkürzungen, auch noch, statt der Gleichung (2),

$$T = 0$$

schreiben:

$$\left(\frac{dV}{dw}\right)w+\left(\frac{dV}{dv}\right)v+\left(\frac{dV}{du}\right)u = 3.(m-1)(m-2)T,$$

$$\left(\frac{d^2V}{dw^2}\right)w^2+2\left(\frac{d^2V}{dvdw}\right)vw+\left(\frac{d^2V}{dv^2}\right)v^2+2\left(\frac{d^2V}{dudw}\right)uw+2\left(\frac{d^2V}{dudv}\right)uv+\left(\frac{d^2V}{du^2}\right)u^2$$
$$= 3.2.(m-1)W.$$

Die beiden Curven (1) und (4) werden also von der gegebenen geraden Linie in demselben Puncte (2) berührt, und haben beide mit der Curve zweiter Classe (3) in diesem Puncte einen Contact zweiter Ordnung. Ueberdiess erhält man, wenn man die beiden Gleichungen (1) und (4) dreimal nach einander vollständig differentiirt, und Alles auf die gegebene Tangente (w', v', u') bezieht, folgende identische Gleichung:

$$d^3V = 3.2.1.d^3U.$$

Die beiden Curven haben also auf der gegebenen Tangente einen Contact der dritten Ordnung.*)

546. Wir können also, wenn irgend eine Curve und eine Tangente derselben gegeben ist, die Gleichung des Berührungspunctes auf dieser Tangente, und solche Curven zweiter, dritter, .. Classe bestimmen, die mit der gegebenen Curve einen Contact der zweiten, dritten, .. Ordnung haben, so dass wir, wenn wir bloss eine geringere oder grössere Genauigkeit beabsichtigen, statt eines Stückes der gegebenen Curve, das sich nicht weit von dem Berührungspuncte auf der gegebenen Tangente erstreckt, nur ein Stück einer Curve zweiter, dritter, .. Classe zu betrachten brauchen. Wenn m eine ganze positive Zahl ist, so erhalten wir nach der eben entwickelten Methode osculirende Curven der zweiten bis (m—1). Classe. Wollten wir nach demselben Verfahren die Gleichung einer Curve des m. Grades, die also mit der gegebenen einen Contact der m. Ordnung haben würde, entwickeln, so würden wir auf die Gleichung der gegebenen Curve selbst zurückkommen. Und weiter können wir alsdann nicht gehen. Wenn aber m eine ganze Zahl und negativ, oder wenn m eine gebrochene Zahl ist, so können wir Curven jeder beliebigen Classe bestimmen, die mit der gegebenen Curve einen Contact der entsprechenden Ordnung haben.

Wenn wir zum Beispiel folgende Gleichung nehmen:

$$\frac{B}{u}+\frac{D}{v}+\frac{E}{w}=0,$$

welche nach der 468. Nummer eine, die beiden Coordinaten-Axen berührende, Parabel darstellt, so erhalten wir für den Berührungspunct auf einer gegebenen Tangente (w', v', u') folgende Gleichung:

---

*) Wenn wir, wie gewöhnlich, irgend eine Curve durch eine Gleichung zwischen y und x darstellen, so können wir diese Gleichung nach der Bemerkung zur 416. Nummer durch Hinzufügung einer dritten veränderlichen Grösse z sogleich homogen machen und dann auf solche Gleichungen eine Theorie des Contactes gründen, die der, im Texte entwickelten, ganz analog ist.

Wir wollen uns hier mit einer blossen Andeutung begnügen. Es sei:

$$Z = 0,$$

irgend eine homogene Gleichung irgend eines m. Grades zwischen z, y und x; durch welche also eine Curve der m. Ordnung dargestellt wird. Wenn (z', y', x') irgend ein gegebener Punct dieser Curve ist, so ist:

$$\left(\frac{dZ}{dz}\right)z+\left(\frac{dZ}{dy}\right)y+\left(\frac{dZ}{dx}\right)x=0,$$

die Gleichung der Tangente in diesem Puncte und:

$$\left(\frac{d^2Z}{dz^2}\right)z^2+2\left(\frac{d^2Z}{dydz}\right)yz+\left(\frac{d^2Z}{dy^2}\right)y^2+2\left(\frac{d^2Z}{dxdz}\right)xz+2\left(\frac{d^2Z}{dxdy}\right)xy+\left(\frac{d^2Z}{dx^2}\right)x^2=0,$$

die Gleichung einer osculirenden Curve zweiter Ordnung in demselben Puncte, u. s. w., wenn wir die partiellen Differential-Coefficienten auf den Punct (z', y', x') beziehen.

$$B\frac{u}{u'^2}+D\frac{v}{v'^2}+E\frac{w}{w'^2} = 0.$$

Wir erhalten ferner:

$$B\frac{u^2}{u'^3}+D\frac{v^2}{v'^3}+E\frac{w^2}{w'^3} = 0,$$

für die Gleichung einer die gegebene Parabel auf der gegebenen Tangente (w', v', u') osculirenden Curve zweiter Classe. Diese Curve zweiter Classe hat, was die Form ihrer Gleichung zeigt, zwei zugeordnete Durchmesser, welche mit den beiden Coördinaten-Axen zusammenfallen.

547. Wir können auch, ohne dabei irgend einer Schwierigkeit zu begegnen, auf die in dem Vorstehenden entwickelte Theorie des Contactes Gränz-Betrachtungen anwenden, und ihr dadurch, in jeder Beziehung, dieselbe Evidenz geben als der gewöhnlichen Theorie. Da diese Betrachtungen indess nichts Neues darbieten würden, so gehe ich hier in dieselben nicht ein, und da wir überdiess später die verschiedenen Arten des Contactes zweier Curven noch aus einem andern Gesichtspuncte betrachten werden, so beschränken wir uns in dem Folgenden bloss auf die Berührung zwischen einer gegebenen Curve zweiter Classe und einer gegebenen geraden Linie.

Es sei wiederum:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

die allgemeine Gleichung der Curven dieser Classe, und (w'', v'', u'') eine gegebene, diese Curve berührende, gerade Linie. Bezeichnen wir den ersten Theil der vorstehenden Gleichung, der Kürze halber, durch U, so kommt:

$$\frac{dU}{dw} = 2(Aw+Bv+Du),$$

$$\frac{dU}{dv} = 2(Bw+Cv+Eu),$$

$$\frac{dU}{du} = 2(Dw+Ev+Fu);$$

und mithin erhält man für die Gleichung des Berührungspunctes auf der gegebenen geraden Linie:

$$(Aw''+Bv''+Du'')w+(Bw''+Cv''+Eu'')v+(Dw''+Ev''+Fu'')u = 0.$$

548. Die End-Gleichung der vorigen Nummer ist in Beziehung auf die drei veränderlichen Grössen w, v und u und die drei Coördinaten der gegebenen Tangente w'', v'' und u'' symmetrisch, so dass wir sie auch auf folgende Weise schreiben können:

$$(Aw+Bv+Du)w''+(Bw+Cv+Eu)v''+(Dw+Ev+Fu)u'' = 0. \quad (1)$$

Wenn noch irgend eine zweite Tangente (w''', v''', u''') der Curve zweiter Classe gegeben ist, so erhalten wir für den Berührungspunct auf dieser zweiten Tangente:

$$(Aw+Bv+Du)w'''+(Bw+Cv+Eu)v'''+(Dw+Ev+Fu)u''' = 0. \quad (2)$$

Die beiden Gleichungen (1) und (2) werden beide befriedigt, wenn wir in dieselben die Coordinaten-Werthe derjenigen geraden Linie, welche die beiden Berührungspuncte auf den beiden Tangenten verbindet, statt der veränderlichen Grössen substituiren. Substituiren wir wirklich, indem wir jene Coordinaten-Werthe w', v' und u' nennen und betrachten alsdann w'', v'' und u'' in (1) und w''', v''' und u''' in (2) als veränderlich und lassen demzufolge die Accente fort, so gehen beide Gleichungen in folgende über:

$$(Aw'+Bv'+Du')w+(Bw'+Cv'+Eu')v+(Dw'+Ev'+Fu')u = 0. \quad (3)$$

Diese Gleichung stellt einen Punct dar, und dieser Punct ist kein anderer als der

Durchschnitt der beiden gegebenen Tangenten (w''', v''', u''') und (w'', v'', u''), weil die Coordinaten beider Tangenten die letzte Gleichung befriedigen. Die Gleichung (3) stellt den Pol der geraden Linie (w', v', u'), die wir als irgend eine gegebene betrachten können, dar. Wenn die gegebene gerade Linie die gegebene Curve berührt, so ist der Berührungspunct ihr Pol. Auch wenn die gegebene gerade Linie der Curve nicht begegnet, nennen wir den durch (3) dargestellten Punct ihren Pol. Die Gleichung (3) stellt immer einen reellen Punct dar, also auch dann, wenn die gegebene Curve zweiter Classe in ein System von zwei Puncten übergeht oder imaginär wird. In dem erstern Falle haben wir bereits in der 526. Nummer die geometrische Construction des Poles nachgewiesen.

549. Wenn wir für die gegebene gerade Linie (w', v', u'), deren Pol wir nach dem Vorstehenden durch die Gleichung:

$$\frac{dU}{dw}w' + \frac{dU}{dv}v' + \frac{dU}{du}u' = 0,$$

darstellen können, insbesondere die erste Axe nehmen, so müssen wir $w' = 0$ und $v' = 0$ setzen, und erhalten hiernach für ihren Pol die Gleichung

$$\frac{dU}{du} = 2(Dw+Ev+Fu) = 0.$$

Auf ähnliche Weise erhalten wir für die Gleichung des Poles der zweiten Axe, indem wir $w' = 0$ und $u' = 0$ setzen:

$$\frac{dU}{dv} = 2(Bw+Cv+Eu) = 0.$$

Indem wir endlich $v' = 0$ und $u' = 0$ setzen, ergibt sich

$$\frac{dU}{dw} = 2(Aw+Bv+Du) = 0$$

für die Gleichung des Poles einer unendlich weit entfernten geraden Linie; eines Punctes also, durch den alle geraden Linien gehen, welche die Berührungspuncte auf irgend zweien parallelen Tangenten verbinden, des Mittelpunctes der Curve.

550. Zu den Resultaten der vorigen Nummer können wir auch gelangen, indem wir den Gegenstand aus einem andern Gesichtspuncte betrachten. Wenn wir nemlich u etwa gleich Eins setzen, so kommt:

$$\frac{dw}{dv} = -\frac{\frac{dU}{dv}}{\frac{dU}{dw}}.$$

Für ein *minimum* oder *maximum* von w verschwindet bekanntlich $\frac{dw}{dv}$ und es ergibt sich:

$$\frac{dU}{dv} = 0.$$

Da w das von der jedesmaligen geraden Linie auf der zweiten Axe bestimmte, negativ genommene, Segment bedeutet, so bezieht sich jenes *maximum* und *minimum* auf die Tangenten in den beiden Durchschnittspuncten der zweiten Axe mit der Curve zweiter Classe. Diese Puncte, welche als die Durchschnittspuncte zweier unmittelbar auf einander folgender Tangenten der Curve anzusehen sind, bilden den Uebergang von solchen Puncten der zweiten Axe, von welchen aus zwei reelle Tangenten sich an die Curve lagen lassen, zu solchen Puncten, für welche diese Tangenten imaginär werden. Da die letzte

Gleichung vom ersten Grade ist, so stellt sie also denjenigen Punct dar, in welchen die beiden Tangenten in jenen beiden Durchschnittspuncten der Curve mit der zweiten Axe sich schneiden.

Bei derselben Voraussetzung als eben, verschwindet $\frac{dv}{dw}$ und v wird also *maximum* oder *minimum*, wenn:

$$\frac{dU}{dw} = o.$$

v bezieht sich auf die Richtung der jedesmaligen geraden Linie und wird folglich *maximum* oder *minimum* für die beiden Asymptoten der Curve zweiter Classe. Die letzte Gleichung wird also befriedigt, wenn wir die Coordinaten-Werthe dieser beiden Asymptoten in dieselbe substituiren, und stellt, da sie überdiess vom ersten Grade ist, den Durchschnitt der beiden Asymptoten, den Mittelpunct der Curve, dar. *)

---

*) Wir kommen zu allgemeinen Resultaten, wenn wir die obige Schlussweise auf Curven irgend einer beliebigen Classe anwenden. Es sei:

$$U = o, \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer Curve irgend einer m. Classe. Alsdann ist

$$\frac{dU}{dv} = o \qquad (2)$$

eine Gleichung des (m—1). Grades, die eine Curve derselben Classe darstellt, welche von denjenigen Tangenten der gegebenen Curve, für welche w *maximum* oder *minimum* ist, also von den Tangenten in den Durchschnittspuncten der letztgenannten Curve mit der zweiten Axe, ebenfalls berührt wird. Die Coordinaten dieser Tangenten erhalten wir durch Verbindung der vorstehenden beiden Gleichungen. Die Zahl dieser Tangenten beträgt also, im Allgemeinen, m(m—1) und in eben so vielen Puncten wird die gegebene Curve m. Classe von der zweiten Axe geschnitten; oder, mit andern Worten, eine Curve m. Classe ist, im Allgemeinen, von der m(m—1). Ordnung. Da wir für die zweite Axe jede beliebige nehmen können, so erhalten wir sogleich folgenden bekannten Satz:

Die m(m—1) Tangenten in den Durchschnittspuncten einer beliebigen geraden Linie, mit einer Curve m. Classe, berühren ein und dieselbe Curve (m—1). Classe.

Die Gleichung:

$$\frac{dU}{dw} = o, \qquad (3)$$

stellt ebenfalls eine Curve (m—1). Classe dar. Diese Curve wird von denjenigen Tangenten der gegebenen Curve, für welche v *maximum* oder *minimum* ist, also von den Asymptoten der letztgenannten Curve, berührt. Zur Bestimmung dieser Asymptoten, deren es im Allgemeinen m(m—1) gibt, brauchen wir also nur zwischen (1) und (3) zu eliminiren. Zugleich ergibt sich folgender Satz:

Die m(m—1) Asymptoten einer Curve m. Classe umhüllen ein und dieselbe Curve (m—1). Classe.

Es folgt dieser Satz aus dem vorhergehenden, wenn wir, was erlaubt ist, annehmen, dass die Berührungspuncte auf den Asymptoten, als unendlich weit entfernt liegende Puncte derselben Ebene, in gerader Linie liegen. —

Wenn wir von irgend einer homogenen Gleichung des m. Grades zwischen x, y und z ausgehen und diese Gleichung, der Kürze halber, durch

$$Z = o, \qquad (4)$$

bezeichnen, so stellen die Gleichungen:

$$\frac{dZ}{dx} = o, \qquad \frac{dZ}{dy} = o, \qquad (5)$$

Curven der (m—1). Ordnung dar, welche durch diejenigen m(m—1) Puncte der gegebenen Curve gehen, denen ein *maximum* oder *minimum* der Ordinaten und Abscissen entspricht und die also die Berührungspuncte auf denjenigen Tangenten der gegebenen Curve sind, welche der ersten und zweiten Coordinaten-Axe parallel sind. Ebenso stellt die Gleichung:

551. Wir wollen in dieser Nummer diejenige Bedingungs-Gleichung entwickeln, welche Statt finden muss, wenn der durch die Gleichung:

$$z'w+x'v+y'u = 0, \qquad (1)$$

dargestellte Punct, auf einer gegebenen Curve zweiter Classe:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0, \qquad (2)$$

liegen soll. Wenn die Gleichung des gegebenen Punctes mit der allgemeinen Gleichung des Berührungspunctes auf einer durch diesen Punct gehenden Tangente (w'', v'', u'') identisch sein soll, so erhält man:

$$\frac{Bw''+Cv''+Eu''}{Aw''+Bv''+Du''} = \frac{x'}{z'}, \qquad \frac{Dw''+Ev''+Fu''}{Aw''+Bv''+Du''} = \frac{y'}{z'}. \qquad (3)$$

Neben diesen beiden Gleichungen besteht auch folgende:

$$z'w''+x'v''+y'u'' = 0, \qquad (4)$$

und um die gesuchte Bedingungs-Gleichung zu erhalten, brauchen wir nur zwischen den vorstehenden drei Gleichungen die Coordinaten der geraden Linie (w'', v'', u'') zu eliminiren. Auf diese Weise kommt:

$$(B^2-AC)y'^2+2(AE-BD)x'y'+(D^2-AF)x'^2+2(CD-BE)y'z'+2(BF-DE)x'z'+(E^2-CF)z'^2 = 0, \quad (5)$$

eine Gleichung, die derjenigen analog ist, zu der wir auf einem andern Wege schon in der 484. Nummer gekommen sind.

Wir hätten auch statt der Gleichung (4) folgende Gleichung:

$$Aw''^2+2Bv''w''+Cv''^2+2Du''w''+2Eu''v''+Fu''^2 = 0,$$

nehmen und zwischen dieser Gleichung und den beiden Gleichungen (3) w'', v'' und u'' eliminiren können. Diess ergibt sich *a priori*, weil der gegebene Punct auf der Curve liegen soll, kann aber auch ohne Mühe direct nachgewiesen werden. Denn, addiren wir die beiden Gleichungen (3), nachdem wir die erste derselben mit v'' und die zweite mit u'' multiplicirt haben, so reducirt sich der erste Theil der resultirenden Gleichung, wenn wir zugleich auf die letzte Gleichung Rücksicht nehmen, auf $(-w'')$ und somit erhalten wir die Gleichung (4).

552. Wenn wir y', x' und z' als veränderlich betrachten, so ist (5) die Gleichung zwischen Punct-Coordinaten der durch (2) dargestellten Curve zweiter Classe. Der Kürze halber, wollen wir diese Gleichung auf folgende Weise schreiben:

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dyz+2exz+fz^2 = 0, \qquad (6)$$

indem wir die Accente fortlassen und

$$\frac{b}{a} = \frac{AE-BD}{B^2-AC}, \qquad \frac{c}{a} = \frac{D^2-AF}{B^2-AC},$$

$$\frac{dZ}{dz} = 0, \qquad (6)$$

eine Curve der $(m-1)$. Ordnung dar, welche durch diejenigen $m(m-1)$ Puncte geht, in welchen die durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden Tangenten der gegebenen Curve dieselbe berühren; denn diesen Puncten entspricht ein *maximum* oder *minimum* des Quotienten der Abscissen der Puncte der Curve in die Ordinaten derselben (416). Wenn daher die gegebene Curve (4) von der zweiten Ordnung ist, so stellen die Gleichungen (5) diejenigen beiden Durchmesser derselben dar, deren zugeordnete der ersten und zweiten Axe parallel sind, und die Gleichung (6) stellt die Polare des Anfangspunctes dar. Wir sehen zugleich, dass eine Curve m. Ordnung im Allgemeinen von der $m(m-1)$. Classe ist, weil an eine solche Curve sich im Allgemeinen, von einem gegebenen Puncte aus, $m(m-1)$ reelle oder imaginäre Tangenten legen lassen.

$$\frac{d}{a} = \frac{CD-BE}{B^2-AC}, \qquad \frac{e}{a} = \frac{BF-DE}{B^2-AC}, \qquad (7)$$
$$\frac{f}{a} = \frac{E^2-CF}{B^2-AC},$$

setzen. Wenn wir, umgekehrt, von der Gleichung (6) ausgehen, und die Bedingungs-Gleichung suchen, dass die durch folgende Gleichung:

$$w'z+v'x+u'y = o,$$

dargestellte gerade Linie die gegebene Curve berühre, so erhalten wir, wenn wir zugleich die Accente von w', v' und u' fortlassen (171):

$$(b^2-ac)w^2+2(ae-bd)vw+(d^2-af)v^2+2(cd-be)uw+2(bf-d2)uv+(e^2-cf)u^2 = o.$$

Diese Gleichung stellt die durch (6) gegebene Curve zweiter Ordnung (und zweiter Classe) durch Linien-Coordinaten dar und ist also nothwendig mit der ursprünglich gegebenen Gleichung identisch, so dass:

$$\frac{B}{A} = \frac{ae-bd}{b^2-ac}, \qquad \frac{C}{A} = \frac{d^2-af}{b^2-ac},$$
$$\frac{D}{A} = \frac{cd-be}{b^2-ac}, \qquad \frac{E}{A} = \frac{bf-de}{b^2-ac}, \qquad (8)$$
$$\frac{F}{A} = \frac{e^2-cf}{b^2-ac}.$$

Die Coefficienten der beiden Gleichungen (2) und (6) werden also gegenseitig gerade auf dieselbe Weise durch einander ausgedrückt. Wir können uns hiervon auch direct überzeugen, ohne die letzten Entwicklungen zu machen; denn aus den Gleichungen (7) erhalten wir nach einigen leichten Umformungen unmittelbar die Gleichungen (8). Umgekehrt erhalten wir auch aus diesen Gleichungen jene. —

553. Wenn wir der Gleichung des Punctes (1), der auf dem Umfange der Curve (2) liegt, folgende Form geben:

$$\pm\frac{u}{u'}+\frac{v}{v'}\mp\frac{w}{w'} = o, \qquad (9)$$

so sind, wenn wir in dieser Gleichung die obern Zeichen nehmen, w', v' und u' Coordinaten einer Diagonale desjenigen Parallelogrammes, dessen Seiten den Coordinaten-Axen parallel sind und dessen andere Diagonale den Punct (9) mit dem Anfangspuncte verbindet. Es sind ferner w', $\frac{1}{2}v'$ und $\frac{1}{2}u'$, wie man sogleich einsieht, Coordinaten derjenigen geraden Linie, die durch den Punct (9) geht, und die, bis zu den Coordinaten-Axen verlängert, in diesem Puncte halbirt wird.

Wenn wir ferner in der Gleichung (9) die untern Zeichen nehmen, so sind w', v' und u' Coordinaten einer solchen geraden Linie, die derjenigen parallel ist, welche den Punct (9) mit dem Anfangspuncte verbindet, und durch denjenigen Punct der zweiten Axe geht, dessen Ordinate der Ordinate jenes Punctes gleich ist. Es sind $\frac{1}{2}w'$, $\frac{1}{2}v'$ und u' Coordinaten derjenigen geraden Linie, die durch den Punct (9) und denjenigen Punct der zweiten Axe geht, dessen Ordinate der halben Ordinate des Punctes (9) gleich ist, und die also in einen solchen Punct der ersten Axe einschneidet, dessen Abscisse der negativ genommenen Abscisse des Punctes (9) gleich ist.

554. Die Gleichung (5) steigt, wenn wir die Gleichung (9), statt der Gleichung (1), zu Grunde legen, in Beziehung auf die Constanten dieser neuen Gleichung, im Allgemeinen, bis zum vierten Grade und stellt also, wenn wir diese Constanten w', v' und u'

als Linien-Coordinaten und veränderlich betrachten, im Allgemeinen eine Curve vierter Classe dar. Wir wollen einige Fälle betrachten, wo der Grad dieser Gleichung sich reducirt.

Wenn wir von folgender Gleichung:

$$Aw^2+2Euv = 0,$$

die eine auf ihre Asymptoten als Coordinaten-Axen bezogene Hyperbel darstellt (461), ausgehen, so verwandelt sich die Gleichung (5) für diesen Fall in folgende:

$$2Ax'y'+Ez'^2 = 0.$$

Wenn wir in diese Gleichung statt x', y' und z' die Constanten der mit den obern Zeichen genommenen Gleichung (9) einführen, indem wir $z' = -\frac{1}{w'}$, $x' = \frac{1}{v'}$ und $y' = \frac{1}{u'}$ setzen, so ergibt sich:

$$2Aw'^2+Eu'v' = 0,$$

und endlich, wenn wir $\frac{1}{2}v' = v$ und $\frac{1}{2}u' = u$ setzen, so kommen wir zu der Gleichung:

$$Aw^2+2Euv = 0,$$

zurück, von welcher wir ursprünglich ausgegangen sind. Wenn wir dieses Resultat nach der vorigen Nummer deuten, so erhalten wir den allbekannten Satz, dass jede von den Asymptoten einer Hyperbel begränzte Tangente derselben im Berührungspuncte halbirt wird.

555. Wenn wir von der Gleichung:

$$2Bvw+Fu^2 = 0.$$

welche eine Parabel darstellt, die auf einen ihrer Durchmesser, als erste, und die Tangente im Scheitel desselben, als zweite Axe, bezogen ist, ausgehen, so verwandelt sich die Gleichung (5) in folgende:

$$By'^2+2Fx'z' = 0.$$

Wenn wir in diese Gleichung die Constanten der mit den untern Zeichen genommenen Gleichung (9) einführen, und also $z' = \frac{1}{w'}$, $x' = \frac{1}{v'}$ und $y' = -\frac{1}{u'}$ setzen, so kommt:

$$Bv'w'+2Fu'^2 = 0,$$

und endlich, indem wir w und v statt $\frac{1}{2}w'$ und $\frac{1}{2}v'$ schreiben:

$$2Bvw+Fu^2 = 0:$$

die Gleichung, von der wir ursprünglich ausgegangen sind. Deuten wir dieses Resultat nach der 553. Nummer, so erhalten wir den allbekannten Satz, dass für jeden Punct der Parabel (auf die in dem Obigen bezeichneten Coordinaten-Axen bezogen) die Subtangente der doppelten Abscisse gleich ist.

556. Wenn die gegebene Curve eine Hyperbel ist, und auf Coordinaten-Axen, die auf dem Umfange derselben sich schneiden und den Asymptoten parallel sind, bezogen wird, und demnach folgende Bedingungs-Gleichungen Statt finden:

$$B^2-AC = 0, \qquad D^2-AF = 0, \qquad E^2-CF = 0,$$

so reducirt sich die Gleichung (6) auf folgende:

$$(AE-BD)x'y'+(CD-BE)y'z'+(BF-DE)x'z' = 0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich, da nach den vorstehenden Bedingungs-Gleichungen:

$$\frac{CD-BE}{AE-BD} = -\frac{B}{A} = +\frac{E}{D}, \qquad \frac{BF-DE}{AE-BD} = -\frac{D}{A} = -\frac{F}{D},$$

in jede von folgenden beiden:

$$Ax'y' - By'z' - Dx'z' = 0, \qquad (10)$$
$$Dx'y' + Ey'z' - Fx'z' = 0. \qquad (11)$$

Wenn wir nun erstens in die Gleichung (10) die Constanten der mit den obern Zeichen genommenen Gleichung (9) einführen, indem wir $z' = -\frac{1}{w}$, $x' = \frac{1}{v}$ und $y = \frac{1}{u}$ setzen, so verwandelt sich dieselbe, wenn wir reduciren und die Accente fortlassen, in folgende Gleichung:

$$Aw + Bv + Du = 0,$$

welche, wenn wir w, v und u als veränderlich betrachten, den Mittelpunct der gegebenen Hyperbel darstellt. Deuten wir also nach der 553. Nummer, so erhalten wir folgenden bekannten Satz:

Eine Diagonale aller derjenigen Parallelogramme, deren zwei Winkelpuncte auf einer gegebenen Hyperbel liegen und deren Seiten den Asymptoten derselben parallel sind, geht immer durch den Mittelpunct der Hyperbel. (283)

Wenn wir in der letzten Gleichung v und u mit 2v und 2u vertauschen, so ergibt sich:

$$Aw + 2Bv + 2Du = 0.$$

Diese Gleichung stellt einen solchen Punct dar, der auf der gegebenen Hyperbel liegt und zwar auf demjenigen Durchmesser derselben, der zugleich durch den Anfangspunct geht. (533) Wir erhalten also folgenden bekannten Satz:

Wenn man durch einen Endpunct eines beliebigen Durchmessers einer gegebenen Hyperbel zwei den Asymptoten derselben parallele gerade Linien zieht, so wird jede durch den andern Endpunct gehende und von jenen Parallelen begränzte gerade Linie in ihrem Durchschnitte mit der Curve halbirt.

557. Wenn wir zweitens in die Gleichung (11) die Constanten der mit den untern Zeichen genommenen Gleichung (9) einführen und dann die Accente fortlassen, so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$Dw + Ev + Fu = 0.$$

Diese Gleichung stellt den Pol der ersten Axe, also denjenigen Punct dar, in welchem die Tangente im Anfangspuncte der jener Axe parallelen Asymptote begegnet. Wenn wir berücksichtigen, dass wir nach einander jeder der beiden Asymptoten der Hyperbel die erste Axe parallel und jeden von zwei gegebenen auf dem Umfange derselben liegenden Puncten zum Anfangspuncte nehmen können, so erhalten wir folgenden Satz:

Wenn zwei Winkelpuncte A und B irgend eines Parallelogramms auf dem Umfange einer gegebenen Hyperbel liegen und die Seiten desselben den Asymptoten der Curve parallel sind, so bilden diejenigen beiden geraden Linien, welche durch die beiden übrigen Winkelpuncte des Parallelogramms gehen und der die Winkelpuncte A und B verbindenden geraden Linie parallel sind, die beiden Asymptoten und die beiden Tangenten der gegebenen Hyperbel in den beiden Puncten A und B ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen.

Wir können hiernach leicht, wenn eine Asymptote einer Hyperbel, die andere Asymptote der Richtung nach, und zwei Puncte gegeben sind, in diesen Puncten die Tangenten construiren und die zweite Asymptote vollständig bestimmen. Wir können auch, wenn die Richtung der beiden Asymptoten und drei Puncte einer Hyperbel gegeben sind, die beiden Asymptoten bestimmen und zugleich die Tangenten in den gegebe-

nen Puncten construiren. Da wir die drei gegebenen Puncte auf dreifache Weise zu zwei combiniren können, so erhalten wir drei Puncte jeder der beiden Asymptoten, und somit auch einen Satz über den Durchschnitt gerader Linien.

Wenn wir in der letzten Gleichung $2w$ und $2v$ für w und v schreiben, so verwandelt sich dieselbe in folgende:

$$2Dw+2Ev+Fu = 0;$$

eine Gleichung, deren geometrische Bedeutung die 533. Nummer enthält. Auch an diesen Fall knüpfen sich Sätze und Constructionen, deren Herleitung keine Schwierigkeit hat.

558. Wenn der durch die Gleichung (1) dargestellte Punct auf einer gegebenen geraden Linie (v', u') liegt, so können wir dieser Gleichung, indem wir $w = z' = 1$ und $\frac{y}{x} = a$ setzen, folgende Form geben:

$$(v-v')+a(u-u') = 0,$$

oder, wenn wir zugleich, um homogen zu machen, wiederum w hinzufügen:

$$(v'+au')w-v-au = 0. \qquad (12)$$

Die Gleichung (5) verwandelt sich hiernach, indem wir $z' = v'+au'$, $x' = -1$ und $y' = -a$ setzen, in folgende:

$$(B^2-AC)a^2+2(AE-BD)a+(D^2-AF)-2(CD-BE)(av'+a^2u')-2(BF-DE)(v'+au')+$$
$$(E^2-CF)(v'+au')^2 = 0. \qquad (13)$$

Wenn wir a als gegeben betrachten; so liegt der Punct (y', x'), der durch die Gleichung (1) und (12) dargestellt wird, auf der geraden Linie

$$y = ax, \qquad (14)$$

die durch den Anfangspunct der Coordinaten geht und mit der ersten Coordinaten-Axe einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente a ist. Betrachten wir daher in (12) v' und u' als beliebig zu bestimmende Grössen, so stellt, bei gehöriger Bestimmung derselben, diese Gleichung jeden beliebigen Punct der geraden Linie (14) dar. Wenn wir in der Gleichung (13) v' und u' als veränderlich betrachten, so stellt dieselbe, wie ihre Form zeigt, ein System von zwei Puncten dar: diese beiden Puncte sind also keine andern als die beiden Durchschnittspuncte der gegebenen Curve (2) und der geraden Linie (14).

559. Wenn eine zweite gerade Linie (v'', u'') gegeben ist, auf welcher der Punct (12) liegt, so erhalten wir:

$$a = -\frac{v''-v'}{u''-u'}, \qquad v'+au' = \frac{u''v'-v''u'}{u''-u'};$$

und wenn wir hiernach aus (13) a eliminiren, so kommt:

$$(B^2-AC)(v''-v')^2-2(AE-BD)(v''-v')(u''-u')+(D^2-AF)(u''-u')^2+2(CD-BE)(v''-v')$$
$$(u''v'-v''u')-2(BF-DE)(u''-u')(u''v'-v''u')+(E^2-CF)(u''v'-v''u')^2 = 0: \qquad (15)$$

eine in Beziehung auf v'', u'' und v', u' symmetrische Gleichung. Diese Gleichung drückt aus, dass derjenige Punct, welcher im Durchschnitte der beiden geraden Linien (v'', u'') und (v', u') liegt, und dessen Gleichung folgende ist:

$$v-v' = \frac{v''-v'}{u''-u'}(u-u'),$$

ein Punct des Umfanges der gegebenen Curve (2) ist. Wenn wir v'' und u'' als beliebige Constanten betrachten, so können wir durch die letzte Gleichung jeden beliebigen Punct

der geraden Linie (v', u') darstellen. Betrachten wir daher in der Gleichung (15) dieselben Grössen v'' und u'' als veränderliche Grössen, so sind die beiden Puncte, welche diese Gleichung darstellt, offenbar die Durchschnittspuncte der gegebenen Curve (2) mit der gegebenen geraden Linie (v', u').

Ich verweile hier nicht bei der Discussion der Gleichungen (13) und (15).

§. 6.

Zusammenstellung von Oertern zweiter Classe mit gemeinschaftlichem Brennpuncte.

560. Wir haben im ersten Paragraphen dieses Abschnittes gesehen, dass wir durch schickliche Verlegung des Anfangspunctes der Coordinaten, der allgemeinen Gleichung der Curven zweiter Classe folgende Form geben können:

$$(v-v')^2+(u-u')^2 = k^2. \qquad (1)$$

Bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten-Axen, auf die wir uns hierbei beschränken wollen, ist alsdann ein Brennpunct der dargestellten Curve Anfangspunct der Coordinaten.

Das Erste, was uns hier entgegentritt, ist die Frage nach der geometrischen Bedeutung der drei Constanten in der vorstehenden Gleichung. Zwei dieser drei Constanten v' und u' können wir als die Coordinaten einer gegebenen geraden Linie ansehen und dieselbe Directrix nennen. Wir wollen zunächst diese gerade Linie bestimmen.

Für die Gleichung des Poles der zweiten Axe erhalten wir (549), indem wir, in Beziehung auf v, die Gleichung der Curve differentiiren:

$$v-v' = o: \qquad (2)$$

also denjenigen Punct der ersten Axe, dessen Abscisse gleich $\left(-\frac{1}{v'}\right)$ ist. Auf gleiche Weise erhalten wir, indem wir in Beziehung auf u differentiiren, für den Pol der ersten Axe folgende Gleichung:

$$u-u' = o, \qquad (3)$$

die denjenigen Punct der zweiten Axe darstellt, dessen Ordinate gleich $\left(-\frac{1}{u'}\right)$ ist. Der Pol der ersten Axe liegt also auf der zweiten Axe, und der Pol dieser Axe auf jener.

Die gerade Linie (v', u') oder die Directrix geht durch die beiden Puncte (2) und (3), also durch die Pole der beiden Axen, und ist demnach keine andere als die Polare des Anfangspunctes, die Polare eines Brennpunctes der Curve zweiter Classe. Sie ist unabhängig von der Richtung der rechtwinkligen Coordinaten-Axen.

Wenn $v' = o$, so ist die Directrix der ersten Axe parallel, wenn $u' = o$, so ist dieselbe der zweiten Axe parallel; in dem ersten Falle fällt also die Hauptaxe der Curve in die zweite Coordinaten-Axe, in dem zweiten Falle fällt dieselbe in die erste Coordinaten-Axe. Wenn wir zugleich $v' = o$ und $u' = o$ setzen, so liegt die Directrix unendlich weit; die Gleichung:

$$v^2+u^2 = k^2,$$

auf welche sich die Gleichung (1) reducirt, zeigt aber, dass alsdann die bezügliche Curve ein Kreis ist, dessen Mittelpunct in den Anfangspunct der Coordinaten fällt.

561. Wenn wir in der Gleichung (1) $v = v'$ setzen, so ergibt sich:

$$u = u' \pm k,$$

und wenn wir diese beiden Werthe von u durch $u^{\cdot}$ und $u^{\cdot\cdot}$ unterscheiden, so kommt

$$u^{\cdot} - u^{\cdot\cdot} = 2k.$$

Diese beiden Werthe beziehen sich auf diejenigen beiden Tangenten der Curve, die durch den Durchschnitt der Directrix mit der ersten Axe gehen. Da dieser Punct der Pol der zweiten Axe ist, so fallen die Berührungspuncte auf jenen beiden Tangenten in diese zweite Axe. $u^{\cdot}$ und $u^{\cdot\cdot}$ bedeuten also die reciproken Werthe derjenigen Segmente dieser Axe, welche zwischen dem Brennpuncte und den Durchschnitten derselben mit der Curve liegen. Nennen wir diese Segmente r und r', so erhalten wir, mit Berücksichtigung ihrer Lage, aus der letzten Gleichung:

$$\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'} = 2k;$$

wobei wir für den Fall der Ellipse und Parabel immer das obere Zeichen, für den Fall der Hyperbel das obere oder untere Zeichen nehmen müssen, je nachdem die zweite Axe nur einem oder beiden Zweigen der Hyperbel begegnet.

Auf gleiche Weise erhalten wir, wenn wir diejenigen Segmente, welche auf der ersten Axe zwischen den Durchschnitten derselben mit der Curve und dem Brennpuncte liegen, s und s' nennen:

$$\frac{1}{s} \pm \frac{1}{s'} = 2k.$$

Die halbe Summe der reciproken Werthe derjenigen beiden Segmente einer beliebigen, durch einen Brennpunct einer Ellipse oder einer Parabel gehenden, geraden Linie, die zwischen diesem Puncte und den Durchschnitten der geraden Linie mit der Curve liegen, ist constant und gleich 2k (503). Für den Fall der Hyperbel ist die Summe oder die Diffezenz jener reciproken Werthe constant und gleich 2k, je nachdem die durch einen Brennpunct gehende gerade Linie nur einen Zweig derselben oder beide Zweige schneidet. Es ist also auch k gleich dem reciproken Werthe derjenigen halben Chorde der gegebenen Curve, die im Brennpuncte halbirt wird, und mithin auf der Axe der Curve senkrecht steht.

562. Eh wir weiter gehen, wollen wir die Constanten folgender Gleichung:

$$(v-v')^2 + 2(v-v')(u-u')\cos\vartheta + (u-u')^2 = k^2,$$

betrachten. Wir können durch diese Gleichung jede beliebige Curve zweiter Classe darstellen, indem wir, wie oben, den Brennpunct zum Anfangspuncte nehmen, aber Coordinaten-Axen wählen, die mit einander irgend einen beliebigen Winkel ϑ bilden (503). Für die Pole der zweiten und ersten Axe erhalten wir, indem wir differentiiren, folgende Gleichungen:

$$(v-v') + (u-u')\cos\vartheta = 0,$$
$$(u-u') + (v-v')\cos\vartheta = 0.$$

Diese Gleichungen werden beide befriedigt, wenn wir zugleich

$$v = v', \qquad u = u',$$

setzen, die gerade Linie (v', u') geht also durch die Pole der beiden Axen, ist die Polare des Anfangspunctes, Directrix der Curve.

Die Constante k können wir auf demselben Wege bestimmen, als in der vorigen Nummer, und begegnen alsdann einem neuen geometrischen Satze.

563. Wir wenden uns nun zur Gleichung

$$(v-v')^2+(u-u')^2 = k^2 \qquad (1)$$

zurück, und wollen die verschiedenen Arten von Curven, welche diese Gleichung, bei verschiedener Constanten-Bestimmung, darstellen kann, discutiren. Der für diese Discussion, in Beziehung auf die allgemeine Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = o,$$

characteristische Ausdruck:

$$(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2),$$

verwandelt sich, für den Fall der Gleichung (1), indem wir

$$A = v'^2+u'^2-k^2, \quad B = -v', \quad D = -u', \quad C = F = 1, \quad E = o,$$

setzen, in folgenden:

$$Ak^2. \qquad (2)$$

Es gehen ferner die beiden Ausdrücke:

$$AC-B^2, \qquad AF-D^2,$$

in folgende über:

$$u'^2-k^2, \qquad v'^2-k^2. \qquad (3)$$

Wenn die gegebene Gleichung (1) eine Hyperbel darstellen soll, so muss der Ausdruck (2) positiv sein (457), und also auch A, so lange k reell bleibt. Hiernach kommt:

$$v'^2+u'^2 > k^2.$$

Wenn wir annehmen, k^2 sei negativ, so müsste A negativ sein, damit der Ausdruck (2) positiv würde, so dass:

$$v'^2+u'^2 < k^2;$$

eine Bedingung, die für den in Rede stehenden Fall nicht erfüllt werden kann, so lange v' und u', und also auch die Directrix reell bleiben sollen.

Die zweite oder erste Coordinaten-Axe ist einer der beiden Asymptoten der Hyperbel parallel (459), wenn

$$k^2 = u'^2, \quad \text{oder} \quad k^2 = v'^2.$$

Die geometrische Deutung dieser Resultate gibt uns folgenden Satz:

Wenn man durch einen Brennpunct einer gegebenen Hyperbel den Asymptoten derselben zwei gerade Linien parallel zieht, so liegen die Durchschnitte dieser beiden geraden Linien mit der Directrix auf dem Umfange eines Kreises, dessen ein Durchmesser die durch den Brennpunct gehende, der Directrix parallelle, Chorde der gegebenen Hyperbel ist.

Wenn die Gleichung (1) eine Ellipse darstellen soll, so muss der Ausdruck (2) negativ sein und also auch A, so lange k reell bleibt, und also:

$$k^2 > v'^2+u'^2.$$

Die dargestellte Ellipse ist alsdann immer reell, weil die letzte Bedingung mit sich bringt, dass auch die beiden Ausdrücke (3) negativ werden (456).

Wenn k^2 negativ ist, so ergibt sich, damit der Ausdruck (2) negativ werde:

$$k^2 < v'^2+u'^2.$$

In diesem Falle ist die Curve imaginär, weil alsdann nach der letzten Bedingung die Ausdrücke (3) nothwendig positiv sind.

Die allgemeine Gleichung stellt eine gleichseitige Hyperbel dar, wenn die Bedingungs-Gleichung (490):

$$A(C+F)-(B^2+D^2) = o,$$

besteht, welche in vorliegendem Falle in folgende sich verwandelt:

$$2k^2 = v'^2+u'^2.$$

Wenn wir überdiess die Coordinaten-Axen den Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel parallel nehmen, so erhält die Gleichung (1) folgende Form:

$$(v-k)^2+(u-k)^2 = k^2.$$

Wenn $k = o$, so verschwindet der Ausdruck (2) und die Gleichung (1) stellt mithin ein System von zwei Puncten dar. Da alsdann aber die beiden Ausdrücke bei (3) negativ werden, so sind diese beiden Puncte nothwendig imaginär, oder, was dasselbe heisst, die Gleichung (1) stellt eine gerade Linie dar. Wir sehen diess auch unmittelbar aus dieser Gleichung. Die dargestellte gerade Linie ist die gemeinschaftliche Directrix aller derjenigen Curven, welche durch die Gleichung (1) dargestellt werden, wenn wir in derselben v' und u' als ein für alle Mal gegeben betrachten und für k nach einander beliebige Werthe nehmen (560).

Wenn endlich $A = o$, also:

$$k^2 = v'^2+u'^2,$$

so stellt die Gleichung (1) eine Parabel dar.

Hiernach stellt, indem wir zusammenfassen, die Gleichung (1), wenn wir derselben folgende Form geben:

$$v^2-2v'v+u^2-2u'u = M,$$

eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar, je nachdem M positiv, gleich Null oder negativ ist. Die gerade Linie, welche, im Falle, dass $k = o$ ist, durch diese Gleichung dargestellt wird, bildet den Uebergang von Hyperbeln zu imaginären Curven (521).

564. Es sei wiederum:

$$(v-v')^2+(u-u')^2 = k^2, \tag{1}$$

die Gleichung irgend einer Curve zweiter Classe und (v'', u'') irgend eine Tangente dieser Curve. Alsdann erhalten wir nach einer leichten Reducion (547):

$$(v''-v')(v-v')+(u''-u')(u-u') = k^2, \tag{2}$$

für die Gleichung des Berührungspunctes auf der gegebenen Tangente.

Wir können dieselbe Gleichung auch auf folgende Weise schreiben:

$$(v''-v')v+(u''-u')u+N = o,$$

indem wir, der Kürze halber,

$$(v''-v')v'+(u''-u')u'+k^2 = -N,$$

setzen. Zur Bestimmung der Entfernung (D) des Berührungspunctes vom Anfangspuncte der Coordinaten ergibt sich folgender Ausdruck (413):

$$D = \frac{\sqrt{[(u''-u')^2+(v''-v')^2]}}{N},$$

und da (v'', u'') eine Tangente der gegebenen Curve ist, so kommt:

$$D = \frac{k}{N}.$$

Der Abstand (P) desselben Punctes von der Directrix, oder der geraden Linie (v', u') ist nach der 414. Nummer auf folgende Weise bestimmt:

$$P = \frac{k^2}{N\sqrt{(v'^2+u'^2)}}.$$

Man erhält also:

$$\frac{P}{D} = \frac{k}{\sqrt{(v'^2+u'^2)}}. \tag{ε}$$

Da dieser Ausdruck von der besondern Annahme der Tangente (v'', u'') unabhängig ist, so ist klar, dass für alle Puncte der gegebenen Curve das Verhältniss von P zu D dasselbe bleibt. Wenn die gegebene Curve eine Parabel ist, so ist $k = \sqrt{(v'^2+u'^2)}$ und mithin $P = D$. Für den Fall der Ellipse ist $P > D$; für den Fall der Hyperbel $P < D$. Für den Fall der gleichseitigen Hyperbel insbesondere ist $D = P\sqrt{2}$.

Die letzte Gleichung ist, wenn wir P und D als veränderliche Grössen betrachten, als eine Gleichung der Curve anzusehen. Die Coordinaten sind alsdann die Abstände der Puncte der Curve von einer gegebenen geraden Linie (der Directrix), und von einem gegebenen Puncte (dem Brennpuncte).

565. Wenn eine Ellipse oder Hyperbel gegeben ist, so können wir, nach einander, jeden ihrer beiden Brennpuncte zum Anfangspuncte nehmen, und jedem Brennpuncte entspricht eine Directrix. Der constante Quotient von D in P, den wir λ nennen wollen, ist derselbe, gleichviel von welchem der beiden Brennpuncte (die in Beziehung auf die Curve eine symmetrische Lage haben) wir ausgehen mögen. Man erhält daher auch, wenn man die Abstände eines beliebigen Punctes der Curve von den beiden Brennpuncten r und r′, und die Entfernung der beiden Directricen von einander d nennt:

$$\frac{d}{r \pm r'} = \lambda,$$

wobei wir das obere Zeichen für den Fall der Ellipse, deren jeder Punct zwischen den beiden Directricen liegt, und das untere Zeichen für den Fall der Hyperbel, deren jeder Punct auf derselben Seite ihrer beiden Directricen sich befindet, nehmen müssen. Betrachten wir ferner nach einander die Abstände der beiden Scheitel der Hauptaxe der Curve von einem beliebigen Brennpuncte derselben und der entsprechenden Directrix, so erhält man:

$$\frac{d}{a} = \lambda,$$

wenn man bemerkt, dass, je nachdem die Curve eine Ellipse oder Hyperbel ist, die Summe oder die Differenz der beiden Abstände von dem Brennpuncte der Hauptaxe gleich ist, und man diese Axe a nennt. Aus den beiden vorstehenden Gleichungen folgt:

$$r \pm r' = a.$$

Die Summe der beiden Abstände jedes Punctes des Umfanges einer gegebenen Ellipse von den beiden Brennpuncten derselben ist constant und gleich ihrer grössern Axe. Die Differenz der beiden Abstände aller Puncte des Umfanges einer gegebenen Hyperbel von den beiden Brennpuncten derselben ist constant und gleich ihrer reellen Axe.

566. Wenn wir die erste Coordinaten-Axe durch den Durchschnittspunct der Directricen irgend zweier gegebenen Curven mit demselben Brennpuncte legen, so entspricht diesen Directricen dasselbe v, und hiernach können wir für die Gleichungen der beiden Curven folgende nehmen:

$$(v-v')^2+(u-u')^2 = k^2,$$
$$(v-v')^2+(u-u'')^2 = k'^2. \qquad (1)$$

Die Werthe der beiden veränderlichen Grössen, welche die beiden vorstehenden Gleichungen zugleich befriedigen, sind die Coordinaten der gemeinschaftlichen Tangenten der beiden durch diese Gleichungen dargestellten Curven. Es ist ersichtlich, dass es solcher gemeinschaftlichen Tangenten nur zwei gibt. Wir erhalten ferner die allgemeine Glei-

chung aller derjenigen Curven zweiter Classe, welche mit den beiden gegebenen denselben Brennpunct und dieselben beiden gemeinschaftlichen Tangenten haben, wenn wir eine der vorstehenden beiden Gleichungen mit einem unbestimmten Coefficienten multipliciren und dann zu der andern Gleichung addiren. Auf diese Weise kommt, nach einigen Reductionen:

$$(v-v')^2+\left(u-\frac{u'+\mu u''}{1+\mu}\right)^2=\frac{(1+\mu)(k^2+\mu k'^2)-\mu(u'-u'')^2}{(1+\mu)^2}. \qquad (2)$$

Die Directrix der, bei irgend einer Annahme für μ, durch diese Gleichung dargestellten Curve ist $\left(v', \frac{u'+\mu u''}{1+\mu}\right)$ und geht also durch den Durchschnitt der beiden Directricen (v', u') und (v', u'') der beiden gegebenen Curven.

Wenn wir insbesondere $\mu = -1$ nehmen, so reducirt sich der Grad der resultirenden Gleichung; diese Gleichung stellt alsdann einen Punct dar, und zwar den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten aller in Rede stehenden Curven. Wir erhalten für diese Gleichung folgende:

$$2(u''-u')u = k^2-u'^2-k'^2+u''^2, \qquad (3)$$

der Durchschnittspunct der gemeinschaftlichen Tangenten liegt also auf der zweiten Coordinaten-Axe.

Die Directricen aller derjenigen Curven mit demselben Brennpuncte, welche dieselben beiden geraden Linien berühren, gehen durch einen festen Punct. Diejenigen beiden geraden Linien, welche diesen festen Punct und den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten aller Curven mit dem Brennpuncte verbinden, bilden am Brennpuncte einen rechten Winkel.

Wenn die beiden Gleichungen (1) insbesondere zwei Parabeln darstellen, so stellt auch die allgemeine Gleichung (2) nur Parabeln dar. Die Gleichung (3) reducirt sich alsdann auf folgende:

$$u = 0,$$

und stellt also einen Punct dar, der, nach der Richtung der zweiten Axe hin, unendlich weit liegt. Alle durch (2) dargestellten Parabeln berühren dieselbe, dieser Axe parallele, gerade Linie.

567. Wir können auch, um zur Gleichung (2) zu gelangen, von einer beliebigen der beiden Gleichungen (1) und von der Gleichung (3) ausgehen, und auf diesem Wege die allgemeine Gleichung aller derjenigen Curven bestimmen, die mit einer gegebenen denselben Brennpunct und zwei gemeinschaftliche Tangenten haben, die in einem gegebenen Puncte sich schneiden. Wenn wir für die Gleichung der gegebenen Curve folgende nehmen:

$$(v-v')^2+(u-u')^2 = k^2,$$

und der Gleichung des gegebenen Punctes, den wir wiederum auf der zweiten Axe annehmen, folgende Form geben:

$$u = c, \qquad (4)$$

so erhalten wir die gesuchte allgemeine Gleichung, wenn wir die letzte Gleichung mit einem unbestimmten Coefficienten, mit (2μ), multipliciren und dann zur vorhergehenden Gleichung addiren. Auf diese Weise kommt nach einer einfachen Reduction:

$$(v-v')^2+(u-(u'-\mu))^2 = k^2+2(c-u')\mu+\mu^2. \qquad (5)$$

Diese Gleichung stellt insbesondere eine gerade Linie dar, wenn wir μ so bestimmen, dass der zweite Theil derselben verschwindet. Setzen wir demnach:

$$\mu^2+2(c-u')\mu+k^2 = o, \qquad (6)$$

so erhalten wir für μ folgende beiden Werthe:

$$\mu = -(c-u')\pm\sqrt{[(c-u')^2-k^2]}.$$

Die Gleichung (5) stellt also, im Allgemeinen, bei gehöriger Bestimmung von μ, jede von zwei geraden Linien dar. Diese beiden geraden Linien fallen zusammen, wenn

$$(c-u')^2 = k^2,$$

und also:

$$c = u'\pm k.$$

Man sieht sogleich, dass in diesem Falle der Punct (4) in einem der beiden Durchschnittspuncte der zweiten Axe mit der gegebenen Curve liegt. Denn, wenn man in der Gleichung der gegebenen Curve $v = v'$ setzt, so erhält man, da der Punct (v', o) der Pol der zweiten Axe ist, das u jener Durchschnittspuncte und für dieses u die obigen beiden Werthe von c. In dem vorliegenden Falle reducirt sich die Gleichung (5) auf folgende:

$$(v-v')^2+(u-c)^2 = o,$$

und stellt also die gerade Linie (v', c) d. h. die Tangente in dem gegebenen, auf der gegebenen Curve liegenden Punct dar.

Die beiden in Rede stehenden geraden Linien sind reell oder imaginär, je nachdem

$$(c-u')^2 > k^2 \quad \text{oder} \quad (c-u')^2 < k^2.$$

Die erste der beiden vorstehenden Bedingungen können wir auch auf folgende Weise schreiben:

$$(c-u'-k)(c-u'+k) > o.$$

In dem Falle, dass die Werthe der beiden Ausdrücke $(u'+k)$ und $(u'-k)$ dasselbe Zeichen haben (was nur für den Fall der Hyperbel Statt finden kann), muss c entweder kleiner oder grösser als die beiden Ausdrücke sein, und der bezügliche Punct liegt also innerhalb der Curve. Wenn die beiden Ausdrücke $(u'+k)$ und $(u'-k)$ Werthe von entgegengesetztem Zeichen haben, und demnach der erste derselben positiv, der zweite negativ ist, so wird die letzte Bedingung erfüllt, wenn wir c positiv und grösser als $(u'+k)$, und wenn wir c negativ und, abgesehen vom Zeichen, grösser als $(u'-k)$ nehmen; der bezügliche Punct liegt also zwischen den beiden Durchschnittspuncten der zweiten Axe mit der Curve, das heisst, innerhalb der Curve. Wir sehen hieraus, dass, wenn der gegebene Punct innerhalb der gegebenen Curve liegt, die Gleichung (5) bei einer zwiefachen Bestimmung von μ eine gerade Linie darstellen kann; dass diese Bestimmung aber imaginär wird für den Fall, dass der gegebene Punct ausserhalb der gegebenen Curve liegt.

Die Gleichung (6) reducirt sich nur dann auf den ersten Grad, wenn k gleich Null ist und wir also, statt von einer Curve, schon von einer geraden Linie ausgehen. Dieser geraden Linie entspricht $\mu = o$. Der andere Werth von μ ist:

$$\mu = 2(u'-c),$$

und durch denselben verwandelt sich die Gleichung (5) in folgende:

$$(v-v')^2+(u-(2c-u'))^2 = o, \qquad (7)$$

und stellt mithin die gerade Linie $(v', 2c-u')$ dar.

Die Ordinate des Durchschnittspunctes derjenigen geraden Linie, von der wir eben ausgegangen sind, mit der zweiten Axe ist $\left(-\frac{1}{u'}\right)$, die Ordinate des Durchschnittspunctes der resultirenden geraden Linie (7) mit derselben Axe ist $\left(-\frac{1}{2c-u'}\right)$ und end-

lich die Ordinate des gegebenen Punctes $\left(-\frac{1}{c}\right)$. Da nur folgende Proportion besteht:

$$\frac{1}{u'} : \frac{1}{c} - \frac{1}{u'} = \frac{1}{2c-u'} : \frac{1}{2c-u'} - \frac{1}{c},$$

so folgt, dass die eben bezeichneten drei Puncte und der gemeinschaftliche Brennpunct, welcher Anfangspunct der Coordinaten ist, ein System von vier harmonischen Theilungspuncten bilden.

568. Wenn der gegebene Punct (4) unendlich weit liegt, so ist c = o. Die Gleichung (5) geht alsdann in folgende über:

$$(v-v')^2+(u-(u'-\mu))^2 = k^2-2\mu u'+\mu^2, \qquad (8)$$

und stellt solche Curven dar, die zwei der zweiten Axe parallele Tangenten berühren. Die Directricen aller dieser Curven gehen immer noch durch denselben Punct der ersten Axe. Es stellt die letzte Gleichung eine gerade Linie dar, wenn

$$\mu = u' \pm \surd(u'^2-k^2).$$

Diese beiden Werthe von μ sind für den Fall, dass die gegebene Curve eine Ellipse ist, immer imaginär (563); für den Fall der Hyperbel nur dann, wenn die zweite Axe eine solche Richtung hat, dass es keine ihr parallele Tangenten gibt. Die beiden Werthe von μ können nur dann zusammenfallen, wenn die gegebene Curve eine Hyperbel und die zweite Axe einer ihrer Asymptoten parallel ist. Es ist diess in Uebereinstimmung mit der vorigen Nummer.

Wenn wir k = o setzen, so stellt die Gleichung (8), ausser der gegebenen geraden Linie, die alsdann an die Stelle der gegebenen Curve tritt, nur noch eine einzige gerade Linie, nemlich folgende:

$$(v', -u'),$$

dar. Es ist klar, dass der von diesen beiden geraden Linien gebildete Winkel von der ersten Axe halbirt wird.

569. Wir wollen uns noch einmal zum allgemeinen Falle zurückwenden. Wenn die Wurzeln der Gleichung (6) imaginär sind, so bleibt der zweite Theil der Gleichung (3), für jeden beliebigen Werth von μ, positiv, und es stellt also auch, für jeden Werth von μ, diese Gleichung eine reelle Curve dar. Die Directricen dieser Curven haben alle möglichen Richtungen. Wenn aber die Wurzeln der Gleichung (6) reell sind, so sind diese Werthe Gränzwerthe von μ, für welche der zweite Theil der Gleichung (5) sein Zeichen ändert, und die bezügliche Curve also, indem sie in eine gerade Linie übergeht, aufhört reell zu sein. Die, diesen Gränzwerthen entsprechenden, beiden geraden Linien bezeichnen zugleich die Gränzen für die Lage der Directricen aller durch die Gleichung (5) dargestellten Curven. Es geht keine Directrix irgend einer dieser Curven durch einen solchen Punct der zweiten Axe, für welchen der Werth von u zwischen:

$$c+\surd((c-u')^2-k^2) \quad \text{und} \quad c-\surd((c-u')^2-k^2),$$

fällt. Diese beiden geraden Linien sind, um mich so auszudrücken, ihre eigenen Directricen; der Anfangspunct der Coordinaten spielt nach der vorstehenden Analyse die Rolle eines Brennpunctes jeder derselben. Wir können diese Bemerkung in Verbindung bringen mit der 477. Nummer, in der wir nachgewiesen haben, dass, analytisch genommen, ein System zweier imaginärer Puncte (oder, was dasselbe heisst, eine gerade Linie) zwei reelle Brennpuncte hat, welche auf einer solchen geraden Linie liegen, die durch den Mittelpunct des Systems geht und senkrecht auf der die beiden imaginären Puncte dessel-

ben verbindenden geraden Linie steht. Nach dieser Bemerkung können wir die Mittelpuncte der beiden in Rede stehenden geraden Linien (als Oerter zweiter Classe betrachtet) und ihre zweiten Brennpuncte bestimmen.

570. Wenn irgend zwei Curven zweiter Classe denselben Brennpunct haben, so haben sie, wenn wir von den beiden in diesem Puncte sich schneidenden imaginären Tangenten abstrahiren, nur noch zwei gemeinschaftliche Tangenten. Wenn wir überhaupt die Gleichungen irgend zweier gegebener Curven zu einer neuen Gleichung verbinden, so erhalten wir die Gleichung eines geometrischen Ortes, der von allen gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Oerter ebenfalls berührt wird. Die Gleichungen zweier Curven zweiter Classe, die denselben Brennpunct haben, lassen sich, indem wir diesen Brennpunct zum Anfangspuncte nehmen, immer zu einer Gleichung des ersten Grades verbinden, die den Durchschnitt ihrer beiden gemeinschaftlichen Tangenten darstellt. Die gemeinschaftlichen Tangenten können imaginär werden: ihr Durchschnitt aber bleibt immer reell.

Als geometrischer Ort (zweiter Classe), der mit den beiden gegebenen Curven dieselben gemeinschaftlichen Tangenten hat, ist indess nicht sowol jener Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten, allein für sich, zu betrachten, sondern vielmehr das System dieses Punctes und des Brennpunctes. Der Brennpunct des Systems dieser beiden Puncte ist der eine dieser Puncte selbst (477), der gemeinschaftliche Brennpunct aller Curven. Die Directrix geht durch diesen Punct und steht auf derjenigen geraden Linie senkrecht, welche die beiden Puncte des Systems verbindet.

Als Folge der besondern Coordinaten-Bestimmung, indem wir nemlich den gemeinschaftlichen Brennpunct zum Anfangspuncte nehmen, wodurch die Coordinaten v und u desselben unendlich werden, lässt sich die resultirende Gleichung auf den ersten Grad reduciren und dadurch verschwindet aus ihr jede Spur des Brennpunctes. Diese Behauptung können wir durch eine einfache analytische Betrachtung unterstützen. Es stellt nemlich folgende Gleichung:

$$(v-v')^2+(1+\epsilon)(u-u')^2 = k^2,$$

je nachdem ϵ eine sehr kleine Grösse bezeichnet oder gleich Null ist, eine Curve zweiter Classe dar, die auf einen solchen Punct, der, beinah oder ganz, mit einem Brennpuncte der Curve zusammenfällt, als Anfangspunct bezogen ist. Wenn wir von dieser Gleichung folgende abziehen:

$$(v-v')^2+(u-u'')^2 = k'^2,$$

so kommt, indem wir durch C eine constante Grösse bezeichnen:

$$\epsilon u^2+2(u''-(1+\epsilon)u')u = C.$$

Diese Gleichung stellt zwei Puncte der zweiten Axe dar. Je kleiner wir den Werth von ϵ nehmen, desto grösser wird ein Werth von u; setzen wir ϵ gleich Null, so reducirt sich die letzte Gleichung auf den ersten Grad, indem eine Wurzel derselben dadurch ausfällt, dass sie unendlich wird. Diese Gleichung stellt alsdann nur noch einen einzigen Punct dar.

Zu demselben Resultate kommen wir unmittelbar auf folgende Weise. Wenn wir die Gleichungen zweier Curven zweiter Classe, die einen gemeinschaftlichen Brennpunct haben, und auf diesen gemeinschaftlichen Brennpunct, als Anfangspunct der Coordinaten, bezogen sind, durch Einführung von w homogen machen und demnach Gleichungen von folgender Form erhalten:

$$(v-v'w)^2+(u-u'w)^2 = k^2w^2,$$
$$(v-v''w)^2+(u-u''w)^2 = k'^2w^2;$$

so ergibt sich durch Verbindung derselben niemals eine Gleichung vom ersten Grade. Denn, wenn wir abziehen, so kommt:

$$w[2(v''-v')v+2(u''-u')u+(v'^2+u'^2-k^2-v''^2-u''^2+k'^2)w] = o:$$

eine Gleichung, die ein System von zwei Puncten darstellt. Wenn wir den Factor w fortlassen, so abstrahiren wir von dem einen dieser beiden Puncte, dem Anfangspuncte der Coordinaten. *)

Hiernach gewinnen wir einen allgemeinern Gesichtspunct und die Entwicklungen der letzten Nummern ordnen sich den allgemeinern des 8. Paragraphen unter.

571. Zur Bestimmung des Mittelpunctes der durch die allgemeine Gleichung (5) dargestellten Curve erhält man sogleich folgende Coordinaten-Werthe:

$$x = \frac{-v'}{v'^2+u'^2-k^2-2\mu c}, \qquad y = \frac{-(u'-\mu)}{v'^2+u'^2-k^2-2\mu c}.$$

Wenn wir μ zwischen diesen beiden Gleichungen eliminiren, so erhalten wir eine solche Beziehung zwischen y und x, die von der besondern Bestimmung dieses Coefficienten unabhängig ist, also die Gleichung des geometrischen Ortes für die Mittelpuncte aller durch die allgemeine Gleichung darstellbaren Curven. Auf diese Weise kommt:

$$2c(v'y-u'x)+(v'^2+u'^2-k^2)x+v' = o. \qquad (9)$$

Die Mittelpuncte aller Curven zweiter Classe, die denselben Brennpunct und zwei gemeinschaftliche (reelle oder imaginäre) Tangenten haben, liegen also in gerader Linie. Diese gerade Linie halbirt diejenige, welche den Durchschnittspunct der beiden (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten mit dem Brennpuncte verbindet; denn, wenn wir in der letzten Gleichung x = o setzen, so kommt:

$$y = -\frac{1}{2c}.$$

Zu den in Rede stehenden Curven, die denselben Brennpunct und zwei gemeinschaftliche Tangenten haben, gehört auch eine Parabel, deren Durchmesser der geraden Linie (9) nothwendig parallel sind. Um die Richtung dieser Durchmesser zu bestimmen, fälle man vom Brennpuncte aus zwei Perpendikel auf die beiden gegebenen Tangenten und verbinde die Fusspuncte derselben durch eine gerade Linie. Diese gerade Linie ist alsdann die Tangente der Parabel im Scheitel ihrer Axe (504) und die Durchmesser derselben stehen auf dieser Tangente senkrecht. Hiernach können wir also die Richtung der geraden Linie (9) bestimmen.

Die letzte Bestimmungsweise fällt ganz fort, wenn die beiden gegebenen Tangenten imaginär sind, sie wird auch dann illusorisch, wenn die beiden gegebenen Tangenten zusammenfallen, das heisst, wenn alle Curven eine gegebene gerade Linie in einem ge-

---

*) Auf ähnliche Weise lässt sich darthun, dass, wenn wir die Gleichungen zweier ähnlicher und ähnlich liegender Curven, bezogen auf gewöhnliche Punct-Coordinaten, mit einander zu einer Gleichung desselben Grades verbinden, nur deshalb, bei gehöriger Verbindung, die resultirende Gleichung auf den ersten Grad sich reducirt, weil von den beiden gemeinschaftlichen Chorden der beiden Curven die eine unendlich weit liegt, und eine solche gerade Linie lässt sich nur dann in der Gleichung nachweisen, wenn wir, nach der 416. Nummer, die dritte Coordinate z einführen.

gebenen Puncte berühren. Im ersten Falle müssen wir zur Gleichung (9) zurückgehen, im zweiten Falle erhalten wir, nach einem bekannten Satze (332), folgende einfache Construction der geraden Linie (9). Man beschreibe über derjenigen geraden Linie, welche den Brennpunct mit dem gegebenen Berührungspuncte auf der gegebenen geraden Linie verbindet, als Durchmesser, einen Kreis. Die zu construirende gerade Linie ist alsdann derjenige Durchmesser dieses Kreises, der durch den zweiten Durchschnittspunct dieses Kreises mit der gegebenen geraden Linie geht.

572. Da die Entfernung der beiden Brennpuncte von einander doppelt so gross ist, als die Entfernung des Mittelpunctes von einem derselben, so erhalten wir unmittelbar die Gleichung des geometrischen Ortes für die zweiten Brennpuncte aller Curven, welche durch die allgemeine Gleichung (5) dargestellt werden, wenn wir in der Gleichung (9) x und y mit $\frac{1}{2}x$ und $\frac{1}{2}y$ vertauschen. Auf diese Weise ergibt sich folgende Gleichung des ersten Grades:

$$2c(v'y-u'x)+(v'^2+u'^2-k^2)x+2v' = 0. \qquad (10)$$

Wenn wir in dieser Gleichung $x = 0$ setzen, so kommt $y = -\frac{1}{c}$; das heisst, die bezügliche gerade Linie geht durch den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen (reellen oder imaginären) Tangenten. Ueberdiess ist sie der geraden Linie (9), dem geometrischen Orte für alle Mittelpuncte, parallel.

Wenn man also vom Brennpuncte aus zwei Perpendikel auf die beiden gemeinschaftlichen Tangenten fällt, die Fusspuncte derselben durch eine gerade Linie verbindet und auf diese gerade Linie, vom Durchschnittspuncte der beiden Tangenten aus ein neues Perpendikel fällt, so ist diese gerade Linie der in Rede stehende geometrische Ort (10).

Man kann diese gerade Linie auch nach dem bekannten Satze bestimmen, dass dieselbe und die zweite Axe, (welche durch den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangenten und durch den gemeinschaftlichen Brennpunct geht) in denselben von diesen Tangenten gebildeten Scheitelwinkeln liegen und mit diesen Tangenten gleiche Winkel bilden. (330) Es leuchtet dieser Satz auch ohne alle algebraischen Entwicklungen ein. Wenn man nemlich durch den gemeinschaftlichen Brennpunct eine solche gerade Linie zieht, welche von den beiden gemeinschaftlichen Tangenten ein gleichschenkliges Dreieck abschneidet, so können wir diese gerade Linie als die Axe einer durch die allgemeine Gleichung (5) dargestellten Curve ansehn, und erhalten alsdann sogleich den zweiten Brennpunct dieser Curve, indem wir auf dieser Axe einen solchen Punct bestimmen, der mit dem gemeinschaftlichen Brennpuncte, in Beziehung auf die beiden gemeinschaftlichen Tangenten, eine symmetrische Lage hat. Durch diesen Punct ist die in Rede stehende gerade Linie (10) vollkommen bestimmt, und zugleich liegt in der hierdurch angezeigten Construction der Beweis für die oben ausgesprochene Eigenschaft derselben.

573. In den letzten Nummern sind die Elemente zu mehrern Constructionen einer Curve zweiter Classe, welche drei gegebene gerade Linien berührt und einen gegebenen Punct zum Brennpuncte hat, enthalten.

Wir können erstens die Curve construiren, indem wir die Directrix derselben bestimmen. Wenn wir zuerst irgend zwei der drei gegebenen geraden Linien betrachten, so gehen die Directricen aller Curven, welche dieselben berühren und den gegebenen Punct zum Brennpuncte haben, durch einen Punct derjenigen geraden Linie, welche im gegebenen Puncte auf der, diesen Punct mit dem Durchschnittspuncte der gegebenen

Tangenten verbindenden, geraden Linie senkrecht steht. Um diesen gemeinschaftlichen Durchschnittspunct aller Directricen, der also auch ein Punct der gesuchten Directrix ist, zu bestimmen, brauchen wir bloss die Directrix irgend einer der in Rede stehenden Curven zu construiren und hierzu kommen wir leicht, wenn wir für diese Curve die hierher gehörige Parabel nehmen. Auf diesem Wege ergibt sich, da wir die drei gegebenen geraden Linien auf dreifache Art zu zwei zusammstellen können, der folgende Satz:

Wenn man von irgend einem gegebenen Puncte F aus nach den drei Winkelpuncten eines gegebenen Dreiecks drei gerade Linien FA, FA' und FA" zieht und auf diesen drei geraden Linien im Puncte F drei Perpendikel FG, FG' und FG" errichtet; ferner von demselben Puncte F aus drei Perpendikel auf die drei Dreiecks-Seiten AA, AA' und AA' fällt und dieselben über ihren Durchschnitt mit diesen Seiten hinaus noch um denselben respective gleiche Stücke verlängert und dadurch auf diesen Perpendikel drei Puncte P", P' und P bestimmt, so liegen die Durchschnitte von FG und P'P, von FG' und P"P und von FG" und PP', alle drei, in gerader Linie und diese gerade Linie ist die Directrix derjenigen Curve zweiter Classe, welche den gegebenen Punct zum Brennpuncte hat und dem gegebenen Dreieck eingeschrieben ist.

574. Wir können zweitens den Mittelpunct der gesuchten Curve bestimmen. Wir erhalten nach der 571. Nummer drei durch diesen Punct gehende gerade Linien, nemlich diejenigen, welche, bei der obigen Bezeichnung, durch die Mitten von FA, FA' und FA" gehen und senkreckt auf P"P', P"P und P'P sind.

Der gesuchte Mittelpunct ist, nach einem bekannten Satze, zugleich der Mittelpunct desjenigen Kreises, der durch die Fusspuncte der von F auf die drei gegebenen geraden Linien gefällten Perpendikel geht. (338, 2. Note)

575. Wir können endlich drittens auch den zweiten Brennpunct der zu construirenden Curve suchen. Hier kommen wir nach der 572. Nummer zu folgendem Satze:

Wenn irgend ein Punct F und irgend ein Dreieck AAA' gegeben sind und man fällt von F auf die drei Dreiecks-Seiten AA, AA' und AA' drei Perpendikel FQ", FQ' und FQ, so bestimmen die Fusspuncte dieser drei Perpendikel ein neues Dreieck Q"Q'Q. Fällt man alsdann von den Winkelpuncten des gegebenen Dreiecks, A, A und A', drei Perpendikel auf die gegenüberliegenden Seiten des zweiten Dreiecks, auf Q"Q', Q"Q und Q'Q, so schneiden sich dieselben in demselben Puncte; und dieser Punct ist der andere Brennpunct derjenigen Curve zweiter Classe, welche den gegebenen Punct zu einem Brennpuncte hat und dem Dreiecke eingeschrieben ist.

In diesem dritten Falle können wir auch construiren, wie in der 337. Nummer. —

576. Wir wollen zur Untersuchung der Durchschnittspuncte irgend zweier gegebener Curven zweiter Classe, die denselben Brennpunct haben, übergehen.

Es seien:

$$(v-v')^2+2(u-u')(v-v')\cos\vartheta+(u-u')^2 = k'^2,$$
$$(v-v'')^2+2(u-u'')(v-v'')\cos\vartheta+(u-u'')^2 = k''^2,$$

die Gleichungen der beiden gegebenen Curven, bezogen auf irgend zwei Axen, die in dem gemeinschaftlichen Brennpuncte sich schneiden und irgend einen Winkel ϑ mit einander bilden. Die Directricen dieser beiden Curven sind (562):

$$(v', u'), \qquad (v'', u''),$$

und hiernach erhalten wir für die Gleichungen derjenigen Puncte, in welchen diese Directricen der ersten Axe begegnen:

$$v = v', \qquad v = v'',$$

und die beiden Tangenten-Paare, die von diesen beiden Puncten an die bezüglichen Curven gelegt werden können, sind folgende:

$$\begin{array}{ll} (v', u'+k'), & (v', u'-k'); \\ (v'', u''+k''), & (v'', u''-k''). \end{array} \qquad (2)$$

Für die Gleichung des Durchschnittspunctes der ersten und dritten dieser vier Tangenten ergibt sich sogleich folgende:

$$v-v'' = \frac{v''-v'}{u''-u'-(k''-k')}(u-u''-k''),$$

und für die Gleichung des Durchschnittspunctes der beiden Directricen:

$$v-v'' = \frac{v''-v'}{u''-v'}(u-u'').$$

Wenn wir endlich eine gerade Linie durch diese beiden Durchschnittspuncte legen, so erhalten wir für diese gerade Linie aus der Zusammenstellung der letzten beiden Gleichungen folgende Coordinaten-Werthe:

$$v = \frac{k''v'-k'v''}{k''-k'}, \qquad u = \frac{k''u'-k'u''}{k''-k'}. \qquad (3)$$

Diese Ausdrücke bleiben unverändert dieselben, wenn wir die Zeichen von k'' und k' beide zugleich ändern. Die bezügliche gerade Linie geht also auch durch den Durchschnitt der zweiten und vierten der vier Tangenten (2).

Auf ähnliche Weise finden wir, dass die Durchschnittspuncte der ersten und vierten und der zweiten und dritten der vier Tangenten (2) und der beiden Directricen in gerader Linie liegen, und für diese gerade Linie erhalten wir durch Zeichen-Vertauschung aus den Ausdrücken (3) folgende Coordinaten-Werthe:

$$v = \frac{k''v'+k'v''}{k''+k'}, \qquad u = \frac{k''u'+k'u''}{k''+k'}. \qquad (4)$$

Da die Ausdrücke (3) und (4) in Beziehung auf v, v', v'' und u, u', u'' symmetrisch gebildet sind, so erhalten wir nothwendig dieselben Ausdrücke, wenn wir, statt von den Durchschnitten der ersten Axe mit den beiden Directricen, von den Durchschnitten der zweiten Axe mit den beiden Directricen aus, Tangenten an die bezüglichen Curven legen. Da überdiess die zweite Axe jede beliebige, durch den Brennpunct gehende, gerade Linie sein kann, so erhalten wir, indem wir zusammenfassen, den nachstehenden Satz:

Wenn man durch den gemeinschaftlichen Brennpunct irgend zweier gegebener Curven zweiter Classe eine beliebige gerade Linie zieht und von jedem derjenigen beiden Puncte, in welchen dieselbe den Directricen der beiden Curven begegnet, zwei Tangenten an die bezügliche Curve legt, so bilden diese Tangenten eine vollständige vierseitige Figur, deren zwei Diagonalen durch den Durchschnitt der beiden Directricen gehen. Es bleiben diese Diagonalen unverändert dieselben, wie man auch die Richtung der beliebigen, durch den Brennpunct gehenden, geraden Linien ändern mag; während alsdann zwei Winkelpuncte der vierseitigen Figur auf den beiden Directricen fortrücken, verändern die beiden übrigen Paare von Winkelpuncten ihre Lage auf zwei festen, durch den Durchschnittspunct derselben gehenden, geraden Linien.

Wenn die beiden gegebenen Curven zweiter Classe sich in zwei reellen Puncten schneiden und man wählt die beliebige, durch ihren gemeinschaftlichen Brennpunct gehende, gerade Linie so, dass sie auf der, diesen Punct mit einem der Durchschnittspuncte verbindenden geraden Linie senkrecht steht, so geht, nach einem bekannten Satze, die Tangente jeder Curve in jenem Durchschnittspuncte durch denjenigen Punct, in welchem die durch den gemeinschaftlichen Brennpunct gehende gerade Linie der bezüglichen Directrix begegnet (566). Hieraus folgt, dass jener Durchschnittspunct der beiden gegebenen Curven ein Punct einer der beiden festen, im vorstehenden Satze bezeichneten geraden Linien ist. Diese beiden festen geraden Linien sind, indem wir die Sache gleich allgemein nehmen, die beiden gemeinschaftlichen (reellen oder imaginären) Chorden der beiden gegebenen Curven; die beiden Directricen dieser Curven schneiden sich in ihrem Chordal-Puncte.

(Dasselbe Resultat können wir direct aus einem im ersten Bande der „Entwicklungen" bewiesenen Satze (387) herleiten, indem wir den Brennpunct als den Durchschnittspunct zweier (imaginärer) gemeinschaftlicher Tangenten der beiden gegebenen Curven betrachten).

Man überzeugt sich sogleich, dass die beiden Directricen und die beiden eben bezeichneten gemeinschaftlichen Chorden der beiden gegebenen Curven Harmonicalen sind, wenn man etwa die Durchschnitte dieser vier Linien mit der ersten Axe betrachtet.

Wenn die erste der beiden Gleichungen (1) insbesondere einen Kreis darstellt, so reduciren sich die Ausdrücke (3) und (4), indem wir $v' = o$ und $u' = o$ setzen, auf folgende:

$$v = \frac{k'v''}{k' \mp k''}, \qquad u = \frac{k'u''}{k'' \mp k'}.$$

Wenn die erste der beiden Gleichungen (1) insbesondere eine gerade Linie (ein System zweier imaginärer Puncte) darstellt, so ist $k = o$ und es ergibt sich sowol aus (3) als aus (4):

$$v = v', \qquad u = u'.$$

Es fallen also für diesen Fall die beiden in Rede stehenden geraden Linien in die gegebene zusammen.

577. Wir wollen diesen Paragraphen mit einigen Constructionen beschliessen, die unmittelbar sich uns darbieten und mit den in der vorigen Nummer erhaltenen Resultaten in Verbindung stehen.

Eine Parabel zu beschreiben, welche durch zwei gegebene Puncte geht und einen dritten gegebenen Punct zum Brennpuncte hat.

Die Bestimmung der Directrix der zu construirenden Parabel kommt nach einem allbekannten Satze (564) darauf hinaus, eine solche gerade Linie zu finden, welche von den beiden ersten gegebenen Puncten eben so weit absteht, als diese Puncte von dem dritten gegebenen Puncte abstehen. Beschreibt man zu diesem Ende aus den beiden erstgenannten Puncten, als Mittelpuncten, zwei durch den gegebenen Brennpunct gehende Kreise, so ist jede gemeinschaftliche Tangente dieser beiden Kreise die Directrix einer Parabel, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leistet. Solcher reellen gemeinschaftlichen Tangenten gibt es immer zwei und nur zwei, und also gibt es auch zwei Parabeln, welche durch zwei gegebene Puncte gehen und einen dritten gegebenen Punct zum Brennpuncte haben.

578. *Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die durch drei gegebene Puncte geht und einen vierten gegebenen Punct zu einem ihrer Brennpuncte hat.*

Es folgt aus der 576. Nummer, dass die Directricen aller derjenigen Curven, welche durch zwei gegebene Puncte gehen und überdiess einen gegebenen Punct zum gemeinschaftlichen Brennpuncte haben, sich in ein und demselben festen Puncte oder in irgend einem von mehreren festen Puncten schneiden. Man sieht leicht ein, dass der letztere Fall Statt findet und dass es zwei solcher festen Puncte gibt. In dem einen derselben schneiden sich die Directricen unendlich vieler Ellipsen, zweier Parabeln, deren Construction wir in der vorigen Nummer angezeigt haben, und unendlich viele solcher Hyperbeln, auf deren ein und demselben Zweige die beiden ersten gegebenen Puncte liegen. In dem andern festen Puncte schneiden sich die Directricen aller solcher Hyperbeln, deren ein Zweig durch den einen und deren anderer Zweig durch den andern der beiden gegebenen Puncte geht. Dieser zweite feste Punct ergibt sich durch eine ganz ähnliche Construction als der erste. Während dieser nemlich der Durchschnittspunct der beiden äussern gemeinschaftlichen Tangenten derjenigen beiden Kreise ist, welche durch den gegebenen Brennpunct gehen, und die beiden ersten gegebenen Puncte zu ihren Mittelpuncten haben, ist jener zweite feste Punct der (reelle) Durchschnitt der beiden (imaginären) innern gemeinschaftlichen Tangenten derselben beiden Kreise. Die beiden gegebenen und diese beiden so bestimmten festen Puncte sind vier harmonische Theilungspuncte und werden von dem gegebenen Brennpuncte aus unter rechtem Winkel gesehen. (192)

Das Vorstehende ist in Uebereinstimmung mit der 367. Nummer, nach welcher in allen Curven zweiter Ordnung oder, was dasselbe heisst, (552) zweiter Classe, welche durch zwei gegebene Puncte gehen und zwei gegebene gerade Linien berühren, die Berührungs-Chorden durch einen von solchen zwei festen Puncten gehen, die mit den beiden gegebenen in gerader Linie liegen. An die Stelle derjenigen Curven, welche zwei gegebene gerade Linien berühren, treten Curven mit demselben Brennpuncte und die Polaren dieser Brennpuncte (die Directricen) an die Stelle der Berührungs-Chorden.

Hiernach ergibt sich folgende Construction der an die Spitze dieser Nummer gestellten Aufgabe:

„Man beschreibe aus den drei ersten gegebenen Puncten, als Mittelpuncten, drei „Kreise, welche durch den vierten gegebenen Punct gehen, und construire die vier Sym„metralen (162) *) dieser drei Kreise. Diese vier Symmetralen sind die Directricen derje„nigen vier Curven zweiter Classe, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten."

Die äussere Symmetrale entspricht einer Ellipse oder Parabel oder einer solchen Hyperbel, deren ein und derselbe Zweig die drei ersten gegebenen Puncte enthält. Die drei innern Symmetralen entsprechen solchen Hyperbeln, deren ein Zweig durch zwei, und deren anderer Zweig durch den dritten jener drei gegebenen Puncte geht.

Wenn wir annehmen, dass zwei der drei gegebenen Puncte, durch welche die zu construirende Curve gehen soll, zusammenfallen, und also eine Tangente, auf derselben der Berührungspunct und ausserdem noch ein Punct gegeben sind, so reducirt sich die Zahl der Auflösungen auf zwei. Indem wir den gegebenen Berührungspunct mit dem andern gegebenen Puncte zusammenstellen, erhalten wir, wie eben, zwei feste Puncte,

*) *axes de similitude.*

durch welche die Directricen der verlangten Curven gehen. Ausserdem gehen die Directricen aller Curven zweiter Classe, welche denselben Brennpunct haben und eine gegebene gerade Linie in demselben Puncte berühren, durch ein und denselben Punct der gegebenen geraden Linie und zwar durch einen solchen Punct, der zugleich auf dem, im gegebenen Brennpuncte auf der diesen Punct mit dem Berührungspuncte verbindenden geraden Linie errichteten, Perpendikel liegt (566). Hiernach erhalten wir die beiden Directricen derjenigen beiden Curven, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten.

579. *Eine Hyperbel zu beschreiben, die durch zwei gegebene Puncte geht, einen dritten gegebenen Punct zum Brennpuncte hat und deren eine Asymptote einer gegebenen geraden Linie parallel ist.*

Nach der 169. Nummer modificirt sich für diesen Fall die Construction der vorigen Nummer auf folgende Weisse:

„Man construire aus den beiden ersten gegebenen Puncten, als Mittelpuncten, zwei „Kreise, welche durch den dritten gegebenen Punct gehen, ziehe in diesen beiden Krei- „sen diejenigen beiden Durchmesser, welche der gegebenen geraden Linie parallel sind „und verbinde die Endpuncte dieser beiden parallelen Durchmesser durch vier gerade Li- „nien. Diese geraden Linien sind alsdann die Directricen derjenigen vier Hyperbeln, „welche den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten.“

Die beiden ersten gegebenen Puncte liegen auf demselben Zweige zweier dieser vier Hyperbeln, und auf den beiden Zweigen jeder der beiden übrigen Hyperbeln.

Eine Hyperbel zu beschreiben, deren Asymptoten zweien gegebenen geraden Linien parallel sind, die durch einen gegebenen Punct geht und einen zweiten gegebenen Punct zum Brennpuncte hat.

Hier erhalten wir, mit Berücksichtigung der eben angezogenen Nummer, sogleich folgende Construction:

„Man beschreibe aus dem ersten gegebenen Puncte, als Mittelpuncte, einen Kreis, „der durch den zweiten gegebenen Punct geht, ziehe in diesem Kreise zwei den gegebe- „nen geraden Linien parallele Durchmesser und verbinde die Endpuncte derselben durch „vier gerade Linien. Auf diese Weise erhält man ein dem Kreise eingeschriebenes Pa- „rallelogramm, dessen Seiten die Directricen der vier verlangten Hyperbel sind.“

Eine Hyperbel zu beschreiben, die durch einen gegebenen Punct geht, einen zweiten gegebenen Punct zu einem ihrer Brennpuncte und eine gegebene gerade Linie zu einer ihrer Asymptoten hat.

„Man beschreibe aus dem ersten gegebenen Puncte, als Mittelpuncte, einen Kreis, „der durch den zweiten gegebenen Punct geht, ziehe in diesem Kreise den der gegebe- „nen Asymptote parallellen Durchmesser und verbinde die Endpuncte dieses Durchmes- „sers mit dem Fusspuncte des auf diese Asymptote vom gegebenen Brennpuncte aus ge- „fällten Perpendikels durch zwei gerade Linien (566). Diese gerade Linien sind die Directri- „cen der verlangten Hyperbeln, deren es zwei gibt“.

Wenn statt des ersten gegebenen Punctes die zweite Asymptote der Richtung nach gegeben ist, so erhält man leicht diese Asymptote selbst, (nach der Bemerkung, dass der Brennpunct von beiden Asymptoten gleichweit absteht) und zwar zweifach. Die jedesmalig entsprechende Directrix erhält man, indem man die Fusspuncte der auf die beiden Asymptoten gefällten Perpendikel durch eine gerade Linie verbindet (566).

Wir brechen hier ab, weil wir den Gegenstand dieses Paragraphen auch noch in der zweiten Abtheilung des vorliegenden zweiten Bandes berühren werden. —

§. 7.

Theorie der Osculation. Osculation hyperbolischer und parabolischer Zweige in unendlicher Entfernung.

580. Wenn die allgemeine Gleichung des zweiten Grades:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

eine solche Curve darstellen soll, welche von der ersten Axe berührt wird, so müssen wir

$$F = 0$$

setzen. Wenn wir ferner den Berührungspunct auf dieser Axe zum Anfangspuncte nehmen, so kommt überdiess:

$$E = 0.$$

Für die Gleichungen irgend zweier gegebener Curven, welche die erste Axe im Anfangspuncte berühren, können wir hiernach folgende nehmen:

$$\begin{aligned} A\,w^2+2B\,vw+C\,v^2+2D\,uw &= 0, \\ A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw &= 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Wenn wir diese beiden Gleichungen zu irgend einer neuen Gleichung des zweiten Grades verbinden, so stellt diese neue Gleichung einen solchen geometrischen Ort zweiter Classe dar, der mit den beiden gegebenen Curven (1) dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten hat. Ziehen wir insbesondere die Gleichungen (1) von einander ab, nachdem wir die erste derselben mit C', die zweite mit C multiplicirt haben, so kommt:

$$w[(AC'-A'C)w+2(BC'-B'C)v+2(DC'-D'C)u] = 0.$$

Diese Gleichung stellt zwei Puncte dar, und diese Puncte sind also nothwendig solche, in welchen die vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven (1), zu zwei und zwei genommen, sich schneiden. Der eine dieser beiden Puncte ist der Anfangspunct, in welchem die beiden Curven sich berühren, und der als der Durchschnittspunct zweier in der ersten Axe zusammenfallender gemeinschaftlicher Tangenten anzusehen ist. Der andere Punct, für dessen Gleichung wir folgende erhalten:

$$(AC'-A'C)w+2(BC'-B'C)v+2(DC'-D'C)u = 0, \qquad (2)$$

ist also der Durchschnitt der beiden, einzig noch übrigen, gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Curven.

Die Discussion der Gleichung (2) führt zu einfachen und symmetrischen Resultaten. Wenn wir erstens annehmen, es sei:

$$DC' = D'C,$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf folgende:

$$(AC'-A'C)w+2(BC'-B'C)v = 0, \qquad (3)$$

und stellt also einen solchen Punct dar, der auf der ersten Axe in einer Entfernung vom Anfangspuncte liegt, die gleich ist:

$$2\frac{BC'-B'C}{AC'-A'C}.$$

Von den vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Curven fallen also drei in der ersten Axe zusammen und die vierte erhält man, indem man durch den Punct (3)

eine Tangente an eine beliebige dieser Curven legt. In dem vorliegenden Falle haben die beiden gegebenen Curven drei auf einander folgende Elemente mit einander gemein; es findet zwischen denselben eine dreipunctige (dreitangentige) Osculation Statt. *)

Wenn wir zweitens voraussetzen, es sei:

$$BC' = B'C,$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf folgende:

$$(AC'-A'C)w+2(DC'-D'C)u = o, \qquad (4)$$

und stellt also einen solchen Punct dar, der auf der zweiten Axe liegt, und zwar in einer Entfernung vom Anfangspuncte, die gleich ist:

$$2.\frac{DC'-D'C}{AC'-A'C}.$$

Wenn wir drittens voraussetzen, es sei:

$$AC' = A'C,$$

so verwandelt sich die Gleichung (2) in folgende:

$$(BC'-B'C)v+(DC'-D'C)u = o,$$

und stellt also einen Punct dar, der nach einer leicht zu bestimmenden Richtung hin, unendlich weit liegt. Die beiden gegebenen, sich berührenden Curven haben also zwei parallele, gemeinschaftliche Tangenten.

Hierhin gehört als besonderer Fall, dass

$$A = A' = o,$$

und also die beiden gegebenen Curven Parabeln sind; die eine gemeinschaftliche Tangente liegt alsdann unendlich weit, und ist als mit jeder gegebenen geraden Linie parallel anzusehen.

Wenn viertens die beiden Gleichungen:

$$DC' = D'C, \qquad BC' = B'C,$$

zugleich bestehen, so reducirt sich die Gleichung (2) auf:

$$w = o,$$

auf die Gleichung des Anfangspunctes. Der Durchschnittspunct der Tangente im Osculationspuncte des ersten Falles mit der vierten gemeinschaftlichen Tangente fällt alsdann mit dem Osculationspuncte, die vierte gemeinschaftliche Tangente mit den drei ersten, zusammen, oder, wenn wir vom zweiten Falle ausgehen, der Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten auf der zweiten Axe fällt mit dem Berührungspuncte, diese Tangenten fallen mit der Tangente im Berührungspunte zusammen und die Richtung der zweiten Axe kann wieder jede beliebige sein: die beiden gegebenen Curven haben einen vierpunctigen (viertangentigen) Contact.

Wenn fünftens die beiden Gleichungen:

$$DC' = D'C, \qquad AC' = A'C,$$

---

*) Auf gewisse Weise wird die Theorie der Osculation hier noch anschaulicher als da, wo man dieselbe aus dem Zusammenfallen von Durchschnittspuncten herleitet. Denkt man sich nemlich eine Curve als die Gränze eines Polygones mit immer zunehmender Seitenzahl, so entsprechen die Tangenten der Curve verlängerten Seiten des Polygons. Der Berührung zweier Curven entspricht ein Zusammenfallen zweier auf einander folgender Seiten der beiden bezüglichen Polygone, der einfachen Osculation ein Zusammenfallen dreier consecutiver Seiten des einen Polygons mit dreien consecutiven Seiten des andern und so fort.

zugleich befriedigt werden, so verwandelt sich die Gleichung (2) in folgende:

$$v = o;$$

die beiden gemeinschaftlichen Tangenten sind also der ersten Axe parallel, und mithin osculiren die beiden gegebenen Curven sich im Anfangspuncte und berühren dieselbe, der Tangente in diesem Puncte parallele, gerade Linie.

Wenn insbesondere

$$A = A' = o,$$

so sind die beiden Curven beliebige Parabeln, die sich im Anfangspuncte osculiren.

Wenn sechstens die beiden Gleichungen:

$$BC' = B'C, \qquad AC' = A'C,$$

zugleich Statt finden, so verwandelt sich die Gleichung (2) in folgende:

$$u = o,$$

die beiden gemeinschaftlichen Tangenten sind also unter sich und mit der zweiten Axe parallel.

Wenn insbesondere

$$A = A' = o,$$

so sind die gegebenen Curven Parabeln, welche die erste Axe im Anfangspuncte berühren und eine gemeinschaftliche Tangente haben, die der zweiten Axe parallel ist.

581. Wir können die vorstehenden Bestimmungen dadurch noch vereinfachen, dass wir

$$C = C' = 1$$

setzen. Wenn wir demgemäss die Gleichung:

$$v^2 + Aw^2 + 2Bvw + 2Duw = o, \qquad (6)$$

zu Grunde legen, so erhalten wir folgende Zusammenstellung verschiedener Fälle:

$D = const.$	Alle Curven osculiren einander dreipunctig auf der ersten Axe im Anfangspuncte; die Richtung der zweiten Axe bleibt unbestimmt.
$B = const.$	Alle Curven berühren sich auf der ersten Axe im Anfangspuncte und die beiden gemeinschaftlichen Tangenten, je zweier derselben, schneiden sich auf der zweiten Axe.
$A = const.$	Alle Curven berühren sich auf der ersten Axe im Anfangspuncte und die gemeinschaftlichen Tangenten je zweier derselben sind parallel. Die zweite Axe hat eine beliebige Richtung.
$D = const.$ $B = const.$	Alle Curven osculiren sich vierpunctig auf der ersten Axe im Anfangspuncte. Die Richtung der zweiten Axe ist beliebig.
$D = const$ $A = const.$	Alle Curven osculiren einander dreipunctig auf der ersten Axe im Anfangspuncte und berühren dieselbe, dieser Axe parallele gerade Linie. Die Richtung der zweiten Axe ist beliebig.
$B = const.$ $A = const.$	Alle Curven berühren sich auf der ersten Axe im Anfangspuncte, und jede derselben berührt überdiess zwei gegebene, der zweiten Axe parallele, gerade Linien.

582. Wenn

$$A = o,$$

so ist die resultirende Gleichung:

$$v^2 + 2Bvw + 2Duw = o,$$

die allgemeine Gleichung aller Parabeln, welche die erste Axe im Anfangspuncte berühren. Es ergeben sich hier folgende besondere Fälle:

$D = const.$ { Alle Parabeln osculiren sich dreipunctig auf der ersten Axe im Anfangspuncte. Die zweite Axe hat eine beliebige Richtung.

$B = const.$ { Alle Parabeln berühren einander auf der ersten Axe im Anfangspuncte und überdiess eine gegebene gerade Linie, die der zweiten Axe parallel ist. Wenn insbesondere $B = 0$, so liegt diese gerade Linie unendlich weit, und die zweite Axe ist ein gemeinschaftlicher Durchmesser aller Parabeln.

583. Wenn wir in der allgemeinen Gleichung der Curven zweiter Classe:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

zu gleicher Zeit:

$$F = 0, \qquad D = 0,$$

nehmen, so erhalten wir die allgemeine Gleichung solcher Curven dieser Classe, welche die erste Coordinaten-Axe berühren, und deren Mittelpunct zugleich auf dieser Axe liegt. Hieraus ist klar, dass alle diese Curven Hyperbeln sind, die eine gemeinschaftliche Asymptote haben, und dass diese Asymptote in die erste Axe fällt.

Hiernach stellen also folgende beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} A\,w^2+2B\,vw+C\,v^2+2E\,uv &= 0, \\ A'w^2+2B'vw+C'v^2+2E'uv &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

zwei Hyperbeln dar, welche beide die erste Axe zu einer ihrer Asymptoten haben. Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, nachdem wir zuvor die erste mit A', die zweite mit A multiplicirt haben, so kommt:

$$v[2(A'B-AB')w+(A'C-AC')v+2(A'E-AE')u] = 0.$$

Der Factor v des ersten Theiles dieser Gleichung bezieht sich auf die beiden in der ersten Axe zusammenfallenden gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Curven, als deren Durchschnittspunct man den, nach der Richtung der ersten Axe hin, unendlich weit liegenden Berührungspunct anzusehen hat. Die Gleichung:

$$2(A'B-AB')w+(A'C-AC')v+2(A'E-AE')u = 0, \qquad (2)$$

stellt also den Durchschnittspunct der beiden übrigen gemeinschaftlichen Tangenten dar.

Wenn **erstens**:

$$A'E = AE',$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf folgende:

$$2(A'B-AB')w+(A'C-AC')v = 0,$$

und stellt mithin einen Punct der ersten Axe dar. Wenn wir die beiden durch diesen Punct gehenden gemeinschaftlichen Tangenten, die immer reell sind, construiren, so fällt die eine derselben in die erste Axe und mithin fallen drei gemeinschaftliche Tangenten der beiden durch die Gleichungen (1) gegebenen Hyperbeln in ihre gemeinschaftliche Asymptote zusammen: **die Hyperbeln osculiren sich dreipunctig auf der ersten Axe in unendlicher Entfernung.**

Wenn **zweitens**:

$$A'C = AC',$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf folgende:

$$(A'B-AB')w+(A'E-AE')u = 0,$$

und folglich geht die zweite Axe durch den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten.

Wenn **drittens**:

$$A'B = AB',$$

und also die beiden Hyperbeln denselben Mittelpunct haben, so reducirt sich die Gleichung (2) auf folgende:

$$(A'C-AC')v+2(A'E-AE')u = o;$$

die beiden gemeinschaftlichen Tangenten sind also parallel.

Wenn viertens zugleich:

$$A'E = AE', \qquad A'C = AC',$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf:

$$w = o.$$

Die beiden gegebenen Hyperbeln haben einen dreipunctigen Contact in unendlicher Entfernung auf der ersten Axe und ihre gemeinschaftliche Tangente geht durch den Anfangspunct.

Wenn fünftens zugleich:

$$A'E = AE', \qquad A'B = AB',$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf:

$$v = o.$$

Alle vier gemeinschaftliche Tangenten fallen also in die gemeinschaftliche Asymptote zusammen, es haben die beiden Hyperbeln auf dieser Asymptote (der ersten Axe) in unendlicher Entfernung einen vierpunctigen Contact. Solche Hyperbeln haben denselben Mittelpunct.

Wenn sechstens zugleich:

$$A'C = AC', \qquad A'B = AB',$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf:

$$u = o.$$

Die erste Axe ist in diesem Falle eine gemeinschaftliche Asymptote der beiden Hyperbeln, es haben dieselben überdiess zwei parallele gemeinschaftliche Tangenten, und mit diesen Tangenten ist die zweite Axe parallel.

584. Wenn wir zusammenfassen und, indem wir $A = 1$ setzen, von der Gleichung:

$$w^2+2Bvw+Cv^2+2Euv = o,$$

als von der allgemeinen Gleichung solcher Hyperbeln, welche die erste Coordinaten-Axe zur gemeinschaftlichen Asymptote haben, ausgehen, so erhalten wir folgendes Schema:

$E = const.$	Alle Hyperbeln osculiren sich dreipunctig auf der ersten Axe in unendlicher Entfernung; die zweite Axe ist beliebig.
$C = const.$	Die beiden gemeinschaftlichen Tangenten schneiden sich auf der zweiten Axe.
$B = const.$	Alle Hyperbeln haben denselben Mittelpunct; die zweite Axe ist beliebig.
$E = const.$, $C = const.$	Alle Hyperbeln osculiren sich dreipunctig auf der ersten Axe in unendlicher Entfernung, und berühren dieselbe durch den Anfangspunct gehende gerade Linie; die Richtung der zweiten Axe ist beliebig.
$E = const.$, $B = const.$	Alle Hyperbeln osculiren sich vierpunctig auf der ersten Axe in unendlicher Entfernung; die zweite Axe ist beliebig.
$C = const.$, $B = const.$	Alle Hyperbeln berühren dieselben beiden, unter einander und mit der zweiten Axe parallelen geraden Linie. —

585. Die Discussionen in den vorstehenden Nummern dieses Paragraphen werden dadurch bedingt, dass wir zwei Coefficienten in der allgemeinen Gleichung gleich Null

setzen und zwar einmal F und E, das andere Mal F und D. Wir erhalten ganz ähnliche Discussionen, wenn wir C und E, oder C und B beide gleich Null nehmen, und die geometrische Deutung bleibt dieselbe als in dem Vorhergehenden, mit dem einzigen Unterschiede, dass die beiden Axen sich mit einander vertauschen.

Man sieht sogleich, dass man auch noch zu analogen Discussionen kommt, wenn man einmal A und B, das andere Mal A und D gleich Null setzt. Diese beiden Fälle unterscheiden sich offenbar wiederum nur dadurch, dass die eine Coordinaten-Axe an die Stelle der andern tritt. Wir wollen in dem Folgenden einen dieser beiden Fälle näher betrachten.

Es sind (464):

$$\begin{aligned} 2B\,vw + C\,v^2 + 2E\,uv + F\,u^2 &= 0, \\ 2B'vw + C'v^2 + 2E'uv + F'u^2 &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

die Gleichungen irgend zweier Parabeln, deren Durchmesser der ersten Axe parallel sind. Ziehen wir diese beiden Gleichungen von einander ab, nachdem wir zuvor die erste mit F', die zweite mit F multiplicirt haben, so kommt:

$$v[2(BF'-B'F)w + (CF'-C'F)v + 2(EF'-E'F)u] = 0.$$

Der Factor v des ersten Theiles dieser Gleichung bezieht sich auf zwei, der ersten Axe parallele, gemeinschaftliche Tangenten der beiden Parabeln (1), die folglich als unendlich weit liegend und als zusammenfallend zu betrachten sind. Man kann also sagen, dass die beiden Parabeln in unendlicher Entfernung sich berühren. Solche Parabeln haben ausserdem nur noch zwei gemeinschaftliche Tangenten. In dem vorliegenden Falle schneiden sich dieselben in dem Puncte:

$$2(BF'-B'F)w + (CF'-C'F)v + 2(EF'-E'F)u = 0. \qquad (2)$$

Wenn:

$$EF' = E'F,$$

so geht die erste Axe durch den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten. Wenn:

$$CF' = C'F,$$

so liegt dieser Punct auf der zweiten Axe. Wenn endlich zugleich:

$$EF' = E'F, \qquad CF' = w'F,$$

so ist der Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten Anfangspunct der Coordinaten.

Wenn:

$$BF' = B'F,$$

so reducirt sich die Gleichung (2) auf folgende:

$$(CF'-C'F)v + 2(EF'-E'F)u = 0,$$

und stellt folglich einen, nach einer gegebenen Richtung hin, unendlich weit entfernt liegenden Punct dar. Es liegt also auch eine der in Rede stehenden gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Parabeln (1) unendlich weit, und ist mithin als mit den beiden ersten, unendlich weit liegenden, gemeinschaftlichen Tangenten zusammenfallend anzusehen. Man kann also sagen, dass die beiden Parabeln in unendlicher Entfernung sich dreipunctig osculiren.

Wenn zugleich:

$$BF' = B'F, \qquad EF' = E'F,$$

so liegt der Punct (2) nach der Richtung der ersten Axe hin unendlich weit. Es liegen also auch alle vier gemeinschaftlichen Tangenten unendlich weit und sind mithin als zu-

sammenfallend zu betrachten. Die beiden Parabeln (1) haben in diesem Falle einen vierpunctigen Contact in unendlicher Entfernung.

Wenn zugleich:

$$BF' = B'F, \qquad CF' = C'F,$$

so haben die beiden in Rede stehenden Parabeln in unendlicher Entfernung einen dreipunctigen Contact und die zweite Axe ist ihrer gemeinschaftlichen Tangente parallel.

586. Wenn wir die verschiedenen in der vorigen Nummer discutirten Fälle zusammenfassen, so erhalten wir, indem wir, der Kürze halber, F = 1 setzen und demnach von der Gleichung:

$$u^2+2Bvw+Cv^2+2Euv = 0,$$

als von der allgemeinen Gleichung solcher Parabeln, deren Durchmesser der ersten Axe parallel sind, ausgehen, zu folgendem Schema:

$E = const.$	Die erste Axe geht durch den Durchschnitt der beiden gemeinschaftlichen Tangenten je zweier Parabeln; die zweite Axe ist durchaus beliebig.
$C = const.$	Die zweite Axe, deren Richtung jede beliebige sein kann, geht durch den Durchschnittspunct der gemeinschaftlichen Tangenten je zweier Parabeln.
$B = const.$	Alle Parabeln osculiren sich dreipunctig in unendlicher Entfernung. Der Anfangspunct und die Richtung der zweiten Axe sind beliebig.
$E = const.$ $C = const.$	Alle Parabeln berühren dieselben beiden geraden Linien, die im Anfangspuncte der Coordinaten sich schneiden; die Richtung der zweiten Axe ist beliebig.
$E = const.$ $B = const.$	Alle Parabeln osculiren sich vierpunctig in unendlicher Entfernung; die zweite Axe und der Anfangspunct sind beliebig.
$C = const.$ $B = const.$	Alle Parabeln osculiren sich dreipunctig in unendlicher Entfernung, und berühren dieselbe der zweiten Axe parallele gerade Linie.

587. Das System irgend zweier Puncte, die auf der ersten Axe liegen, können wir durch folgende Gleichung darstellen:

$$v^2+(x+x')vw+xx'w^2 = 0. \qquad (1)$$

Wenn wir diese Gleichung von der allgemeinen Gleichung solcher Curven, welche die erste Axe im Anfangspuncte berühren:

$$v^2+2Bvw+Aw^2+2Duw = 0, \qquad (2)$$

abziehen, und im Resultate den gemeinschaftlichen Factor w fortlassen, so ergibt sich:

$$(A-xx')w+(2B-(x+x))v+2Du = 0. \qquad (3)$$

Diese Gleichung stellt den Durchschnittspunct derjenigen beiden durch die Puncte (1) gehenden Tangenten der Curve (2) dar, welche nicht in die erste Axe fallen.

Die Richtung der geraden Linie, welche den Punct (3) mit dem Anfangspuncte verbindet, ist durch folgende Gleichung bestimmt:

$$-\frac{v}{u} = \frac{2D}{2B-(x+x')}.$$

Dieser Ausdruck ist unabhängig von A und bleibt also unverändert derselbe, wenn wir statt (2) irgend eine andere Curve zweiter Classe betrachten, welche mit derselben im Anfangspuncte einen vierpunctigen Contact hat. Also:

Wenn man von irgend zwei festen Puncten der gemeinschaftlichen Tangente im Osculations-Puncte mehrerer sich vierpunctig osculirender Curven zweiter Classe an jede derselben noch zwei Tangenten zieht, so liegen die Durchschnitte je zweier solcher Tangenten auf einer festen, durch den Osculationspunct gehenden, geraden Linie.

588. Hiernach erhalten wir eine Construction folgender Aufgabe:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt und eine gegebene gerade Linie berührt.

Es sei, indem wir die Figur in Gedanken hinzuthun, TS die gegebene gerade Linie, welche der Tangente des Osculationspunctes O im Puncte T begegne. Man lege durch T an die gegebene Curve die zweite Tangente TS′ und eine beliebige dritte Tangente T′S′, die den beiden ersten Tangenten in T′ und S′ begegne. Man ziehe OS′, die der gegebenen geraden Linie TS in S begegne und endlich T′S. Diese gerade Linie T′S ist alsdann eine neue Tangente der zu construirenden Curve, welche durch den, beliebig auf der Tangente im Osculationspuncte anzunehmenden, Punct T′ geht.

Wenn die beiden Puncte T und T′, und also auch die durch dieselben gehenden zweiten Tangenten, zusammenfallen, (was darauf hinauskommt, $x = x'$ zu setzen), so sind S′ und S Puncte, von welchen der eine auf der gegebenen, der andere auf der zu construirenden Curve liegt, und diese beiden Puncte liegen immer noch mit dem Osculationspuncte O in gerader Linie. Auf diese Weise kommen wir zu der Umkehrung eines Satzes, den wir schon früher erwähnt haben *) und nach welchem wir, wenn ein Punct der zu construirenden Curve gegeben ist, in diesem Puncte die Tangente legen, und wenn eine Tangente gegeben ist, auf dieser Tangente den Berührungspunct bestimmen können.

589. Wir erhalten ferner, wenn wir annehmen, dass die gegebene zu berührende gerade Linie unendlich weit liegt, die Construction folgender Aufgabe:

Eine Parabel zu beschreiben, welche eine gegebene Curve zweiter Classe in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt.

Man lege, parallel mit der Tangente im Osculationspuncte O, eine zweite Tangente an die gegebene Curve, und irgend eine dritte Tangente T′S′, welche der ersten in T′ und der zweiten in S′ begegne; man ziehe OS′ und endlich durch T′ eine gerade Linie parallel mit OS′. Diese letztgezogene gerade Linie ist eine Tangente der gesuchten Parabel. Der Berührungspunct auf dieser Tangente ist derjenige Punct, in welchem derselbe von einer durch O und den Berührungspunct auf der Tangente der gegebenen Curve T′S′ gehenden geraden Linie geschnitten wird.

Man sieht ferner, indem man den Berührungspunct auf der unendlich weit entfernten Tangente der zu construirenden Parabel sucht, dass der durch den Osculationspunct gehende Durchmesser der gegebenen Curve auch ein Durchmesser der Parabel ist.

590. Der Abstand des Punctes (3) von der ersten Axe ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$-\frac{w}{u} = \frac{2D}{A - xx'},$$

welcher von B unabhängig ist und also derselbe bleibt, wenn wir mit der Curve (2) ir-

---

*) *Entwicklungen*, 355.

gend eine andere vertauschen, welche dieselbe im Anfangspuncte dreipunctig osculirt und mit ihr eine gemeinschaftliche Tangente hat, die der Tangente im Osculationspuncte parallel ist. Also:

Wenn mehrere Curven zweiter Classe, welche dieselben beiden Parallelen berühren und sich auf einer derselben dreipunctig osculiren, gegeben sind und man legt von irgend zweien festen Puncten der Tangente im gemeinschaftlichen Osculationspuncte zwei neue Tangenten an jede der Curven: so liegen die Durchschnitte dieser Tangenten-Paare auf einer dritten parallelen.

Wenn man von irgend einem Puncte der Tangente im Osculationspuncte noch eine zweite Tangente an jede Curve zieht, so liegen die Berührungspuncte alle auf derselben geraden Linie, die den beiden parallelen Tangenten parallel ist.

Es lässt sich mit dem ersten dieser beiden Sätze der Satz der 587. Nummer als besonderer Fall in Verbindung bringen, wenn man mit der Tangente im Osculationspuncte die zweite, ihr parallele gemeinschaftliche Tangente zusammenfallen lässt. Diejenige gerade Linie nemlich, welche der geometrische Ort für die Durchschnittspuncte der verschiedenen Tangenten-Paare ist, geht, weil sie mit den beiden parallelen Tangenten parallel ist, durch den (unendlich weit entfernten) Durchschnitt derselben. Fallen aber die beiden parallelen Tangenten zusammen, so ist der Osculationspunct als ihr Durchschnittspunct anzusehen.

591. Wenn wir annehmen, dass in der Gleichung (2) $A = o$ ist, so erhalten wir statt der beiden Sätze der vorigen Nummer die folgenden:

Wenn man von irgend zwei festen Puncten der Tangente im Osculationspuncte mehrerer sich osculirender Parabeln noch zwei Tangenten an jede Parabel legt, so liegt der Durchschnittspunct solcher zwei Tangenten auf einer festen geraden Linie, die der gemeinschaftlichen Tangente im Osculationspuncte parallel ist.

Wenn man von irgend einem festen Puncte der Tangente im Osculationspuncte an jede Parabel noch eine zweite Tangente legt, so liegen die Berührungspuncte auf allen diesen Tangenten auf einer festen geraden Linie, welche der Tangente im Osculationspuncte parallel ist.

Nach dem ersten der beiden vorstehenden Sätze können wir folgende Aufgabe construiren:

Eine Parabel zu beschreiben, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte osculirt und überdiess eine gegebene gerade Linie berührt.

Es sei SQ die gegebene gerade Linie, die der Tangente des Osculationspunctes O im Puncte T begegne. Man lege durch T eine zweite Tangente TM an die gegebene Parabel und an dieselbe Parabel noch irgend eine beliebige dritte Tangente, die der Tangente TM in S', und der Tangente OT in T' begegne. Durch S' ziehe man, parallel mit OT, die gerade Linie S'S, die der gegebenen SQ in S begegne, und endlich ST'. Diese gerade Linie ist alsdann eine neue Tangente der zu construirenden Curve.

Nach dem zweiten der beiden vorstehenden Sätze können wir in der letzten Aufgabe auf der gegebenen geraden Linie den Berührungspunct bestimmen.

592. Der Abstand des Punctes (3) von der zweiten Axe ist gleich:

$$-\frac{w}{v} = \frac{2B-(x+x')}{A-xx'},$$

und bleibt also derselbe, so lange A und B dieselben Werthe behalten, das heisst, für alle beliebige Curven, welche die erste Axe im Anfangspuncte und überdiess zwei gegebene, unter sich und mit der zweiten Axe, parallele gerade Linien berühren. Also:

Wenn mehrere Curven zweiter Classe eine gegebene gerade Linie in demselben Puncte und überdiess noch zwei gegebene gerade Linien berühren, und man von irgend zwei festen Puncten der ersten geraden Linie noch zwei Tangenten an jede Curve legt, so schneiden sich die verschiedenen Tangenten-Paare auf einer festen geraden Linie, die mit den beiden gegebenen parallelen Linien parallel ist.

Wenn man von demselben festen Punct der ersten gegebenen geraden Linie Tangenten an alle Curven zieht, so liegen die Berührungspuncte auf allen diesen Tangenten auf einer neuen Parallelen.

Wenn mehrere Parabeln zwei gegebene gerade Linien berühren und zwar die erste derselben in einem gegebenen Puncte, so schneiden sich je zwei Tangenten, die sich von irgend zwei festen Puncten dieser ersten geraden Linie an jede Parabel legen lassen, in einem Puncte einer festen geraden Linie, die der zweiten gegebenen parallel ist.

Wenn man von irgend einem festen Puncte der ersten gegebenen geraden Linie eine zweite Tangente an jede Parabel legt, so liegen die Berührungspuncte auf allen diesen Tangenten in derselben geraden Linie, die der zweiten gegebenen parallel ist.

Aus den vorstehenden Sätzen ergeben sich wiederum lineare Constructionen, die wir hier übergehen. Die Sätze der zunächst vorhergehenden Nummern sind als besondere Fälle derselben anzusehen.

593. Wenn wir von der allgemeinen Gleichung solcher Hyperbeln, welche die erste Axe zur gemeinschaftlichen Asymptote haben:

$$w^2+2Bvw+Cv^2+2Euv = 0, \qquad (4)$$

folgende Gleichung:

$$w^2+(\xi+\xi')vw+\xi\xi'v^2 = 0, \qquad (5)$$

welche das System irgend zweier auf der ersten Axe liegenden Puncte darstellt, abziehn und dann den gemeinschaftlichen Factor w fortlassen, so kommt:

$$(2B-(\xi+\xi'))w+(C-\xi\xi')v+2Eu = 0. \qquad (6)$$

Diese Gleichung stellt den Durchschnittspunct derjenigen beiden Tangenten dar, die sich von den beiden Puncten (5), die auf der Asymptote der Curve liegen, an die Curve ziehen lassen. Wenn wir diese beiden Puncte als fest, und demnach ξ und ξ' als gegeben betrachten, so erhalten wir die folgenden drei Fälle aus der Discussion der Gleichung (6).

1) Der in Rede stehende Durchschnittspunct (6) liegt auf einer festen, durch den Anfangspunct gehenden, geraden Linie, wenn wir nach einander statt der Curve (5) verschiedene Curven nehmen, in deren Gleichungen B beliebig ist, C und E aber ein für alle Mal gegeben sind.
2) Der Durchschnittspunct (6) liegt auf einer festen, der ersten Axe parallelen, geraden Linie, wenn C nach einander verschiedene Werthe erhält, B und E aber ein für alle Mal bestimmt sind.
3) Der Durchschnittspunct (6) liegt auf einer festen, der zweiten Axe parallelen, geraden Linie, wenn C und B durchaus bestimmte Werthe erhalten, der Coefficient E aber unbestimmt bleibt.

594. Die geometrische Deutung des ersten dieser drei Fälle gibt die folgenden Sätze:

Wenn man von irgend zwei festen Puncten der gemeinschaftlichen Asymptote mehrerer Hyperbeln, welche auf dieser Asymptote in unendlicher Entfernung einen dreipunctigen Contact haben, und überdiess eine gegebene gerade Linie berühren, an jede Hyperbel zwei Tangenten zieht, so liegt der Durchschnittspunct aller dieser Tangenten-Paare auf ein und derselben geraden Linie, welche durch den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangente und Asymptote geht.

Wenn man von irgend einem festen Puncte der gemeinschaftlichen Asymptote an jede Hyperbel eine Tangente legt, so liegen die Berührungspuncte auf allen diesen Tangenten in einer ebenfalls durch jenen Durchschnitt gehenden geraden Linie.

In der 13. Figur, die ich hinzufüge, um von der Beziehung zweier sich in unendlicher Entfernung dreipunctig osculirender Hyperbeln zu einander eine Anschauung zu geben, ist AB die gemeinschaftliche Asymptote der beiden Curven, $\tau\tau'$ die gemeinschaftliche Tangente, und τ der Punct, in welchem diese beiden geraden Linien sich schneiden. T und T' sind zwei beliebige feste Puncte der gemeinschaftlichen Asymptote, die durch diese beiden Puncte gehenden Tangenten der einen Curve schneiden sich in S, die der andern in S'. Der Punct τ liegt mit den beiden Puncten S und S' in gerader Linie. Fig. 13.

Nach dem ersten der beiden vorstehenden Sätze erhalten wir eine lineare Construction folgender Aufgabe:

Eine Hyperbel zu beschreiben, die mit einer gegebenen in unendlicher Entfernung einen dreipunctigen Contact hat und überdiess irgend zwei gegebene gerade Linien berührt.

Wir wollen **erstens** annehmen, dass eine der beiden gegebenen zu berührenden geraden Linien $\tau\tau'$ zugleich eine Tangente der gegebenen Hyperbel MN sei. Die andere gegebene gerade Linie sei TQ und schneide diejenige Asymptote AB der gegebenen Hyperbel, auf welche der Contact Statt finden soll, im Puncte T. Man lege von T aus an die gegebene Hyperbel die Tangente TS' und an dieselbe Curve noch irgend eine zweite Tangente T'S', welche der Tangente TS' in S' und der Asymptote AB in T' begegne. Man ziehe τS', welche der gegebenen geraden Linie TQ in S begegne und endlich T'S. Diese letzte gerade Linie ist alsdann eine neue Tangente der zu construirenden Curve.

Wenn **zweitens** irgend zwei beliebige gerade Linien, welche von der gesuchten Curve berührt werden sollen, gegeben sind, so können wir sogleich die gemeinschaftliche Tangente der beiden Curven bestimmen. Es seien nemlich TS und T'S die beiden gegebenen geraden Linien; alsdann ergibt sich der Punct S', indem wir von T und T' aus Tangenten an die gegebene Hyperbel legen. Die durch S und S' gehende gerade Linie schneidet AB in τ, durch welchen Punct jene gemeinschaftliche Tangente geht.

Nach dem zweiten der beiden vorstehenden Sätze können wir sogleich die beiden Berührungspuncte auf den beiden gegebenen geraden Linien bestimmen. Der Berührungspunct t auf TQ zum Beispiel liegt zugleich auf derjenigen geraden Linie τt', welche den Berührungspunct t' auf TS', der durch T gehenden Tangente der gegebenen Hyperbel mit dem Puncte τ verbindet.

An den letztgenannten Satz schliessen sich noch einige specielle Constructionen an, von denen wir die Construction der folgenden Aufgabe noch hervorheben wollen.

Eine Hyperbel zu beschreiben, die mit einer gegebenen auf einer gegebenen Asymptote derselben einen dreipunctigen Contact und überdiess eine gegebene gerade Linie zur zweiten Asymptote hat.

Es sei AC die gegebene gerade Linie, welche der gemeinschaftlichen Asymptote AB in A begegne. Man lege durch A eine Tangente At'' an die gegebene Curve und t'' sei der Berührungspunct. Durch t'' lege man eine gerade Linie parallel mit AC. Diese gerade Linie schneidet AB in T.

595. Die geometrische Deutung des zweiten Falles der 593. Nummer gibt die folgenden beiden Sätze:

Wenn man von irgend zwei festen Puncten der gemeinschaftlichen Asymptote mehrerer in unendlicher Entfernung sich vierpunctig osculirender Hyperbeln, zwei Tangenten an jede derselben legt, so liegen die Durchschnittspuncte aller dieser Tangenten-Paare auf einer der gemeinschaftlichen Asymptote parallelen geraden Linie. Die Berührungspuncte auf allen durch denselben Punct der gemeinschaftlichen Asymptote gehenden Tangenten liegen ebenfalls auf einer dieser Asymptote parallelen geraden Linie.

Nach dem vorstehenden Satze können wir folgende Aufgabe construiren:

Eine Hyperbel zu beschreiben, die eine gegebene in unendlicher Entfernung vierpunctig osculirt und überdiess eine gegebene gerade Linie berührt.

Fig. 14. Es sei MN die gegebene Hyperbel, AB diejenige Asympsote, auf welcher der Contact Statt finden soll, und die von der gegebenen geraden Linie TQ in T geschnitten wird. An die gegebene Hyperbel lege man irgend zwei Tangenten TS' und T'S', von welchen die erstgenannte durch T geht. Durch S', den Durchschnitt dieser beiden Tangenten, lege man S'S parallel mit AB und S sei der Punct, in welchem diese gerade Linie der gegebenen TQ begegnet. Zieht man alsdann T'S, so erhält man eine neue Tangente der zu construirenden Curve.

Wenn die gegebene gerade Linie insbesondere TQ durch den Mittelpunct der gegebenen Curve geht, so ist dieselbe die zweite Asymptote der verlangten Curve. In der eben angezeigten Construction der Tangenten dieser Curve ändert sich nichts.

Um auf der gegebenen geraden Linie TQ den Berührungspunct t zu bestimmen, brauchen wir nur tt', parallel mit AB durch t', den Berührungspunct auf Tt', zu ziehen.

Eine Hyperbel zu beschreiben, die eine gegebene in unendlicher Entfernung vierpunctig osculirt und überdiess durch einen gegebenen Punct geht.

Es sei t der gegebene Punct. Durch diesen Punct lege man tt' parallel mit AB, und t' sei der Punct, in welchem diese gerade Linie der gegebenen Hyperbel begegnet. An diese Hyperbel lege man im Puncte t' eine Tangente, die der Asymptote AB in T begegne. Zieht man endlich Tt, so erhält man die Tangente der verlangten Curve in dem gegebenen Puncte t.

Man sieht ohne Mühe, dass die Sätze und Constructionen dieser Nummer aus den Sätzen und Constructionen der vorigen als besondere Fälle sich herleiten lassen. Aus der Discussion des dritten Falles der 593. Nummer ergeben sich ganz analoge, und noch allgemeinere Resultate, bei deren Herleitung wir hier nicht verweilen wollen.

596. Wenn wir von der allgemeinen Gleichung solcher Parabeln, deren Durchmesser der ersten Axe parallel sind:

$$u^2+2Bvw+Cv^2+2Euv = 0, \qquad (7)$$

folgende Gleichung:

$$u^2+(\lambda+\lambda')uv+\lambda\lambda'v^2 = 0, \qquad (8)$$

die ein System von zwei nach gegebenen Richtungen hin unendlich weit liegenden Puncten darstellt, abziehen, und in der resultirenden Gleichung den gemeinschaftlichen Factor v vernachlässigen, so kommt:

$$2Bw+(C-\lambda\lambda')v+(2E-(\lambda+\lambda'))u = 0. \qquad (9)$$

Diese Gleichung stellt offenbar den Durchschnittspunct derjenigen beiden Tangenten dar, welche die der Gleichung (8) entsprechenden Richtungen haben. Wir erhalten hier wiederum drei verschiedene Fälle: (586)

1) Der Punct (9) liegt auf einer festen, durch den Anfangspunct gehenden, geraden Linie, wenn wir in der allgemeinen Gleichung (7) für C und E ein für alle Mal bestimmte, für B aber nach einander alle möglichen Werthe annehmen.
2) Der Punct (9) liegt auf einer der zweiten Axe parallelen geraden Linie, wenn die Coefficienten B und C bestimmt sind, aber E unbestimmt bleibt.
3) Der Punct (9) liegt auf einer der ersten Axe parallelen geraden Linie, wenn die Coefficienten B und E gegeben sind, der Coefficient C aber beliebig angenommen werden kann.

597. Die geometrische Deutung des ersten Falles der vorigen Nummer führt uns zu folgendem Satze.

Wenn man nach zwei gegebenen Richtungen, an jede von solchen Parabeln, die zwei gegebene gerade Linien berühren und deren Durchmesser parallel sind, zwei Tangenten legt, so liegen die Durchschnittspuncte solcher Tangenten-Paare, so wie die Berührungspuncte auf allen unter sich parallelen Tangenten, auf denselben geraden Linien und diese geraden Linien gehen durch den Durchschnittspunct der gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Parabeln.

Nach diesem Satze ergibt sich unter Anderm, wie sogleich erhellet, die Construction der gemeinschaftlichen Tangenten zweier Parabeln, deren Durchmesser parallel sind.

598. Die geometrische Deutung des 2. Falles der 596. Nummer gibt folgenden Satz:

Wenn man nach zwei gegebenen Richtungen, an jede von solchen Parabeln, die sich in unendlicher Entfernung dreipunctig osculiren und überdiess eine gegebene gerade Linie berühren, zwei Tangenten legt, so liegen die Durchschnitte aller dieser Tangenten-Paare in gerader Linie und diese gerade Linie ist der gegebenen parallel. Die Berührungspuncte auf allen unter einander parallelen Tangenten der verschiedenen Parabeln liegen ebenfalls in einer solchen geraden Linie.

Hiernach ergibt sich die Construction folgender Aufgabe:

Eine Parabel zu beschreiben, die eine gegebene in unendlicher Entfernung dreipunctig osculirt und überdiess irgend zwei gegebene gerade Linien berührt.

Es sei MN die gegebene Parabel, QS und RS seien die beiden gegebenen geraden Linien und S ihr Durchschnitt. Man lege an die gegebene Parabel zwei diesen geraden Linien parallele Tangenten Q'S' und R'S', die sich in irgend einem Puncte S' schneiden werden. Man ziehe SS' und lege, parallel mit dieser geraden Linie, an die gegebene Parabel die Tangente TT. Diese Tangente berührt zugleich auch die verlangte Parabel. Fig. 15.

Sobald diese gemeinschaftliche Tangente gefunden ist, ist es leicht, beliebig viele Tangenten der letztgenannten Parabel zu bestimmen.

Um die Berührungspuncte t und t'' auf den beiden geraden Linien QS und RS zu finden, brauchen wir nur durch t' und t''', die Berührungspuncte auf Q'S' und R'S', zwei gerade Linien, parallel mit SS', zu ziehen.

599. Die geometrische Deutung des dritten Falles der 596. Nummer zeigt, dass alsdann alle Parabeln denselben Haupt-Durchmesser und gleiche Parameter haben und also zusammenfallen würden, wenn man dieselben nach der Richtung der ersten Axe gehörig verschöbe. Dasselbe folgt unmittelbar aus der 480. und 506. Nummer.

600. Die Gleichung (3) der 587. Nummer stellt, indem wir von irgend einer bestimmten, der durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellten, Curven ausgehen und nach und nach für x und x' alle möglichen Werthe nehmen, alle möglichen Puncte in der Ebene der Curve dar. Bestimmen wir x und x' so, dass

$$x+x' = const.,$$

so liegen alle diese Puncte auf derselben durch den Anfangspunct der Coordinaten gehenden geraden Linie. Hiernach erhalten wir folgenden Satz:

Wenn wir auf einer gegebenen Tangente einer gegebenen Curve zweiter Classe, solche Paare von Puncten bestimmen, die mit dem Berührungspuncte und irgend einem festen Puncte der gegebenen Tangente vier harmonische Theilungspuncte bilden, so schneiden sich die Tangenten-Paare, welche durch diese Puncte gehen, auf einer festen, durch den Berührungspunct gehenden, geraden Linie.

Dieselbe gerade Linie geht offenbar auch durch den Berührungspunct auf der zweiten durch jenen festen Punct gehenden Tangente. Hiernach können wir demselben Satze auch folgende Aussage geben:

Irgend zwei Tangenten einer gegebenen Curve zweiter Classe werden von zweien andern harmonisch geschnitten, wenn der Durchschnitt dieser auf der Polaren des Durchschnittes von jenen liegt.

Die Beziehung der beiden Tangenten-Paare zu einander ist durchaus gegenseitig.

Wenn wir insbesondere

$$x+x' = 0$$

setzen, so ist der in Rede stehende Ort ein Durchmesser der Curve und wir kommen zu einem allbekannten Satze.

Der Punct (3) liegt ferner auf einer der ersten Axe paralellen geraden Linie, wenn

$$xx' = const.,$$

und somit erhalten wir den nachstehenden Satz:

Wenn wir von zwei beliebigen Puncten einer gegebenen Tangente einer gegebenen Curve zweiter Classe, für welche das Product der Abstände vom Berührungspuncte, derselben beliebigen Grösse gleich ist, Tangenten an die Curve legen, so schneiden dieselben sich auf einer festen, der gegebenen Tangente parallelen, geraden Linie.

601. Die ganz analoge Discussion der Gleichung (6) der 593. Nummer gibt, indem wir

$$\xi+\xi' = const.$$

setzen, folgenden Satz, den wir durch Gränzbetrachtungen sogleich aus dem ersten Satze der vorhergehenden Nummer hätten herleiten können.

Wenn man von solchen Puncten einer Asymptote einer gegebenen Hyperbel, die von einem gegebenen Puncte dieser Asymptote gleich weit abstehen, Tangenten an die Hyperbel legt, so schneiden sich diese Tangenten, paarweise genommen, auf einer festen, jener Asymptote parallelen geraden Linie.

Hiernach ergibt sich eine leichte Construction einer Hyperbel, die von vier gegebenen geraden Linien eine zu einer ihrer Asymptoten und die drei übrigen zu Tangenten hat.

Wenn wir

$$\xi\xi' = const.$$

setzen, so ergibt sich folgender Satz:

Wenn man von solchen zwei Puncten einer Asymptote einer gegebenen Hyperbel, für welche das Product der Abstände von einem festen Puncte derselben Asymptote constant ist, Tangenten an die Hyperbel legt, so schneiden sich dieselben in einem Puncte einer durch den festen Punct gehenden festen geraden Linie.

602. Aus einer analogen Discussion der Gleichung (9) erhalten wir endlich noch zwei allbekannte Sätze, die den Sätzen der beiden vorigen Nummern entsprechen und die wir aus diesem Grunde hier anführen.

Irgend zwei Tangenten einer gegebenen Parabel, derjenige Durchmesser, welcher durch den Durchschnittspunct derselben geht, und die Tangente im Scheitel dieses Durchmessers, haben die Richtung von vier Harmonicalen.

Dieser Satz bezieht sich auf die Bedingung:

$$\lambda+\lambda' = const.$$

Wenn wir

$$\lambda\lambda' = const.$$

setzen und insbesondere *const.* = (—1) nehmen, so kommen wir zu folgendem zweiten Satze:

Die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel eine gegebene Parabel berühren, liegen in gerader Linie (der Directrix). —

603. Wenn wir irgend eine Curve zweiter Classe, welche die erste Coordinaten-Axe im Anfangspuncte berührt, durch die Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw = o, \qquad (1)$$

darstellen, so erhalten wir die Gleichungen aller möglichen Curven derselben Classe, die die gegebene im Anfangspuncte dreipunctig osculiren, wenn wir, unter der Bedingung, dass der Quotient $\frac{D}{C}$ unverändert derselbe bleibt, den Coefficienten der vorstehenden Gleichung beliebige Werthe beilegen (581). Eine von diesen Gleichungen insbesondere stellt einen Kreis dar. Diesen Kreis wollen wir in dem Folgenden bestimmen.

Bei der Annahme rechtwinkliger Coordinaten-Axen ist die allgemeine Gleichung des Kreises:

$$(au+bv+w)^2 = \varrho^2(v^2+u^2),$$

wenn ϱ den Radius desselben bezeichnet und

$$au+bv+w = o$$

die Gleichung seines Mittelpunctes ist (442). Wenn der Kreis die erste Coordinaten-Axe im Anfangspuncte berühren soll, so verwandelt sich seine Gleichung, indem wir

$$b = o, \qquad a = \varrho,$$

setzen, in folgende:

$$w^2-\varrho^2v^2+2\varrho uw = o. \qquad (2)$$

Wenn der Kreis (2) die gegebenen Curve (1) dreipunctig osculiren soll, so erhalten wir (581) die Bedingungs-Gleichung:

$$\frac{D}{C} = -\frac{1}{\varrho},$$

mithin:

$$\varrho = -\frac{C}{D}.$$

Wir erhalten hiernach eine einfache Construction des Krümmungshalbmessers einer gegebenen Curve zweiter Classe in einem gegebenen Puncte. Es ist nemlich $\left(\frac{C}{A}\right)$ gleich dem Producte der beiden Abstände der beiden der zweiten Coordinaten-Axe parallelen Tangenten von dieser Axe (der Normalen im gegebenen Puncte) und $\left(-\frac{2D}{A}\right)$ gleich dem Abstande derjenigen Tangente, die der ersten Coordinaten-Axe parallel ist, von dieser Axe (der Tangente im gegebenen Puncte). Hiernach gelangen wir zu folgendem Satze:

Der Krümmungshalbmesser einer in ein gegebenes Rechteck beschriebenen Curve zweiter Classe in demjenigen Puncte, in welchem dieselbe eine Seite des Rechtecks berührt, ist gleich der vierten Proportionalen zu der Hälfte einer der beiden anliegenden Seiten des Rechtecks und den beiden durch den Berührungspunct auf der erstgenannten Seite bestimmten Segmente.

Unmittelbar an diesen Satz knüpft sich die Construction folgender Aufgabe:

In ein gegebenes Rechteck eine Ellipse zu beschreiben, die in demjenigen Puncte, in welchem eine Seite des Rechtecks berührt wird, eine gegebene Krümmung hat.

Man würde nur leichte Modificationen erhalten, wenn man an die Stelle des Rechtecks ein beliebiges Parallelogramm setzte.

604. Die in der vorigen Nummer entwickelte Construction des Krümmungshalbmessers einer gegebenen Curve zweiter Classe in einem gegebenen Puncte verliert ihre Anwendbarkeit für den Fall der Parabel. Wir erhalten eine zweite Construction, wenn wir zu der allgemeinern Constanten-Bestimmung in der 527. Nummer zurückgehen, nach der sich, wenn wir den Mittelpunct der Curve durch (y', x'), und den Pol der zweiten Axe, der in dem vorliegenden Falle auf der ersten Axe liegt, durch $(0, x'')$ bezeichnen, folgende Gleichung ergibt:

$$\varrho = -\frac{C}{D} = -\frac{x'}{y'}x''.$$

Fig. 16. In der 16. Figur, auf die wir uns, der Kürze halber, beziehen wollen, ist O der auf dem Umfange der Curve liegende Anfangspunct und OY und OX sind die beiden sich rechtwinklig schneidenden Coordinaten-Axen. K ist der Mittelpunct und X″ der Pol der zweiten Axe. Alsdann kommt:

$$x'' = OX'',$$

$$-\frac{x'}{y'} = tang YOK = tang\alpha,$$

und mithin:

$$\varrho = OX'' tang\alpha = OP,$$

indem wir durch X″ die gerade Linie PX″ so legen, dass der Winkel OX″P gleich α ist. Man kann hiernach den Punct P auch construiren, indem man vom Puncte X″ aus auf den durch den gegebenen Punct O gehenden Durchmesser KO ein Perpendikel fällt, und

mit diesem Perpendikel, verlängert bis zum Durchschnitte mit der zweiten Axe, als Radius, aus X″, als Mittelpunct, einen Kreis RP beschreibt. Wir haben also folgenden Satz:

Wenn eine Curve zweiter Classe und auf dem Umfange derselben ein Punct gegeben ist, so bildet der durch diesen Punct gehende Durchmesser mit der Normalen denselben Winkel, als die Tangente mit einer durch den Pol der Normalen und den Mittelpunct des Osculations-Kreises in dem gegebenen Puncte gehenden geraden Linie.

Es besteht dieser Satz offenbar auch für denjenigen Fall, dass die gegebene Curve eine Parabel ist.

605. Aus dem Anblick der beiden Gleichungen (1) und (2) der 603. Nummer ergibt sich sogleich, dass der Kreis (2) mit der gegebenen Curve nur dann einen vierpunctigen Contact haben kann, wenn (581):

$$B = o,$$

das heisst, wenn die zweite Axe durch den Mittelpunct der gegebenen Curve geht. Also nur in den Scheitelpuncten der beiden Hauptdurchmesser einer gegebenen Curve zweiter Classe wird dieselbe von einem Kreise vierpunctig osculirt. *)

---

*) Wir wollen in dieser Note kurz andeuten, wie die im Texte entwickelte Theorie der Osculation sich unmittelbar auf Curven einer beliebigen Classe ausdehnen lässt.

Es sei:

$$aw^3+(bv+cu)w^2+(dv^2+euv+fu^2)w+gv^3+huv^2+iu^2v+ku^3 = o, \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung der Curven dritter Classe. Wenn wir in dieser Gleichung $w = o$ setzen, so ergibt sich die Gleichung:

$$gv^3+huv^2+iu^2v+ku^3 = o,$$

zur Bestimmung der Richtung der drei durch den Anfangspunct gehenden Tangenten. In dem Falle, dass $k = o$, wird die Curve von der ersten Axe berührt. Wenn zugleich $i = o$, so fallen zwei durch den Anfangspunct der Coordinaten gehende Tangenten mit der ersten Axe zusammen: die Curve geht durch den Anfangspunct. Wenn endlich überdiess auch $h = o$, so fallen drei durch den Anfangspunct gehende Tangenten mit der ersten Axe zusammen. Der Anfangspunct ist ein singularer Punct, drei auf einander folgende Elemente der Curve fallen in die erste Axe; man könnte sagen: zwischen Curve und Anfangspunct finde eine dreitangentige Osculation Statt.

Wenn wir in der Gleichung (1) $v = o$ setzen, so erhalten wir zur Bestimmung derjenigen Puncte, in welchen die drei der ersten Axe parallelen Tangenten in die zweite Axe einschneiden, folgende Gleichung:

$$aw^3+cuw^2+fu^2w+ku^3 = o.$$

Diese Gleichung zeigt wiederum, dass, wenn $k = o$ ist, eine Tangente der Curve mit der ersten Axe zusammenfällt. Wenn zugleich $f = o$, so gehen zwei der ersten Axe parallele Tangenten durch den Anfangspunct: die erste Axe berührt, im Allgemeinen, zwei Zweige der gegebenen Curve. Wenn überdiess auch noch $c = o$, so gehen drei der ersten Axe parallele Tangenten durch den Anfangspunct; es wird diese Axe von der gegebenen Curve, im Allgemeinen, in drei Puncten berührt. —

Wenn wir den Anfangspunct der Coordinaten auf dem Umfange irgend einer gegebenen Curve dritter Classe beliebig annehmen, und mit der Tangente in diesem Puncte die erste Axe zusammenfallen lassen, so erhalten wir für die Curve, wie wir eben gesehen haben, eine Gleichung von folgender Form:

$$aw^3+(bv+cu)w^2+(dv^2+euv+fu^2)w+gv^3+huv^2 = o. \qquad (2)$$

Ferner ist die allgemeine Gleichung derjenigen Curven zweiter Classe, welche die erste Axe, und mithin auch die gegebene Curve dritter Classe, im Anfangspuncte berühren,

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw = o. \qquad (3)$$

Es ist leicht, aus den beiden vorstehenden Gleichungen eine solche Gleichung herzuleiten, die ebenfalls vom dritten Grade ist, und in welcher w als gemeinschaftlicher Factor erscheint. Wir brauchen zu diesem Ende in der Gleichung (2) nur statt v^3 und uv^2 folgende Ausdrücke, welche wir aus (3) erhalten, zu substituiren:

606. In der 584. Nummer haben wir nachgewiesen, dass alle Curven, welche durch folgende Gleichung:

$$w^2+2Bvw+Cv^2+2Euv = o,$$

dargestellt werden, wenn B und C beliebige Coefficienten sind, E aber ein für alle Mal

---

$$-v.\frac{Aw^2+2Bvw+2Duw}{C}, \qquad -u.\frac{Aw^2+2Bvw+2Duw}{C}.$$

Hiernach kommt:

$$w[Caw^2+(Cb-Ag)vw+(Cd-2Bg)v^2+(Cc-Ah)uw+(Ce-2Dg-2Bh)uv+(Cf-2Dh)u^2] = o. \quad (4)$$

Da die Gleichung (4) eine algebraische Folge aus den beiden Gleichungen (2) und (3) ist, so können wir die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Curven auch aus der Zusammenstellung der beiden Gleichungen (2) und (4) bestimmen. Die Anzahl dieser gemeinschaftlichen Tangenten beträgt sechs. Zwei dieser sechs Tangenten, worauf sich der Factor w in der letzten Gleichung bezieht, fallen in die erste Axe; die vier übrigen erhalten wir, indem wir aus (3) und der Gleichung:

$$Caw^2+(Cb-Ag)vw+(Cd-2Bg)v^2+(Cc-Ah)uw+(Ce-2Dg-2Bh)uv+(Cf-2Dh)u^2 = o, \quad (5)$$

etwa die Werthe für $\frac{w}{u}$ und $\frac{w}{v}$ ziehen. Um auszudrücken, dass diese letztgenannten vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Curven, die also auch gemeinschaftliche Tangenten jeder dieser Curven und der durch (5) dargestellten Curve zweiter Classe sind, mit der ersten Axe zusammenfallen, erhalten wir sogleich folgende Gleichungen:

$$Cf-2Dh = o, \quad (6)$$
$$Ce-2Dg-2Bh = o, \quad (7)$$
$$C(Cc-Ah) = 2D(Cd-2Bg), \quad (8)$$
$$C(Cb-Ag) = 2B(Cd-2Bg), \quad (9)$$

Die Gleichung (6) bedeutet, dass die Curve (5) die erste Axe berührt, die Gleichungen (6) und (7) zeigen an, dass der Berührungspunct auf der ersten Axe mit dem Anfangspuncte zusammenfällt. Die Gleichungen (6), (7) und (8) drücken aus, dass die Curve (5) die gegebene Curve zweiter Classe (3) dreipunctig osculirt, und die letzten Gleichungen, alle vier zugleich, dass diese Osculation eine vierpunctige ist. Es folgt hieraus, dass die beiden gegebenen Curven (2) und (3) sich in diesen verschiedenen Fällen drei-, vier-, fünf-, sechs-punctig osculiren auf der ersten Axe im Anfangspuncte der Coordinaten.

Aus den letzten vier Gleichungen erhalten wir ohne Mühe die nachstehenden, welche ihre Stelle vertreten können:

$$Cf-2Dh = o, \quad (10)$$
$$C(he-fg)-2Bh^2 = o, \quad (11)$$
$$C(ch^3-dfh^2+fegh-f^2g^2)-Ah^4 = o, \quad (12)$$
$$bh^4-(cg+dh)h^3+(e^2g+2dfg)h^2-3feg^2h+2f^2g^3 = o. \quad (13)$$

Hiernach ergibt sich unmittelbar für den Osculations-Kreis der gegebenen Curve im Anfangspuncte (bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen) folgende Gleichung:

$$f^2w^2-4h^2v^2-4fhuw = o. \quad (14)$$

Wollen wir die Krümmung der Curve noch genauer bestimmen, so können wir diess am füglichsten vermittelst der Osculations-Parabel thun. Für diese Parabel finden wir folgende Gleichung:

$$(he-fg)vw+h^2v^2+fhuw = o. \quad (15)$$

Wollen wir die Krümmung der gegebenen Curve im Anfangspuncte durch die (fünfpunctig) osculirende Curve zweiter Classe bestimmen, so erhalten wir für diese Curve folgende Gleichung:

$$(ch^3-dfh^2+fegh-f^2g^2)w^2+h^2(he+fg)vw+h^4v^2+fh^3uw = o. \quad (16)$$

Weiter können wir hier im Allgemeinen nicht gehen. Die Gleichung (13) ist eine Bedingungs-Gleichung zwischen den Constanten der gegebenen Gleichung der Curve dritter Classe, die befriedigt werden muss, wenn diese Curve im Anfangspuncte mit einer Curve zweiter Classe einen sechspunctigen Contact haben soll. Eine Curve dritter Classe hat nur in gewissen Puncten ihres Umfangs mit einer Curve zweiter Classe einen sechspunctigen Contact. Wenn ein solcher Punct zum Anfangspuncte der Coordinaten, und die Tangente in diesem Puncte zur ersten Axe genommen wird, so stellt die letzte Gleichung jene sechspunctig os-

gegeben ist, solche Hyperbeln sind, welche sich auf der ersten Axe in unendlicher Entfernung osculiren. Für alle diese Curven ist das Product der beiden Haupt Durchmesser derselben eine constante (imaginäre) Grösse. Das Quadrat dieses Productes ist nemlich (511), wenn wir die allgemeine Gleichung zu Grunde legen, gleich:

$$-\frac{(AE-BD)^2-(AC-B^2)(AF-D^2)}{A^4},$$

und dieser Ausdruck reducirt sich, indem wir $A = 1$, $D = o$ und $F = o$ setzen, auf:

$$-E^2.$$

E ist aber nach der 532. Nummer gleich dem Inhalte des von einer beliebigen Tangente und den beiden Asymptoten einer der gegebenen Hyperbeln gebildeten Dreiecks.

In allen Hyperbeln, welche sich in unendlicher Entfernung dreipunctig osculiren, ist der Inhalt aller Dreiecke, die von dem Asymptoten-Winkel durch eine beliebige Tangente abgeschnitten werden, constant. *)

---

culirende Curve dar, und es gibt eigentlich keine fünfpunctig osculirende Curve zweiter Classe für diesen Punct.

Die Construction des Krümmungshalbmessers, die wir in der 603. Nummer für den Fall, dass die gegebene Curve von der zweiten Classe ist, entwickelt haben, lässt sich auf beliebige algebraische Curven ausdehnen. Es sei:

$$aw^m+(bv+cu)w^{m-1}+ \,.\,.\, +(dv^{m-1}+euv^{m-3}+ \,.\,.\, fu^{m-2})w^2+(gv^{m-1}+ \,.\,.\, +hu^{m-2}v+ku^{m-1})w$$
$$+lv^m+ \,.\,.\, +mu^{m-3}v^3+nu^{m-2}v^2 = o,$$

die Gleichung irgend einer Curve m. Classe. Der Krümmungshalbmesser dieser Curve im Anfangspuncte der Coordinaten ist alsdann gleich:

$$-\frac{2}{m-1}\cdot\frac{n}{k},$$

was unter Anderm auch aus der 544. Nummer folgt, nach welcher:

$$fw^2+hvw+(m-1)kuw+nv^2 = o,$$

eine Curve zweiter Classe darstellt, welche die gegebene im Anfangspuncte der Coordinaten dreipunctig osculirt.

Wenn wir die Abstände derjenigen m Tangenten der gegebenen Curve, welche der zweiten Axe parallel sind, durch $\eta_1, \eta_2, \,.\,.\, \eta_m$, ferner die Abstände derjenigen $(m-1)$ Tangenten, welche der ersten Axe parallel sind, durch $\xi_1, \xi_2, \,.\,.\, \xi_{m-1}$ und endlich diejenigen Winkel, welche die durch den Anfangspunct gehenden $(m-2)$ Tangenten (die beiden in die erste Axe fallenden Tangenten nicht mitgerechnet) durch $\omega_1, \omega_2, \,.\,.\, \omega_{m-2}$ bezeichnen, so erhalten wir, abgesehen vom Zeichen, sogleich folgende Ausdrücke:

$$\frac{n}{l} = tang\omega_1 \,.\, tang\omega_2 \,.\,.\,.\, tang\omega_{m-2},$$

$$\frac{l}{a} = \eta_1 \,.\, \eta_2 \,.\,.\,.\, \eta_m,$$

$$\frac{k}{a} = \xi_1 \,.\, \xi_2 \,.\,.\,.\, \xi_{m-1};$$

und hiernach ist der zu bestimmende Krümmungshalbmesser gleich:

$$\frac{2}{m-1}\cdot\frac{\eta_1 \,.\, \eta_2 \,.\,.\,.\, \eta_m}{\xi_1 \,.\, \xi_2 \,.\,.\,.\, \xi_{m-1}} \,.\, tang\omega_1 \,.\, tang\omega_2 \,.\,.\,.\, tang\omega_{m-2}.$$

Der Raum verbietet in die Discussion dieses bemerkenswerthen Ausdrucks, der zum Beispiel für den Fall, dass wir zum Anfangspuncte einen der Berührungspuncte auf einer solchen geraden Linie nehmen, welche zwei oder mehrere Zweige der gegebenen Curve zugleich berührt, unter der Form $\frac{o}{o}$ erscheint.

*) Wenn irgend eine Curve gegeben ist, die reelle Asymptoten hat, so können wir Hyperbeln bestimmen, welche mit der gegebenen Curve auf jeder Asymptote in unendlicher Entfernung

607. Wir haben in der 586. Nummer gesehen, dass, wenn wir in der Gleichung:

$$2Bvw+Cv^2+2Euv+u^2 = 0,$$

C und E beliebig annehmen, während wir B als ein für alle Mal gegeben betrachten, diese Gleichung solche Parabeln darstellt, die sich in unendlicher Entfernung dreipunctig osculiren. Alle diese Parabeln haben, wie wir schon gezeigt haben, Durchmesser, die der ersten Axe parallel sind, und, wovon man sich leicht überzeugt, gleiche Parameter. Indem wir nemlich die Gleichung:

$$2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

zu Grunde gelegt, haben wir für den vierten Theil des Parameters der bezüglichen Curve in der 506. Nummer folgenden Ausdruck erhalten:

---

einen dreipunctigen Contact haben. Wenn wir eine dieser osculirenden Hyperbeln durch die Gleichung:

$$w^2+2Bvw+Cv^2+Euv = 0,$$

darstellen, so können wir E als das Maass der Krümmung der gegebenen Curve auf einer der Asymptoten in unendlicher Entfernung betrachten.

Es sei:

$$aw^m+(bv+cu)w^{m-1}+\,.\,.\,+(dv^{m-2}+euv^{m-3}+\,.\,.\,+fu^{m-2})w^2+(gv^{m-1}+\,.\,.\,+hu^{m-2}v)w$$
$$+lv^m+\,.\,.\,+nu^{m-2}v^2+pu^{m-1}v = 0,$$

die Gleichung einer gegebenen Curve m. Classe. Die erste Axe ist eine Asymptote der Curve; denn wenn wir in der vorstehenden Gleichung $w = 0$ setzen, kommt:

$$v(lv^{m-1}+\,.\,.\,+nu^{m-2}v+pu^{m-1}) = 0,$$

und wenn wir $v = \pm 0$ setzen, so ergibt sich:

$$w^2(aw^{m-2}+cuw^{m-3}+\,.\,.\,+fu^{m-2}) = 0.$$

Hiernach ergibt sich nach der 544. Nummer für eine der in Rede stehenden osculirenden Hyperbeln folgende Gleichung:

$$fw^2+hvw+nv^2+(m-1)puv = 0,$$

und mithin:

$$E = \frac{m-1}{2}\,\frac{p}{f}.$$

Um diesen Ausdruck zu construiren, wollen wir die Abstände der $(m-2)$ Tangenten, die derjenigen Asymptote, auf welcher in unendlicher Entfernung die dreipunctige Osculation Statt finden soll, parallel sind, von dieser Asymptote, durch $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{m-2}$; die Abstände der m Tangenten, welche der zweiten Axe parallel sind, und also bei unserer Coordinaten-Annahme auf jener Asymptote senkrecht stehen, von der zweiten Axe, durch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_m$; und endlich die Winkel, welche die $(m-1)$ durch den Anfangspunct gehenden Tangenten, mit der Asymptote bilden, durch $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{m-1}$ bezeichnen, — so finden wir ohne Mühe:

$$\frac{p}{l} = tang\omega_1 \,.\, tang\omega_2 \ldots tang\omega_{m-1},$$

$$\frac{l}{a} = \eta_1 \cdot \eta_2 \ldots \eta_m,$$

$$\frac{f}{a} = \xi_1 \cdot \xi_2 \ldots \xi_{m-2},$$

und endlich:

$$E = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{\eta_1 \cdot \eta_2 \ldots \eta_m}{\xi_1 \cdot \xi_2 \ldots \xi_{m-2}} tang\omega_1 \,.\, tang\omega_2 \ldots tang\omega_{m-1}.$$

Je grösser der Werth von E ist, desto langsamer nähert sich die Curve der in Rede stehenden Asymptote. Wenn wir diese Annäherung noch genauer bestimmen wollen, so müssen wir höhere Ordnungen der Osculation in unendlicher Entfernung betrachten. Wir gelangen hierzu, ohne irgend einer Schwierigkeit zu begegnen, auf dem in der Note zur 605. Nummer eingeschlagenen Wege.

$$\frac{(CD^2-2BDE+FB^2)\sin^2\vartheta}{2(B^2+2BD\cos\vartheta+D^2)^{3/2}};$$

und dieser Ausdruck reducirt sich, indem wir $F=1$ und $D=o$ setzen, auf

$$\frac{\sin^2\vartheta}{2B}. — *)$$

---

*) Die Gleichung irgend einer Curve m. Classe, welche ein Paar parabolischer Zweige hat, ist, nach der Note der 524. Nummer, von folgender Form:

$$(Bv+C)w^{m-1}+(Dv^2+Ev+F)w^{m-2}+\ldots=o.$$

Eine solche Curve berührt, wie die Parabel, eine unendlich weit liegende gerade Linie, die mit einer gegebenen parallel ist; das heisst, wenn man auf jedem der beiden ins Unendliche hin sich erstreckenden Zweige immer weiter fortgeht, so nähert sich die Richtung der entsprechenden Tangenten immer mehr einer bestimmten Richtung und zugleich entfernen sich die Tangenten auf beiden Zweigen immer weiter, bis sie, nach entgegengesetzter Seite ins Unendliche hin weiterrückend, zuletzt als zusammenfallend anzusehen sind.

Wir können die vorstehende Gleichung leicht und zwar nur auf eine einzige Weise in eine andere verwandeln, in welcher das mit w^{m-1} behaftete Glied fehlt. Lassen wir nemlich, indem wir von einem rechtwinkligen Coordinaten-Systeme zu einem rechtwinkligen übergehen, die beiden Axen um einen Winkel φ sich drehen, so geht (552 (D)) jene Gleichung in folgende über:

$$\frac{(B\cos\varphi+C\sin\varphi)v-(B\sin\varphi-C\cos\varphi)u}{(v\sin\varphi+u\cos\varphi)^m}w^{m-1}+\text{etc.}=o,$$

und nimmt also, indem wir:

$$\tang\varphi=\frac{C}{B},$$

setzen, folgende Form an:

$$bvw^{m-1}+(cv^2+duv+2fu^2)w^{m-2}+\ldots+lv^m+\ldots pu^{m-1}v+qu^m=o.$$

Wenn wir in dieser Gleichung $u=o$ setzen, so kommt:

$$v(bw^{m-1}+dvw^{m-2}+\ldots+lv^{m-1})=o,$$

und wenn wir $v=\pm o$ setzen, so ergibt sich:

$$u^2(fw^{m-2}+\ldots+qu^{m-2})=o.$$

Wir sehen hieraus, dass die gegebene Curve m. Classe die unendlich weit entfernte der ersten Axe parallele gerade Linie berührt.

Nach der 544. Nummer erhalten wir für eine, die gegebenen Curve auf der unendlich weit entfernt liegenden geraden Linie, $(v=o,\ u=o)$, dreipunctig osculirende Parabel, folgende Gleichung:

$$(m-1)bvw+dv^2+euv+fu^2=o.$$

Der vierte Theil des Parameters dieser Parabel ist gleich:

$$\frac{1}{m-1}\cdot\frac{f}{b}.$$

Um diesen Ausdruck zu construiren, wollen wir die Abstände derjenigen $(m-1)$ Tangenten, die der zweiten Axe parallel sind, von dieser Axe, durch $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{m-1}$; die Abstände der $(m-2)$, der ersten Axe parallelen Tangente (die in die unendlich weit liegende gerade Linie zusammenfallenden beiden Tangenten nicht mitgerechnet) von dieser Axe, durch $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{m-2}$; und endlich diejenigen Winkel, welche die m durch den Anfangspunct gehenden Tangenten mit der ersten Axe bilden, durch $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_m$ bezeichnen. Alsdann ergibt sich, abgesehen vom Zeichen:

$$\frac{l}{b}=\xi_1\cdot\xi_2\ldots\xi_{m-1},$$

$$\frac{q}{l}=\tang\omega_1\cdot\tang\omega_2\ldots\tang\omega_m,$$

$$\frac{q}{f}=\eta_1\cdot\eta_2\ldots\eta_{m-2},$$

und mithin:

$$\frac{1}{m-1}\cdot\frac{f}{b}=\frac{\xi_1\cdot\xi_2\ldots\xi_{m-1}}{\eta_1\cdot\eta_2\ldots\eta_{m-2}}\cdot\tang\omega_1\cdot\tang\omega_2\ldots\tang\omega_m,$$

608. Wir kommen zu einer, namentlich in Beziehung auf die Annahme des Coordinaten-Systems, allgemeinern Bestimmung der Gleichungen solcher Curven, welche sich berühren und osculiren, wenn wir zu dem Schema der 539. Nummer zurückgehen. Wir wollen uns hier auf den ersten Fall dieses Schema beschränken.

Die allgemeine Gleichung:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0, \qquad (1)$$

stellt, wenn alle in derselben vorkommenden Coefficienten, A und B ausgenommen, ein für alle Mal gegeben sind und zwischen jenen beiden Coefficienten folgende Bedingungs-Gleichung Statt findet:

$$B = aA+b, \qquad (2)$$

solche Curven zweiter Classe dar, welche dieselben vier gegebenen (reellen oder imaginären) geraden Linien berühren. Von diesen vier geraden Linien schneiden sich, im Allgemeinen, zwei im Anfangspuncte der Coordinaten, und ihre Richtung bestimmt sich durch die Gleichung:

$$Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0. \qquad (3)$$

Die beiden übrigen geraden Linien schneiden sich in einem solchen Puncte der ersten Coordinaten-Axe, dessen Abstand vom Anfangspuncte gleich (2a) ist, und ihre Richtung bestimmt sich durch folgende Gleichung (538):

$$(C-4ab)v^2+2(E-2Da)uv+Fu^2 = 0. \qquad (4)$$

Die Coordinaten des Mittelpunctes der durch (1) dargestellten Curve sind:

$$x = \frac{B}{A}, \qquad y = \frac{D}{A}.$$

Den auf diese Weise bestimmten vierten Theil des Parameters einer den parabolischen Zweig der gegebenen Curve in unendlicher Entfernung dreipunctig osculirenden Parabel, können wir als das Maass der Krümmung des parabolischen Zweiges in unendlicher Entfernung betrachten.

Wenn wir statt der dreipunctig osculirenden Parabel eine vierpunctig osculirende betrachten, so erhalten wir für diese denselben Parameter als wir für jene erhalten haben: denn die beiden Parabeln haben nothwendig auch unter sich in unendlicher Entfernung einen dreipunctigen Contact. Die vierpunctig osculirende Parabel unterscheidet sich von den andern nur dadurch, dass sie eine bestimmte gerade Linie zu ihrer Axe hat, und wir erhalten eine solche Parabel, wenn wir eine dreipunctig osculirende beliebig so verrücken, dass ihre Axe, während sie parallel mit sich selbst bleibt, mit jener bestimmten geraden Linie, die wir die Axe des parabolischen Zweiges nennen können, zusammenfällt. Es gibt unendlich viele in unendlicher Entfernung vierpunctig osculirende Parabeln, unter denselben befindet sich eine einzige, welche den parabolischen Zweig in unendlicher Entfernung fünfpunctig osculirt; und die sich durch die Lage ihres Brennpunctes auf der gemeinschaftlichen Axe bestimmen lässt. Durch diese Parabel können wir den Lauf des parabolischen Zweiges der gegebenen Curve auch noch in geringerer Entfernung annäherungsweise darstellen.

Wir erhalten die eben bezeichneten verschiedenartig osculirenden Parabeln nach demselben Verfahren als in der Note zur 605. Nummer. Um ein einzelnes Beispiel zu geben, wollen wir folgende Gleichung:

$$cuw^2+(dv^2+euv+fu^2)w+gv^3+huv^2+iu^2v+ku^3 = 0,$$

zu Grunde legen, welche die allgemeine Gleichung aller Curven dritter Classe ist, die einen parabolischen Zweig haben, wenn wir die zweite Coordinaten-Axe (ich nehme hier die zweite, wo ich bisher die erste Coordinaten-Axe genommen habe) parallel mit der Axe des parabolischen Zweiges annehmen. Alsdann brauchen wir, um die Gleichung derjenigen Parabel zu erhalten, welche die gegebene in unendlicher Entfernung fünfpunctig osculirt, wie man leicht sieht, in der Gleichung (16), in der Note zur 605. Nummer, bloss w mit u, und dann c mit f und d mit h gegenseitig zu vertauschen. Auf diese Weise kommt:

$$(fd^3-hcd^2+cegd-c^2g^2)u^2+2d^2(de+cg)uv+3d^4v^2+2cd^3uw = 0. -$$

Wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen und der Bedingungs-Gleichung (2) die Coefficienten A und B eliminiren, so kommt:

$$D(x-a) = by. \qquad (5)$$

Die Mittelpuncte aller durch die allgemeine Gleichung (1) darstellbaren Curven liegen also auf der durch die vorstehende Gleichung (5) dargestellten geraden Linie. Diese gerade Linie ist im Allgemeinen der zweiten Axe parallel, wenn $b = 0$. Sie geht durch die Mitte der zur ersten Axe genommenen Diagonale derjenigen vierseitigen Figur, deren vier Seiten von allen in Rede stehenden Curven berührt werden. Da wir auf gleiche Weise jede der drei Diagonalen dieser vierseitigen Figur zur ersten Coordinaten-Axe nehmen können, so sieht man sogleich, dass die gerade Linie (5) durch die Mitten aller drei Diagonalen geht, und hiernach sich leicht construiren lässt.

Wenn wir besondere Voraussetzungen über die vier gegebenen Coefficienten C, D, E und F machen, so unterwerfen wir dadurch die vier, ebenfalls als gegeben zu betrachtenden, geraden Linien, von welchen alle in Rede stehenden Curven berührt werden, gewissen gegenseitigen Beziehungen. Hierüber wollen wir beispielsweise in ein ausführlicheres Detail eingehen.

1) Wenn wir

$$C = 0$$

setzen, so zeigt die Gleichung (3), dass alsdann eine der gegebenen geraden Linien mit der zweiten Axe zusammenfällt.

Wenn zugleich:

$$C = 0, \qquad b = 0,$$

so zeigt die Gleichung (4), dass alsdann eine zweite der gegebenen geraden Linien mit der zweiten Axe parallel ist. Alle Curven sind also einem Parallel-Trapez eingeschrieben, von dessen parallelen Seiten eine in die zweite Axe, und dessen eine Diagonale in die erste Axe fällt.

2) Wenn wir

$$D = 0$$

nehmen, so enthält, was die Gleichung (5) zeigt, die erste Axe die Mittelpuncte aller Curven. Zwei Diagonalen der von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten vierseitigen Figur werden alsdann nothwendig von der dritten Diagonale halbirt. Diese dritte Diagonale ist die erste Coordinaten-Axe.

Wenn zugleich

$$D = 0, \qquad b = 0,$$

so erscheint der Ausdruck für die Ordinate des Durchschnittspunctes der geraden Linie (5) mit der zweiten Axe, nemlich der Ausdruck:

$$\left(-\frac{Da}{b}\right)$$

unter der unbestimmten, nicht reducirbaren, Form $\frac{0}{0}$. Der Grund hiervon ergibt sich sogleich, wenn wir zu den Ausdrücken für y und x, aus welchen wir die Gleichung (5) hergeleitet haben, zurückgehen, wonach wir sogleich $y = 0$, und $x = a$ erhalten. Alle Curven haben also denselben Mittelpunct, und dieser liegt auf der ersten Coordinaten-Axe. Die Richtung der zweiten Axe kann jede beliebige sein. Die geometrische Bedeutung der beiden letzten Bedingungs-Gleichungen ergibt sich sogleich aus der Bemerkung, dass alsdann die beiden Gleichungen (3) und (4) identisch

werden. Alle Curven sind alsdann demselben Parallogramm eingeschrieben, ein Winkelpunct desselben ist Anfangspunct der Coordinaten und die durch denselben gehende Diagonale erste Coordinaten-Axe.

3) Wenn wir

$$E = o$$

setzen, so bilden, was die Gleichung (3) zeigt, die beiden gegebenen durch den Anfangspunct gehenden geraden Linien und die beiden Coordinaten-Axen ein System von vier Harmonicalen. Wenn wir zugleich noch eine Bestimmung über b hinzufügen, so kann die allen Curven (1) umschriebene vierseitige Figur nicht mehr jede beliebige sein.

4) Wenn wir zugleich

$$C = o, \qquad D = o$$

setzen, so bleibt Alles wie in dem unter 2) betrachteten Falle, nur dass die zweite Axe, deren Richtung beliebig war, nun mit einer der beiden durch den Anfangspunct gehenden geraden Linien zusammenfällt.

5) Wenn zugleich

$$D = o, \qquad E = o,$$

so berühren alle Curven die vier Seiten einer vollständigen vierseitigen Figur, deren zwei Diagonalen parallel sind und also von der dritten Diagonale halbirt werden. Die erste Axe fällt, wie im 2. Falle, mit der letztgenannten Diagonale zusammen. Die zweite Axe ist parallel mit jenen beiden parallelen Diagonalen. Wenn überdiess auch noch

$$b = o,$$

so berühren alle Curven die Seiten eines Parallelogrammes, dessen ein Winkelpunct Anfangspunct des Coordinaten ist. Die durch diesen Punct gehende Diagonale ist die erste Coordinaten-Axe, parallel mit der andern Diagonale ist die zweite Axe.

6) Wenn zugleich

$$C = o, \qquad E = o,$$

so zeigt die Gleichung (3), dass alsdann zwei der gegebenen geraden Linien in der zweiten Axe zusammenfallen. Alle Curven berühren die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks und zwar die eine dieser Seiten, welche zur zweiten Axe genommen wird, in demselben Puncte, dem Anfangspuncte der Coordinaten. Die erste Axe geht zugleich durch den dieser Seite gegenüberliegenden Winkelpunct.

Wenn überdiess

$$b = o,$$

so sehen wir aus der Gleichung (4), dass alsdann eine der beiden gegebenen, durch den Punct (o, 2a) gehenden, geraden Linien mit der zweiten Axe parallel ist, und also alle Curven drei gegebene gerade Linien, von welchen zwei parallel sind, und zwar eine dieser letztern in demselben Puncte, berühren.

7) Wenn ferner folgende drei Bedingungs-Gleichungen:

$$C = o, \qquad D = o, \qquad E = o$$

zugleich befriedigt werden, so bleibt Alles wie in dem vorigen Falle, nur dass überdiess die beiden durch den Punct (o, 2a) gehenden geraden Linien und die beiden Coordinaten-Axen die Richtungen von vier Harmonicalen haben. Alle Curven sind demselben Dreieck eingeschrieben und berühren die eine Seite desselben in einem festen Puncte, in ihrer Mitte.

Wenn überdiess auch noch

$$b = o,$$

so reduciren sich die Gleichungen (3) und (4) beide auf:

$$u^2 = o.$$

Alle Curven berühren also zwei gegebene Parallellinien in denselben beiden Puncten. Die eine dieser beiden Parallellinien ist zur zweiten Axe genommen, die erste Axe geht durch die beiden Berührungspuncte.

8) Wenn wir

$$F = o$$

setzen, so zeigen die beiden Gleichungen (3) und (4), dass alsdann zwei der vier gegebenen geraden Linien in der ersten Axe zusammenfallen, und also alle Curven demselben Dreiecke eingeschrieben sind, und die eine Seite dieses Dreiecks, die zur ersten Axe genommen worden ist, in demselben Puncte berühren. Um diesen Punct zu bestimmen, brauchen wir nur den Pol der ersten Axe zu suchen. Für die Gleichung dieses Poles ergibt sich sogleich, nach der 549. Nummer, wenn wir die Gleichung (1) in Beziehung auf u differentiiren:

$$Dw+Ev = o,$$

und der Abstand desselben von dem zum Anfangspuncte genommenen Winkelpuncte des Dreiecks ist also gleich

$$\left(\frac{E}{D}\right). \qquad (6)$$

9) Wenn zugleich

$$C = o, \qquad F = o,$$

so bleibt Alles wie im vorigen Falle, nur dass eine Seite des Dreiecks mit der zweiten Axe zusammenfällt.

Die Gleichung (5) ist noch immer die Gleichung einer geraden Linie, des geometrischen Ortes, für die Mittelpuncte aller in Rede stehenden Curven. Nach einer einfachen Gränz-Betrachtung in der Construction ist aus dem Frühern klar, dass diese gerade Linie durch die Mitte derjenigen Seite des allen Curven umschriebenen Dreiecks, welche in demselben Puncte berührt wird, und die Mitte der diesen Berührungspunct mit dem gegenüberliegenden Winkelpuncte des Dreiecks verbindenden geraden Linie, geht. Wir finden diess auch unmittelbar bestätigt, denn die Gleichung (5) wird befriedigt, einmal, wenn wir zugleich

$$x = a, \qquad y = o$$

setzen, das andere Mal, wenn wir zugleich

$$x = \frac{E}{2D}, \qquad y = \frac{E-2Da}{2b}$$

setzen.

Wenn wir über b eine bestimmte Voraussetzung machen, so kann, weil die Coordinaten-Axen beide vollkommen bestimmt sind, das allen Curven umschriebene Dreieck nicht mehr jedes beliebige sein. Wenn wir insbesondere

$$b = o$$

setzen, so folgt aus (4), dass alsdann alle Curven nicht eigentlich mehr demselben Dreiecke eingeschrieben sind, sondern dass dieselben die beiden Coordinaten-Axen, und zwar die erste in demselben Puncte, und überdiess eine der zweiten Axe parallele gerade Linie berühren.

10) Wenn zugleich

$$D = 0, \qquad F = 0,$$

so haben alle Curven die erste Axe zu einer ihrer Asymptoten (461) und berühren überdiess irgend zwei gerade Linien, von welchen eine durch den Anfangspunct geht. Es folgt diess auch aus dem Ausdrucke (6), der, wenn wir $D = 0$ setzen, unendlich wird.

Wenn ausserdem noch

$$b = 0,$$

so reduciren sich die Gleichungen (3) und (4) beide zugleich auf:

$$Cv^2 + 2Euv = 0,$$

und alle in Rede stehenden Curven, mit einer gemeinschaftlichen Asymptote, berühren also zwei gegebene parallele gerade Linien.

11) Wenn

$$C = 0, \qquad D = 0, \qquad F = 0,$$

so bleibt Alles gerade wie in dem vorigen Falle, nur dass eine gemeinschaftliche Tangente aller Curven mit der zweiten Axe zusammenfällt.

12) Wenn wir

$$E = 0, \qquad F = 0, \qquad (7)$$

setzen, so zeigen die beiden Gleichungen (3) und (4), dass alsdann drei gemeinschaftliche Tangenten in der ersten Axe zusammenfallen, dass mithin alle Curven auf dieser Axe sich dreipunctig osculiren und zwar, was unter Anderm auch der Ausdruck (6) zeigt, im Anfangspuncte der Coordinaten. Ausserdem berühren alle Curven eine gegebene gerade Linie, welche von der ersten Axe ein Segment (2a) abschneidet und deren Richtung durch die Gleichung

$$\frac{v}{u} = \frac{2Da}{C-4ab}$$

gegeben ist. Die zweite Coordinaten-Axe ist dieser gegebenen geraden Linie parallel, wenn

$$C = 4ab,$$

sie ist derjenigen geraden Linie, welche die Mittelpuncte aller Curven enthält, parallel, wenn

$$b = 0.$$

Wenn neben den beiden vorstehenden Bedingungen (7) auch noch folgende erfüllt wird:

$$a = 0,$$

wonach sich die Gleichung (2) auf

$$B = b$$

reducirt, und also A jeden beliebigen Werth haben kann, B aber gegeben ist, so führen die Gleichungen (3) und (4) beide auf

$$v^2 = 0.$$

Es fallen also alle vier gemeinschaftlichen Tangenten in die erste Axe, alle Curven haben auf dieser Axe im Anfangspuncte einen vierpunctigen Contact (581). Wenn

$$B = b = 0,$$

so ist die zweite Coordinaten-Axe derjenigen geraden Linie, welche die Mittelpuncte aller Curven enthält, parallel.

13) Wenn wir

$$F = 0, \qquad E = 2Da$$

setzen, so zeigen die beiden Gleichungen (3) und (4), dass alsdann alle Curven sich

dreipunctig auf der ersten Axe in einer Entfernung vom Anfangspuncte, die gleich (2a) ist, osculiren, und eine solche gerade Linie berühren, die durch den Anfangspunct geht, und deren Richtung durch die Gleichung

$$Cv+2Eu = o$$

gegeben ist. Wenn also zugleich

$$C = o,$$

so wird die zweite Coordinaten-Axe berührt.

Es können auch die vier gemeinschaftlichen Tangenten der durch die allgemeine Gleichung dargestellten Curven, alle oder zum Theil, imaginär werden. Hierhin gehören insbesondere die folgenden Fälle.

14) Wenn wir, indem ϑ den Coordinaten-Winkel bezeichnet,

$$F = C, \qquad E = C\cos\vartheta \qquad (8)$$

setzen, so ist der Anfangspunct der Coordinaten gemeinschaftlicher Brennpunct aller Curven. Es berühren dieselben überdiess zwei auf der ersten Coordinaten-Axe sich schneidende Tangenten. Wenn

$$F = C-4ab, \qquad E-2Da = F\cos\vartheta, \qquad (9)$$

so berühren alle Curven zwei durch den Anfangspunct gehende gerade Linien und haben einen gemeinschaftlichen Brennpunct, welcher auf der ersten Coordinaten-Axe liegt. Wenn wir $\cos\vartheta = o$ setzen, so ist das Coordinaten-System ein rechtwinkliges; wenn wir $b = o$ setzen, so ist die zweite Axe derjenigen geraden Linie parallel, welche der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller Curven ist. In dem zuletzt betrachteten Falle, kommt, indem wir $b = o$ setzen:

$$C = F,$$

wonach wir die Richtung der letztgenannten geraden Linie leicht bestimmen können.

Wenn die Gleichungen (8) und (9) alle zugleich befriedigt werden, oder wenn zugleich:

$$F = C, \qquad E = C\cos\vartheta, \qquad D = o, \qquad b = o,$$

so erhalten wir solche Curven, welche zwei gegebene Puncte, die auf der ersten Axe liegen und von denen der eine mit dem Anfangspuncte zuzammenfällt, zu ihren Brennpuncten haben.

§. 8.

Verbindung der Gleichungen irgend zweier Oerter zweiter Classe zu der Gleichung eines Systems von zwei Puncten.

609. Wenn wir zwischen den beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Dw+2Ev+F^2 &= o, \\ A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'w+2E'v+F' &= o, \end{aligned} \qquad (1)$$

welche irgend zwei Oerter zweiter Classe darstellen, nach einander v und w eliminiren, so kommen wir zu zwei Gleichungen des vierten Grades in Beziehung auf die übrigbleibenden veränderlichen Grössen. Die Wurzeln dieser beiden Gleichungen gehören paarweise zusammen und bestimmen vier gerade Linien: die gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Oerter zweiter Classe. Es können 1. diese gemeinschaftlichen Tangenten alle vier reell, 2. zwei derselben reell und die beiden übrigen imaginär, 3. alle vier imaginär

sein. Wir können den Coordinaten-Werthen dieser vier gemeinschaftlichen Tangenten allgemein folgende Form geben:

$$\text{I.}\ \begin{cases} w' = m+n, \\ v' = p+q; \end{cases} \qquad \text{II.}\ \begin{cases} w'' = m-n, \\ v'' = p-q; \end{cases}$$

$$\text{III.}\ \begin{cases} w''' = m'+n', \\ v''' = p'+q'; \end{cases} \qquad \text{IV.}\ \begin{cases} w'''' = m'-n', \\ v'''' = p'-q'. \end{cases}$$

In dem ersten der oben bezeichneten drei Fälle müssen wir unter n, q, n' und q' reelle Grössen verstehen, in dem zweiten Falle (etwa) unter n und q reelle, unter n' und q' imaginäre Grössen von der Form $b\sqrt{-1}$, und im dritten Falle endlich unter n, q, n' und q' vier imaginäre Grössen von der eben bezeichneten Form. m, p, m' und p' sind immer als reell zu betrachten.

Für den Durchschnittspunct der beiden ersten gemeinschaftlichen Tangenten (w', v') und (w'', v'') hat man folgende Gleichung:

$$w-w' = \frac{w''-w'}{v''-v'}(v-v'),$$

und hieraus ergibt sich, wenn wir substituiren:

$$qw-nv+(np-mq) = 0. \qquad (2)$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir, indem wir accentuiren:

$$q'w-n'v+(n'p'-m'q') = 0, \qquad (3)$$

für die Gleichung des Durchschnittspunctes der beiden übrigen Tangenten (w''', v''') und (w'''', v'''').

Die beiden Gleichungen (2) und (3) bleiben, wie man sogleich sieht, in allen drei, eben bezeichneten, Fällen reell: d i e v i e r (r e e l l e n o d e r i m a g i n ä r e n) g e m e i n s c h a f t l i c h e n T a n g e n t e n s c h n e i d e n s i c h a l s o i m m e r i n w e n i g s t e n s z w e i r e e l l e n P u n c t e n.

Die Coordinaten der durch die beiden Puncte (2) und (3) gehenden geraden Linie sind:

$$w = \frac{(n'p'-m'q')n-(np-mq)n'}{nq'-n'q},$$
$$v = \frac{(n'p'-m'q')q-(np-mq)q'}{nq'-n'q}, \qquad (4)$$

Wenn wir auf demselben Wege, als vorhin, die Gleichung des Durchschnittspunctes der beiden Tangenten (w', v') und (w''', v''') suchen, so finden wir:

$$[p'-p+q'-q]w-[m'-m+n'-n]v+[(m'+n')(p+q)-(m+n)(p'+q')] = 0, \qquad (5)$$

und hieraus ergibt sich, indem wir bloss das Zeichen von n, q, n' und q' ändern, für den Durchschnittspunct der beiden Tangenten (w'', v'') und (w'''', v'''') folgende Gleichung:

$$[p'-p-(q'-q)]w-[m'-m-(n'-n)]v+[(m'-n')(p-q)-(m-n)(p'-q')] = 0. \qquad (6)$$

Die beiden Puncte (5) und (6) sind nur in dem Falle, dass die beiden Curven (1) vier reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, reell. Durch Zusammenstellung der beiden letzten Gleichungen erhalten wir für die, durch diese beiden Puncte gehende, gerade Linie $(w^{\cdot}, v^{\cdot})$ folgende Coordinaten-Werthe:

$$w^{\cdot} = \frac{(m'^2-n'^2)q+(m^2-n^2)q'-(mm'-nn')(q'+q)-(m'n-mn')(p'-p)}{(n'-n)(p'-p)-(m'-m)(q'-q)},$$
$$v^{\cdot} = \frac{(p'^2-q'^2)n+(p^2-q^2)n'-(pp'-qq')(n'+n)-(p'q-pq')(m'-m)}{(n'-n)(p'-p)-(m'-m)(q'-q)}, \qquad (7)$$

Um die Gleichungen der beiden Durchschnittspuncte der gemeinschaftlichen Tangenten (w', v') und (w'''', v''''), (w'', v'') und (w''', v'''), und dann ferner die Coordinaten-Werthe derjenigen geraden Linie $(w^{\cdot\cdot}, v^{\cdot\cdot})$, welche durch diese beiden Durchschnittspuncte geht, zu erhalten, brauchen wir offenbar nur die Vorzeichen von n' und q' in den Gleichungen (5), (6) und (7) zu ändern. Auf diese Weise ergibt sich:

$$[p'-p-(q'+q)]w-[m'-m-(n'+n)]v+[(m'-n')(p+q)-(m-n)(p'-q')] = 0, \quad (8)$$

$$[p'-p+(q'+q)]w-[m'-m+(n'+n)]v+[(m'+n')(p-q)-(m-n)(p'+q')] = 0; \quad (9)$$

und:

$$w^{\cdot\cdot} = -\frac{(m'^2-n'^2)q-(m^2-n^2)q'-(mm'+nn')(q-q')-(m'n+mn')(p'-p)}{(n'+n)(p'-p)-(m'-m)(q'+q)},$$

$$v^{\cdot\cdot} = \frac{(p'^2-q'^2)n-(p^2-q^2)n'-(pp'+qq')(n-n')-(p'q-pq')(m'-m)}{(n'+n)(p'-p)-(m'-m((q'+q)}. \quad (10)$$

Die Werthe von $w^{\cdot}$ und $v^{\cdot}$, $w^{\cdot\cdot}$ und $v^{\cdot\cdot}$ ((7) und (10)) sind reell, nicht nur in dem Falle, dass alle vier gemeinschaftliche Tangenten der beiden Curven (1) reell sind, sondern auch, wie man leicht sieht, in dem Falle, dass dieselben alle vier imaginär sind. In dem erstern Falle bilden die sechs Puncte (2) und (3), (5) und (6), (8) und (9) die sechs Winkelpuncte einer vollständigen vierseitigen Figur, und bestimmen, paarweise genommen, die drei Diagonalen derselben. In dem letztern Falle *bleiben diese drei Diagonalen reell, während die beiden Puncten-Paare* (5) und (6), (8) und (9) *imaginär werden.*

Wenn die beiden gegebenen Oerter zweiter Classe (1) zwei reelle und zwei imaginäre gemeinschaftliche Tangenten haben, so sind nicht nur vier Winkelpuncte der ihnen beiden umschriebenen vierseitigen Figur, sondern auch zwei Diagonalen derselben imaginär. Diess erhellet sogleich aus dem Anblick der Gleichungen (7) und (10). *Aber der Durchschnitt dieser beiden imaginären Diagonalen ist ein reeller Punct.* Um uns hiervon auf directem Wege zu überzeugen, brauchen wir nur die Gleichung dieses Durchschnittspunctes:

$$w-w^{\cdot} = \frac{w^{\cdot\cdot}-w^{\cdot}}{v^{\cdot\cdot}-v^{\cdot}}(v-v^{\cdot}),$$

zu entwickeln, indem wir für $w^{\cdot\cdot}$, $w^{\cdot}$, $v^{\cdot\cdot}$ und $v^{\cdot}$ die oben gefundenen Werthe substituiren. Aber zu demselben Resultate führt unmittelbar die allgemeine Theorie der Gleichungen. Denn, in derjenigen Gleichung des dritten Grades in Beziehung auf y und x, welche das System der drei Diagonalen der den beiden gegebenen Curven zweiter Classe umschriebenen vierseitigen Figur darstellt, sind nothwendig alle Coefficienten symmetrische Functionen, sowol von w', w'', w''' und w'''', als von v', v'', v''' und v''''. Es folgt diess unmittelbar aus der Art, wie diese Gleichung gebildet wird. Und somit sind alle Coefficienten reell und rational. Eine der drei durch diese Gleichung des dritten Grades dargestellten Diagonalen ist immer reell. Indem wir denjenigen Factor, der auf diese reelle Tangente sich bezieht, fortlassen, reducirt sich die in Rede stehende Gleichung auf den zweiten Grad, und stellt, da ihre Coefficienten nothwendig reell bleiben, entweder zwei reelle oder zwei solche imaginäre gerade Linien dar, die sich in einem reellen Puncte schneiden. (234)

Jede der beiden Diagonalen, welche ein imaginäres Puncten-Paar (5) und (6) oder (8) und (9) verbindet, lässt sich durch eine Gleichung des zweiten Grades darstellen. Um die Gleichungen dieser beiden Diagonalen zu erhalten, brauchen wir nur die ersten Theile der Gleichungen (5) und (6), (8) und (9) mit einander zu multipliciren und dann

das Product gleich Null zu setzen. Auf diese Weise kommt:

$$\begin{aligned}&[(p'-p)^2 \mp (q' \mp q)^2]w^2\\ &-2[(m'-m)(p'-p)-(n' \mp n)(q' \mp q)]vw\\ &+[(m'-m)^2 \mp (n' \mp n)^2]v^2\\ &+2\big((p'-p)[(m'p-mp') \pm (n'q-nq')] \pm (q' \mp q)[(m'q \mp mq') \pm (n'p \mp np')]\big)w\\ &-2\big((m'-m)[(m'p-mp') \pm (n'q-nq')] \pm (n' \mp n)[(m'q \mp mq') \pm (n'p \mp np')]\big)v\\ &+[(m'^2-n'^2)(p^2-q^2)+(m^2-n^2)(p'^2-q'^2)-(m'm \mp n'n)(pp' \mp qq') \mp (n'm \mp nm')(p'q \mp pq')] = 0. \quad (10)\end{aligned}$$

Je nachdem wir die obern oder untern Zeichen nehmen, stellt diese Gleichung die gerade Linie ($w^{\cdot}$, $v^{\cdot}$) oder die gerade Linie ($w^{\cdot\cdot}$, $v^{\cdot\cdot}$) dar. Darin, dass alle Coefficienten in dieser Gleichung, in dem Falle, dass die beiden gegebenen Curven keine reellen gemeinschaftlichen Tangenten haben, reell sind, liegt ein neuer Beweis, dass alsdann auch jene beiden geraden Linien reell sind.

Wenn wir die ersten Theile der vier Gleichungen (5), (6), (8) und (9) in einander multipliciren und das Product gleich Null setzen, so kommen wir zu einer Gleichung des vierten Grades in Beziehung auf w und v, und diese Gleichung wird einen, in allen Fällen reellen, Punct darstellen.

Indem wir zusammenfassen, kommen wir also zu folgendem Satze:

Je nachdem zwei Curven zweiter Classe

1) *vier reelle,*
2) *vier imaginäre oder endlich*
3) *zwei reelle und zwei imaginäre*

gemeinschaftliche Tangenten haben, sind

1) *die Winkelpuncte der, beiden Curven umschriebenen, vollständigen vierseitigen Figur alle sechs reell, die drei Diagonalen dieser Figur, und die drei Durchschnittspuncte je zweier derselben reell;*
2) *zwei Winkelpuncte reell und vier imaginär, die drei Diagonalen und mithin auch die drei Durchschnittspuncte je zweier derselben reell;*
3) *zwei Winkelpuncte reell, die vier übrigen imaginär, eine Diagonale reell, die beiden übrigen imaginär; der Durchschnittspunct dieser beiden imaginären Diagonalen reell, die beiden übrigen Durchschnittspuncte imaginär.*

610. Nach der vorigen Nummer gibt es also in dem Falle, dass die gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebener Curven zweiter Classe, alle oder zum Theil, imaginär werden, immer zwei reelle Puncte, deren Coordinaten auf dieselbe Weise durch die Coefficienten in den Gleichungen der beiden gegebenen Curven ausgedrückt werden, als die Coordinaten der Durchschnittspuncte der, paarweise genommenen, gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Curven, in dem Falle, dass diese Tangenten reell sind. Jene beiden reellen Puncte stehen also zu den beiden gegebenen Curven gerade in derselben Beziehung als diese Durchschnittspuncte reeller gemeinschaftlicher Tangenten zu den bezüglichen Curven; und alle Eigenschaften dieser letztgenannten Puncte, bei denen die Realität der durch dieselben gehenden Tangenten nicht in Betracht kommt, gelten unmittelbar auch für jene beiden reellen Puncte. Wir müssen hier ein allgemeines Wort einführen, um den reellen Durchschnittspunct irgend zweier, reeller oder imaginärer, gemeinschaftlicher Tangenten zu bezeichnen. Da sich mir indess sogleich kein characteristisches Wort darbietet, so übersetze ich den von H. PONCELET gebrauchten Ausdruck „*centre*

d' homologie", indem ich solche Puncte: „homologe Puncte in Beziehung auf die beiden gegebenen Curven zweiter Classe", nenne.

Nur in dem Falle, dass die beiden gegebenen Curven vier reelle gemeinschaftliche Tangenten haben, gibt es sechs, sich paarweise zusammenordnender, homologer Puncte: drei Systeme von zwei reellen homologen Puncten. In den übrigen Fällen gibt es nur ein einziges System solcher Puncte. Es existiren aber, nach dem Vorstehenden, auch in dem Falle, dass alle vier gemeinschaftliche Tangenten imaginär sind, reelle gerade Linien, welche, analytisch, auf dieselbe Weise durch die Coefficienten in den Gleichungen der bezüglichen Curven bestimmt sind, und also auch dieselben Eigenschaften geniessen, als, in dem Falle reeller gemeinschaftlicher Tangenten, diejenigen geraden Linien, welche zwei zusammengehörige reelle homologe Puncte verbinden. Für solche gerade Linien bedürfen wir ein neues, allgemeines, Wort; ich nenne dieselben „homologe gerade Linien, in Beziehung auf die beiden gegebenen Curven zweiter Classe". *)

Wir können auch weiter gehen und die Durchschnittspuncte je zweier der drei homologen geraden Linien zweier Curven zweiter Classe „homologe Puncte zweiter Ordnung" nennen. Es gibt für je zwei Curven zweiter Classe immer einen reellen homologen Punct zweiter Ordnung; das heisst, einen Punct, der alle Eigenschaften solcher Puncte besitzt, in welchen sich, für den Fall reeller gemeinschaftlicher Tangenten, zwei Diagonalen der, den gegebenen Curven beiden zugleich umschriebenen, vierseitigen Figur schneiden. **)

---

*) Nach H. PONCELET „*axes d'homologie*". Vergl. *Prop. proj.* 298.

**) Die den Entwicklungen der 609. Nummer analogen Entwicklungen im dritten Abschnitte des ersten Bandes, können wir noch dahin vervollständigen, dass, in dem Falle, wo zwei Curven zweiter Ordnung (und zweiter Classe) sich in zwei reellen und zwei imaginären Puncten schneiden, und man zwei Paare imaginärer gemeinschaftlicher Chorden erhält, auch die beiden Durchschnittspuncte der zusammengehörigen imaginären Chorden imaginär sind, aber diejenige gerade Linie, welche diese beiden imaginären Durchschnittspuncte enthält, reell ist. —

Man sieht leicht ein, wie die Betrachtungsweisen der beiden letzten Nummern des Textes sich ins Uebergränzte ausdehnen lassen, wenn wir, statt Curven zweiter Classe, Curven von beliebigen Classen betrachten. Ich beschränke mich hier darauf, nur den ersten Schritt zu diesem Ziele zu thun. Es seien:

$$\varphi(w, v) = o, \qquad \psi(w, v) = o,$$

irgend zwei Gleichungen des m. und n. Grades, in Beziehung auf die beiden veränderlichen Grössen w und v. Wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen nach einander v und w eliminiren, so erhalten wir zwei Gleichungen, die, wie bekannt, in Beziehung auf die jedesmalig übrigbleibende veränderliche Grösse, im Allgemeinen zum mn. Grade ansteigen. Wenn m oder n eine gerade Zahl ist, oder wenn m und n beide gerade Zahlen sind, so können alle gemeinschaftlichen Tangenten der beiden bezüglichen Curven der m. und n. Classe imaginär sein. Wenn m und n beide ungerade Zahlen sind, so haben die beiden Curven nothwendig eine reelle gemeinschaftliche Tangente. Alle übrigen gemeinschaftlichen Tangenten können imaginär sein. Die imaginären gemeinschaftlichen Tangenten ordnen sich indess paarweise so zusammen, dass ein solches Paar Coordinaten-Werthe von folgender Form hat:

$$\begin{cases} w = m+n\sqrt{-1}, \\ v = p+q\sqrt{-1}; \end{cases} \qquad \begin{cases} w = m-n\sqrt{-1}, \\ v = p-q\sqrt{-1}; \end{cases}$$

und also ist, nach der Schlussweise der 609. Nummer, der Durchschnittspunct der beiden imaginären Tangenten eines solchen Paares ein reeller Punct, der alle Eigenschaften eines Durchschnittspunctes reeller gemeinschaftlicher Tangenten hat. Hiernach ergibt sich,

611. Wenn die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} A w^2+2B\, vw+C\, v^2+2D\, uw+2E\, uv+F u^2 &= 0, \\ A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+F'u^2 &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

irgend zwei gegebene geometrische Oerter zweiter Classe darstellen, so erhalten wir die allgemeine Gleichung aller Oerter derselben Classe, welche mit den beiden gegebenen dieselben vier (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten haben, wenn wir die beiden vorstehenden Gleichungen addiren, nachdem wir eine derselben, etwa die zweite, mit einem unbestimmten Coefficienten μ multiplicirt haben. Auf diese Weise kommt:

$$(A+\mu A')w^2+2(B+\mu B')vw+(C+\mu C')v^2+2(D+\mu D')uw+2(E+\mu E')uv+(F+\mu F')u^2 = 0.$$

Wenn diese Gleichung ein System von zwei reellen oder imaginären Puncten darstellen soll, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichung (458):

$$[(A+\mu A')(E+\mu E')-(B+\mu B')(D+\mu D')]^2-[(A+\mu A')(C+\mu C')-(B+\mu B')^2]$$
$$[(A+\mu A')(F+\mu F')-(D+\mu D')^2] = 0, \qquad (2)$$

die, wenn wir entwickeln, in folgende übergeht:

$$[A'E'^2-2B'D'E'-A'C'F'+C'D'^2+B'F'^2]\mu^3$$
$$+[AE'^2+2A'EE'-2BD'E'-2B'DE'-2B'D'E+CD'^2+2C'DD'+B'^2F+2BB'F'-A'C'F-A'CF'-AC'F']\mu^2$$
$$+[A'E^2+2AEE'-2BDE'-2BD'E-2B'DE+C'D^2+2CDD'+B^2F'+2BB'F-ACF'-AC'F-A'CF]\mu$$
$$+[AE^2-2BDE-ACF+CD^2+BF^2] = 0. \qquad (3)$$

Wir können also durch algebraische Verbindung der beiden gegebenen Gleichungen (1), im Allgemeinen, bei einer d r e i f a c h e n Bestimmung des unbestimmten Coefficienten μ, zu der Gleichung eines Systemes zweier reeller oder imaginärer Puncte, d. h. zu

---

indem wir die Benennung der 610. Nummer auch auf den allgemeinen Fall ausdehnen, folgender Satz:

Zwei Curven m. und n. Classe haben, im Allgemeinen, je nachdem mn eine gerade oder ungerade Zahl ist, wenigstens $\frac{mn}{2}$ *oder* $\frac{mn-1}{2}$ *reelle homologe Puncte.*

Ohne in nähere Erörterungen einzugehen, können wir neben den vorstehenden Satz sogleich folgenden stellen:

Zwei Curven m. und n. Ordnung haben, im Allgemeinen, je nachdem mn eine gerade oder ungerade Zahl ist, wenigstens $\frac{mn}{2}$ *oder* $\frac{mn-1}{2}$ *reelle gerade Linien zu gemeinschaftlichen Chorden.*

Es ist klar, dass die vorstehenden Resultate, auf die, wie mir scheint, die neuen Behandlungsweisen der Geometrie sich hauptsächlich stützen, anders nichts sind, als d i e u n m i t t e l b a r s t e g e o m e t r i s c h e I n t e r p r e t a t i o n d e s j e n i g e n S a t z e s, w e l c h e r d i e G r u n d l a g e d e r T h e o r i e d e r a l g e b r a i s c h e n G l e i c h u n g e n b i l d e t, des Satzes nemlich, „dass jede ganze algebraische Function einer veränderlichen Grösse von einem beliebigen Grade sich in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades zerlegen lässt." Ich zweifle, ob man auf rein geometrischem Wege zu jenen allgemeinen Resultaten gelangen kann: wenn man es könnte, so erhielte man einen geometrischen Beweis von dem eben angeführten Satze, über die Zerlegung algebraischer Functionen. Denn jede algebraische Function, etwa F(x), können wir als das Resultat der Elimination von y zwischen den Gleichungen algebraischer Curven ansehen. Wir brauchen zu diesem Ende zum Beispiel nur folgende beide Gleichungen:

$$y = F(x)+f(x),$$
$$y = f(x)F-(x),$$

in denen wir irgend eine beliebige algebraische Function von x durch f(x) bezeichnen, für die Gleichungen der beiden Curven zu nehmen.

der Gleichung eines Systemes zweier homologer Puncte oder einer homologen geraden Linie der beiden Curven (1). Die Gleichung (3) reducirt sich nur dann auf den zweiten Grad, wenn einer von folgenden beiden Ausdrücken:

$$A'E'^2-2B'D'E'+C'D'^2+B'F'^2-A'C'F',$$
$$AE^2-2BDE+CD^2+BF^2-ACF,$$

verschwindet, also nur in dem Falle, dass eine der beiden Gleichungen (1) schon ein System von zwei Puncten oder eine gerade Linie darstellt; sie reducirt sich auf den ersten Grad, wenn die vorstehenden Ausdrücke beide zugleich verschwinden. Wenn die beiden Gleichungen (1) zwei Curven darstellen, so gibt also die Gleichung (3) nothwendig einen reellen Werth für μ, dem ein System zweier homologer Puncte entspricht. Dass diese beiden homologen Puncte reell sind, folgt aus der 609. Nummer. Es folgt diess (459) auch daraus, dass nothwendig eine reelle Wurzel der Gleichung (3) dem folgenden Ausdrucke:

$$(A+\mu A')(C+\mu C')-(B+\mu B')^2,$$

einen negativen Werth gibt. Statt aber in die hierdurch angezeigten Entwicklungen einzugehen, wollen wir dasselbe Resultat noch auf einem andern Wege herleiten.

612. Wenn wir, ohne die Richtung der beiden Axen zu ändern, den Anfangspunct der Coordinaten in irgend einen Punct (y, x) verlegen, so erhalten wir statt (1) zwei Gleichungen von derselben Form, für welche wir folgende beide nehmen wollen:

$$a w^2+2b vw+c v^2+2d uw+2e uv+f u^2 = 0,$$
$$a'w^2+2b'vw+c'v^2+2d'uw+2e'uv+f'u^2 = 0.$$

Alsdann hat man nach der 455. Nummer, indem man $A = a$ und $A' = a'$ setzt:

$$c = C-2Bx+Ax^2, \qquad c' = C'-2B'x+A'x^2,$$
$$e = E-Dx-By+Axy, \qquad e' = E'-D'x-B'y+A'xy,$$
$$f = F-2Dy+Ay^2; \qquad f' = F'-2D'y+A'y^2.$$

Wenn wir die Coordinaten des neuen Anfangspunctes (y, x) so bestimmen, dass

$$\frac{f}{c} = \frac{f'}{c'}, \qquad \frac{e}{c} = \frac{e'}{c'}, \tag{4}$$

so ist dieser Punct offenbar der Durchschnittspunct zweier (reeller oder imaginärer) gemeinschaftlicher Tangenten der beiden gegebenen Curven; denn die Richtungen der beiden von diesem Puncte an jede der beiden Curven gelegten Tangenten sind alsdann durch folgende Gleichung gegeben:

$$cv^2+2euv+fu^2 = 0.$$

Wir wollen annehmen, dass die zweite ursprüngliche Coordinaten-Axe durch die Mittelpuncte der beiden gegebenen Curven gehe. Alsdann ist $B = B' = 0$ und zur Bestimmung von y und x erhalten wir aus (4) folgende beide Gleichungen:

$$\frac{F-2Dy+Ay^2}{C+Ax^2} = \frac{F'-2D'y+A'y^2}{C'+A'x^2},$$
$$\frac{E-Dx+Axy}{C+Ax^2} = \frac{E'-D'x+A'xy}{C'+A'x^2}.$$

Wenn wir entwickeln, so kommt:

$$(CF'-C'F)-2(CD'-C'D)y+(C'A-CA')y^2+(A'F-AF')x^2-2(AD'-A'D)x^2y = 0, \tag{5}$$
$$(CE'-C'E)-(CD'-C'D)x+(C'A-CA')xy+(A'E-AE')x^2-(A'D-AD')x^3 = 0. \tag{6}$$

Die Durchschnittspuncte der durch die vorstehenden beiden Gleichungen, wenn wir x und y als veränderlich betrachten, dargestellten Curven sind also die Durchschnitts-

puncte je zweier gemeinschaftlicher Tangenten der beiden gegebenen Curven zweiter Classe. In der Gleichung (6) kommt y nur in der ersten Potenz vor. Nehmen wir aus dieser Gleichung den Werth von y, nemlich:

$$y = \frac{(A'D-AD')x^3-(A'E-AE')x^2+(C'D-CD')x-(C'E-CE')}{C'A-CA'},$$

und substituiren denselben in (5), so erhalten wir offenbar eine Gleichung von folgender Form:

$$Mx^6+Nx^4+Px^2+Q = o. \qquad (7)$$

Die sechs Wurzeln dieser Gleichung und die sechs entsprechenden Werthe von y, sind die Coordinaten der sechs Durchschnittspuncte je zweier der vier gemeinschaftlichen Tangenten. Die Form dieser Gleichung, in der keine mit ungeraden Potenzen von x behafteten Glieder vorkommen, wird dadurch bedingt, dass jene sechs Durchschnittspuncte, paarweise genommen, gleich weit von der zweiten Axe abstehen, oder, mit andern Worten, dass diejenige gerade Linie, welche die Mitte der drei Diagonalen der von den vier gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten vollständigen vierseitigen Figur enthält, zur zweiten Axe genommen worden ist. Die Gleichung (7) gibt nothwendig einen Werth für x^2, der reell und überdiess positiv ist. Denn $\frac{Q}{M}$, wofür man leicht folgenden Ausdruck erhält:

$$-\left(\frac{C'E-CE'}{A'D-AD'}\right)^2,$$

ist immer negativ. Es sind also zwei Wurzeln der Gleichung (7) reell: die Gleichungen irgend zweier Oerter zweiter Classe lassen sich zu der Gleichung eines Systemes zweier reeller Puncte verbinden, oder, was dasselbe heisst, zwei zusammengehörige homologe Puncte der beiden Oerter sind immer reell.

Die beiden übrigen Werthe von x^2, welche die Gleichung (7) befriedigen, können:

1) beide reell und posisiv,
2) beide imaginär oder endlich
3) beide reell und negativ

sein. Diesen drei Fällen entsprechen die drei in der 609. Nummer schon unterschiedenen Fälle.

613. Aus der vorigen Nummer ergibt sich, dass wir, im Allgemeinen, wenn irgend zwei Oerter zweiter Classe gegeben sind, immer und wenigstens auf eine zwiefache Art, indem wir den Anfangspunct gehörig bestimmen, diese beiden Curven durch folgende Gleichungen darstellen können:

$$v^2+2B\,vw+Fu^2+2D\,uw+2Euv+A\,w^2 = o,$$
$$v^2+2B'vw+Fu^2+2D'uw+2Euv+A'w^2 = o.$$

Wir können ferner, indem wir die Richtung der beiden Coordinaten-Axen gehörig bestimmen, E = o setzen, (wenn die beiden durch den neuen Anfangspunct gehenden Tangenten reell sind, so brauchen wir zu diesem Ende die ursprünglichen Coordinaten-Axen bloss so anzunehmen, dass dieselben mit denjenigen geraden Linien, welche die von diesen Tangenten gebildeten Scheitelwinkel halbiren, parallel sind) und alsdann den letzten beiden Gleichungen folgende Form geben:

$$(v-v')^2+F(u-u')^2 = M,$$
$$(v-v'')^2+F(u-u'')^2 = M', \qquad (8)$$

indem wir, der Kürze halber, [illegible]

$$-B = v', \qquad -B' = v'',$$
$$-\frac{D}{F} = u'; \qquad -\frac{D'}{F} = u'',$$
$$\frac{D^2+FB^2-AF}{F} = M, \qquad \frac{D'^2+FB'^2-A'F}{F} = M',$$

setzen, und überdiess $w = 1$ nehmen. Die geometrische Bedeutung der Constanten in den beiden Gleichungen (8) ergibt sich auf dieselbe Weise als in der 560. und 561. Nummer. (v', u') und (v'', u'') sind die Polaren des Anfangspunctes, rücksichtlich der beiden, durch diese Gleichung dargestellten Curven. F ist, wie man sogleich einsieht, positiv oder negativ, je nachdem der Anfangspunct innerhalb oder ausserhalb der beiden Curven liegt, das heisst, je nachdem die bezüglichen gemeinschaftlichen Tangenten derselben imaginär oder reell sind.

Auf demselben Wege, als in der 567. Nummer, können wir nachweisen, dass die beiden Gleichungen (8) sich verbinden lassen, 1. zu den beiden Gleichungen zweier Systeme von zwei Puncten, wenn die bezüglichen Curven vier reelle gemeinschaftliche Tangenten haben; 2. zu den beiden Gleichungen zweier gerader Linien, wenn alle gemeinschaftliche Tangenten imaginär sind; 3. weder zu der Gleichung eines Puncten-Systems, noch einer geraden Linie, wenn zwei gemeinschaftliche Tangenten reell und zwei imaginär sind. Durch Abziehen der beiden Gleichungen (8) von einander erhalten wir die Gleichung des mit dem Anfangspuncte zusammengehörigen homologen Punctes.

Wir erhalten in den letzten Nummern eine Bestätigung der Resultate der 609. Nummer. Wir könnten hierbei auch an die Stelle der vorliegenden Nummer Entwicklungen setzen, die denen der 286. und 287. Nummer des ersten Bandes analog sind. Wir beschränken uns hier indess auf diese blosse Andeutung.

614. In dieser und den folgenden Nummern wollen wir einige einzelne Fälle besonders hervorheben.

Wenn die beiden gegebenen Curven sich berühren, so fallen zwei gemeinschaftliche Tangenten zusammen und die drei Systeme homologer Puncte derselben sind 1. das System des Berührungspunctes und des Durchschnittspunctes der beiden, die Curven in diesem Puncte nicht berührenden, gemeinschaftlichen Tangenten und 2. zwei identische Systeme, von denen jedes aus den beiden Durchschnittspuncten der gemeinschaftlichen Tangente im Berührungspuncte der Curven mit den beiden übrigen gemeinschaftlichen Tangenten besteht. In diesem Falle hat nothwendig die Gleichung (3) zwei gleiche Wurzeln. Um diess auf directem Wege zu zeigen, wollen wir den Berührungspunct der beiden Curven zum Anfangspuncte der Coordinaten, die gemeinschaftliche Tangente in demselben zur ersten Axe nehmen und demgemäss von folgenden beiden Gleichungen ausgehen:

$$\begin{aligned} A^2+2Bvw+Cv^2+2Duw &= 0, \\ A'^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw &= 0, \end{aligned} \tag{9}$$

wonach sich die Gleichung (2) oder (3) in folgende verwandelt:

$$(C+\mu C')(D+\mu D')^2 = 0, \tag{10}$$

und wir sehen sogleich, dass diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, von denen jede gleich $\left(-\frac{D}{D'}\right)$ ist, und eine dritte Wurzel, die gleich ist $\left(-\frac{C}{C'}\right)$. Dieser dritten Wurzel entspricht folgende resultirende Gleichung:

$$w[(AC'-A'C)w+2(BC'-B'C)v+2(DC'-D'C)u] = o,$$

und jeder der beiden gleichen Wurzeln folgende:

$$(AD'-A'D)w^2+2(BD'-BD')vw+(CD'-C'D)v^2 = o.$$

Es hat die Gleichung (11) und also auch die entsprechende Gleichung (3) nur dann drei gleiche Wurzeln, wenn

$$\frac{C}{C'} = \frac{D}{D'},$$

das heisst, wenn die beiden gegebenen Curven sich dreipunctig osculiren (580). Die drei Systeme homologer Puncte sind alsdann, was man sogleich auch *a priori* sieht, identisch und jedes derselben besteht aus dem Osculationspuncte und dem Durchschnittspuncte der Tangente in demselben mit der, einzig noch übrigen, gemeinschaftlichen Tangente.

In dem Falle einer vierpunctigen Osculation fallen die beiden homologen Puncte jedes der drei identischen Systeme in dem Osculationspuncte zusammen.

615. Wir finden die vorstehenden Resultate bestätigt, wenn wir die Coordinaten der homologen Puncte der beiden gegebenen Curven suchen. Wenn wir zu diesem Ende von den beiden Gleichungen (9) der vorigen Nummer ausgehen, so können wir uns, im Allgemeinen, nicht mehr der Gleichungen (5) und (6) bedienen, sondern nur in dem besondern Falle, dass diejenige gerade Linie, welche die Mittelpuncte der beiden gegebenen Curven verbindet, zugleich auch durch den Berührungspunct der Curven geht. In diesem Falle verwandeln sich die beiden zuletzt genannten Gleichungen in folgende:

$$y[2(C'D-CD')-(C'A-CA')y+2(A'D-AD')x^2] = o,$$
$$x[(C'D-CD')-(C'A-CA')y+(A'D-AD')x^2] = o.$$

Jede dieser beiden Gleichungen stellt das System einer Coordinaten-Axe und einer solchen Parabel dar, deren Durchmesser der andern Axe parallel sind. Die beiden Coordinaten-Axen, denen die Factoren y und x in den vorstehenden beiden Gleichungen entsprechen, schneiden sich im Berührungspuncte der beiden gegebenen Curven, der zugehörige homologe Punct ist der einzige Punct, in welchem die der ersten Gleichung entsprechende Parabel von der zweiten Axe geschnitten wird. Die beiden Puncte, in welchen die, der zweiten Gleichung entsprechende, Parabel von der ersten Axe geschnitten wird, sind dieselben Puncte, in welchen die beiden Parabeln sich schneiden; denn wenn man die Gleichung der zweiten Parabel mit 2 multiplicirt und dann von der Gleichung der ersten Parabel abzieht, und den constanten Factor (C'A−CA') fortlässt, ergibt sich:

$$y = o.$$

Aus diesen beiden, auf der gemeinschaftlichen Tangente der beiden gegebenen Curven liegenden, Durchschnittspuncte besteht jedes der beiden noch übrigen, identischen, Systeme homologer Puncte der beiden Curven.

Wenn wir in dem allgemeinern Falle uns der Gleichungen (5) und (6) bedienen wollen, müssen wir, statt von den Gleichungen (9), von folgenden beiden Gleichungen ausgehen:

$$\left.\begin{aligned} A w^2+2B vw+C v^2+2D uw+2E uv &= o, \\ A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv &= o, \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

und, um auszudrücken, dass die bezüglichen Curven die erste Axe in demselben Puncte berühren:

$$\frac{E}{C} = \frac{E'}{C'}, \quad (12)$$

setzen. Die Gleichung (5) verwandelt sich alsdann wiederum in folgende:

$$y[2(C'D-CD')-(C'A-CA')y+2(A'D-AD')x^2] = 0,$$

und wenn wir aus dieser Gleichung die beiden Werthe von y nehmen, die den Factoren des ersten Theiles derselben entsprechen, und nach einander in (6) substituiren, so erhalten wir, zur Bestimmung der sechs Werthe von x, folgende beiden Gleichungen des dritten Grades:

$$(C'E-CE')-(C'D-CD')x+(A'E-AE')x^2-(A'D-AD')x^3 = 0,$$
$$(C'E-CE')+(C'D-CD')x+(A'E-AE')x^2+(A'D-AD')x^3 = 0. \qquad (13)$$

Man überzeugt sich ohne Mühe, wenn man die Bedingungs-Gleichung (12) berücksichtigt, dass die vorstehenden beiden Gleichungen folgenden Factor des zweiten Grades:

$$(C'E-CE')+(A'E-AE')x^2,$$

gemeinschaftlich und folglich zwei Paare gleiche Wurzeln haben.

Für den Fall einer vierpunctigen Osculation reduciren sich, indem wir (580) $E = 0$, $B = 0$ und $C'D = CD'$ setzen, die Gleichungen (13) beide auf:

$$x^3 = 0.$$

615. Die Entwicklungen der beiden vorigen Nummern erleiden nur einfache Modificationen, wenn die beiden gegebenen Curven, statt sich zu berühren, eine gemeinschaftliche Asymptote und ausserdem also nur noch zwei gemeinschaftliche Tangenten haben. In diesem Falle sind offenbar die drei Systeme homologer Puncte 1) das System des Durchschnittspunctes der beiden gemeinschaftlichen Tangenten und eines nach der Richtung der gemeinschaftlichen Asymptote hin unendlich weit entfernt liegenden Punctes; 2) zwei identische Systeme, von denen jedes aus den beiden Durchschnittspuncten der beiden gemeinschaftlichen Tangenten mit der gemeinschaftlichen Asymptote besteht. Von den drei homologen geraden Linien fallen zwei in die gemeinschaftliche Asymptote zusammen und die dritte ist dieser Asymptote parallel und geht durch den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten.

Die Gleichungen der beiden Curven erhalten, indem wir die gemeinschaftliche Asymptote derselben zur zweiten Coordinaten-Axe nehmen, folgende Form:

$$A w^2+2D uw+2E uv+F u^2 = 0,$$
$$A'w^2+2D'uw+2E'uv+F'u^2 = 0,$$

und hiernach reducirt sich die Gleichung (3) auf folgende:

$$(A+\mu A')(E+\mu E')^2 = 0.$$

Die beiden gleichen Wurzeln dieser Gleichung sind $\left(-\frac{E}{E'}\right)$, die dritte Wurzel ist $\left(-\frac{A}{A'}\right)$; jenen entspricht die resultirende Gleichung:

$$(AE'-A'E)w^2+2(DE'-D'E)uw+(FE'-F'E)u^2 = 0,$$

und dieser die Gleichung:

$$u[2(A'D-AD')w+2(A'E-AE')v+(A'F-AF')u] = 0.$$

Für den vorliegenden Fall gehen die Gleichungen (5) und (6) in folgende über:

$$x^2[(A'F-AF')-2(A'D-AD')y] = 0,$$
$$x^2[(A'E-AE')-2(A'D-AD')x] = 0,$$

und versagen ihren Dienst zur vollständigen Bestimmung der Coordinaten der homologen Puncte der beiden gegebenen Hyperbeln. Sie zeigen indess, dass alle diese Puncte, ein einziger ausgenommen, auf der zweiten Coordinaten-Axe liegen. Den Coordinaten

dieses Punctes (des Durchschnittspunctes der beiden gemeinschaftlichen Tangenten) entsprechen die zweiten Factoren in den ersten Theilen der vorstehenden Gleichungen. Die Factoren x^2 dieser beiden Gleichungen, zusammengestellt, beziehen sich offenbar auf die beiden Paare zusammenfallender, auf der zweiten Axe liegender, homologer Puncte. Den noch übrigen, nach der Richtung der zweiten Axe hin, unendlich weit liegenden homologen Punct, erhalten wir, wenn wir einen Factor x aus der ersten Gleichung mit dem zweiten Factor der zweiten Gleichung zusammenstellen.

616. Wenn zwei gegebene Curven zweiter Classe unter einander einen doppelten Contact haben, so sind die drei Systeme homologer Puncte 1) das System der beiden (reellen oder imaginären) Berührungspuncte; 2) zwei identische Systeme zweier reeller in den Durchschnittspunct der beiden (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten zusammenfallender Puncte.

Die letztgenannten beiden Systeme bestehen, wenn wir die Bezeichnung der 609. Nummer beibehalten, aus den Puncten (2) und (3), (8) und (9) und diese Puncte sind identisch dieselben, wenn wir $m' = m$, $n' = n$, $p' = p$ und $q' = q$ setzen. Den beiden Berührungspuncten entsprechen die Gleichungen (5) und (6); doch die Coefficienten in diesen Gleichungen können wir nur durch Differential-Ausdrücke darstellen. Setzen wir zu diesem Ende:

$$m' = m+dm, \qquad n' = n+dn, \qquad p' = p+dp, \qquad q' = q+dq,$$

so gehen diese Gleichungen in folgende über:

$$(dp+dq)w-(dm+dn)v+[(dm+dn)(p+q)-(dp+dq)(m+n)] = o,$$
$$(dp-dq)w-(dm-dn)v+[(dm-dn)(p-q)-dp-dq)(m-n)] = o.$$

Die drei homologen geraden Linien der beiden gegebenen Curven bestehen 1) aus der Berührungs-Chorde; 2) aus zwei reellen geraden Linien, welche beide durch den Durchschnittspunct der beiden gemeinschaftlichen Tangenten gehen. Die Berührungs-Chorde ist immer reell, auch wenn der doppelte Contact ein imaginärer ist, die Ausdrücke (y) geben für die Coordinaten derselben:

$$w' = \frac{(qdm-mdq-ndp)dm-(qdn-ndq-mdp)dn}{dndp-dmdq},$$
$$v' = \frac{(ndp-pdn-qdm)dp-(ndq-qdn-pdm)dq}{dndp-dmdq}.$$

Was die beiden übrigen homologen geraden Linien betrifft, so könnte es, da jede derselben durch zwei zusammenfallende Puncte geht, scheinen, als ob ihre Richtung jede beliebige sein könnte. Nichts desto weniger aber ist ihre Richtung eine vollkommen bestimmte. Aus den zweiten Gleichungen bei (4) und (10) erhält man nemlich für den vorliegenden Fall, mit Vernachlässigung der verschwindenden Grössen:

$$v = \frac{p(ndq-qdn)+q(qdm-ndp)}{ndq-qdn},$$
$$v'' = \frac{npdp-q(ndq-qdn)}{ndp-qdm}.$$

Da wir bisher über die beiden Coordinaten-Axen durchaus keine Bestimmung gemacht haben, so können wir die Richtung derselben nun so bestimmen, dass

$$v'' = \infty, \qquad v = o.$$

Die erste dieser Bedingungen gibt:

$$ndp - qdm = o,$$

und hiernach die zweite derselben:

$$p = o.$$

Bei diesen Voraussetzungen erhält man:

$$v' = o.$$

Es ist also die eine homologe gerade Linie (w, v) der Berührungs-Chorde (w', v') parallel. Da man ferner, weil p verschwindet,

$$v' + v'' = o$$

erhält, so bilden die beiden gemeinschaftlichen Tangenten der beiden sich doppelt berührenden Oerter zweiter Classen, und diejenigen beiden homologen geraden Linien, denen wir die Coordinaten-Axen parallel genommen haben, und die durch den Durchschnitt jener gemeinschaftlichen Tangenten gehen, ein System von vier Harmonicalen (I., 36). Da die eine dieser homologen geraden Linien der Berührungs-Chorde parallel ist, so geht die andere durch die Mitte dieser Chorde und also durch den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangenten und die Mittelpuncte der beiden Oerter.

617. Zwei Hyperbeln mit denselben Asymptoten haben in unendlicher Entfernung einen reellen doppelten Contact; zwei ähnliche, ähnlich liegende und concentrische Ellipsen haben in unendlicher Entfernung einen imaginären doppelten Contact. In beiden Fällen liegen zwei homologe Puncte unendlich weit, und die vier übrigen fallen in dem Mittelpuncte der Curve zusammen. Wir wollen diese Bemerkungen durch einige analytische Entwicklungen unterstützen.

Zwei Ellipsen, die denselben Punct zum Mittelpuncte haben, können wir immer durch folgende beide Gleichungen darstellen:

$$\begin{aligned} A w^2 + C v^2 + F u^2 &= o, \\ A' w^2 + C' v^2 + F' u^2 &= o, \end{aligned} \qquad (14)$$

indem wir diejenigen beiden Durchmesser, die für beide Curven zugeordnete sind, zu Coordinaten-Axen nehmen. *) Für den vorliegenden Fall verwandelt sich die Gleichung (2) in folgende:

$$(A + \mu A')(C + \mu C')(F + \mu F') = o. \qquad (15)$$

Die drei Wurzeln dieser Gleichung sind $\left(-\frac{A}{A'}\right)$, $\left(-\frac{C}{C'}\right)$, $\left(-\frac{F}{F'}\right)$ und die Glei-

---

*) Um die Richtungen derjenigen beiden Durchmesser, die zugleich für beide durch folgende Gleichungen dargestellte Oerter:

$$\begin{aligned} A w^2 + C v^2 + 2E uv + F u^2 &= o, \\ A' w^2 + C' v^2 + 2E' uv + F' u^2 &= o, \end{aligned}$$

zugeordnete sind, zu bestimmen, erhalten wir nach der 486. Nummer folgende beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} C v'v'' + E(v' + v'') + F &= o, \\ C' v'v'' + E'(v' + v'') + F' &= o. \end{aligned}$$

Hiernach sind v' und v'' Wurzeln folgender quadratischen Gleichung:

$$(C'E - CE')v^2 + (C'F - CF')v + (E'F - EF') = o,$$

und diese Wurzeln sind immer reell, wenn eine der beiden gegebenen Curven, etwa die erste, eine Ellipse ist. Denn setzen wir, was erlaubt ist, E = o, so kommt:

$$\frac{E'F - EF'}{C'E - CE'} = -\frac{F}{C}$$

und dieser Ausdruck ist nothwendig negativ, wenn die erste gegebene Curve eine Ellipse ist.

chungen der drei entsprechenden Systemen von zwei Puncten:

$$(A'C-AC')v^2+(A'F-AF')u^2 = o,$$
$$(AC'-A'C)w^2+(C'F-CF')u^2 = o, \qquad (16)$$
$$(AF'-A'F)w^2+(CF'-C'F)v^2 = o.$$

Jede der beiden letzten Gleichungen drückt ein System von zwei Puncten aus, die auf einer der Coordinaten-Axen liegen. Diese beiden Paare homologer Puncte sind die (reellen oder imaginären) Winkelpuncte eines Parallelogrammes, die beiden entsprechenden homologen geraden Linien die (immer reellen) Diagonalen desselben, mithin diejenigen beiden Durchmesser der beiden gegebenen Ellipsen, die für beide zugeordnete sind. Das durch die erste der vorstehenden Gleichungen dargestellte Paar homologer Puncte liegt nach den Richtungen der Seiten des eben bezeichneten Parallelogrammes unendlich weit.

Um auszudrücken, dass die beiden Gleichungen (14) ähnliche Ellipsen darstellen, erhalten wir die Bedingungs-Gleichung:

$$CF' = C'F,$$

wonach die Gleichung (15) zwei gleiche Wurzeln erhält. Alsdann reduciren sich die beiden letzten der Gleichungen (16) auf

$$w^2 = o, \qquad (17)$$

und die erste dieser Gleichungen reducirt sich auf

$$Cv^2+Fu^2 = o. \qquad (18)$$

Die Gleichung (17) zeigt, dass vier homologe Puncte in den gemeinschaftlichen Mittelpunct der beiden gegebenen Ellipsen zusammenfallen, und die Gleichung (18), dass die beiden übrigen unendlich weit liegen und imaginär sind.

Da je zwei zugeordnete Durchmesser einer der beiden zuletzt betrachteten Ellipsen auch zugeordnete Durchmesser der andern sind, so kann man jedes System solcher zugeordneter Durchmesser als das System zweier homologer gerader Linien der beiden Curven betrachten, und jeden beliebigen Durchmesser als einzelne homologe gerade Linien. Die dritte homologe gerade Linie liegt unendlich weit und ihre Richtung ist hiernach eine durchaus unbestimmte.

618. Wir haben bis jetzt denjenigen Fall ganz unberücksichtigt gelassen, dass die gegebenen Oerter zweiter Classe beide Parabeln sind. Indem wir dieselben als Uebergangs-Curven von Ellipsen zu Hyperbeln betrachten, können wir die nachstehenden Resultate unmittelbar aus den vorhergehenden herleiten, wenn wir annehmen, dass zwei Parabeln nur drei gemeinschaftliche Tangenten haben, weil die vierte unendlich weit liegt. Diese Annahme rechtfertigt sich sogleich, wenn wir, indem wir $w = 1$ setzen, von folgenden beiden allgemeinen Gleichungen ausgehen:

$$A+2Bv+Cv^2+2Du+2Euv+Fu^2 = o,$$
$$A'+2B'v+C'v^2+2D'u+2E'uv+F'u^2 = o.$$

Denn in dem Falle, dass die beiden Coefficienten A und A' zugleich verschwinden und nur in diesem einzigen Falle werden diese beiden Gleichungen befriedigt, wenn wir zugleich

$$v = o, \qquad u = o$$

setzen. Eine Tangente liegt also unendlich weit, ihre Richtung ist unbestimmt, denn der Ausdruck für $\frac{v}{u}$ erscheint unter der unbestimmten, nicht reducirbaren, Form $\frac{o}{o}$. Die

Coordinaten-Werthe der drei übrigen gemeinschaftlichen Tangenten sind durch Gleichungen des dritten Grades gegeben: eine gemeinschaftliche Tangente irgend zweier gegebener Parabeln ist also nothwendig reell, die beiden übrigen sind entweder beide reell oder beide imaginär.

In dem Falle dreier reeller gemeinschaftlicher Tangenten erhält man drei reelle Systeme zweier homologer Puncte, von denen jedesmal einer der Durchschnittspunct zweier gemeinschaftlicher Tangenten ist und der andere, nach der Richtung der dritten gemeinschaftlichen Tangente hin, unendlich weit liegt. Indem wir von den unendlich weit liegenden Puncten abstrahiren, sind also die Winkelpuncte des von den drei gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten Dreiecks die drei homologen Puncte. Die drei homologen geraden Linien der beiden Parabeln sind in dem vorliegenden Falle ebenfalls reell, und jede derselben geht durch einen Winkelpunct des von den gemeinschaftlichen Tangenten gebildeten Dreiecks und ist der diesem Winkelpuncte gegenüberliegenden Seite dieses Dreiecks parallel.

In dem Falle zweier imaginärer Tangenten der beiden gegebenen Parabeln gibt es nur einen einzigen reellen homologen Punct: den Durchschnittspunct dieser beiden imaginären Tangenten; und nur eine einzige reelle homologe gerade Linie: diejenige gerade Linie, welche durch diesen homologen Punct geht, und der einzigen reellen gemeinschaftlichen Tangente parallel ist.

619. Durch Verbindung der Gleichungen zweier gegebener Parabeln:

$$\left.\begin{aligned} 2B\,vw+C\,v^2+2D\,uw+2E\,uv+F\,u^2 &= 0, \\ 2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+F'u^2 &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

erhalten wir folgende allgemeine Gleichung des zweiten Grades:

$$2(B+\mu B')vw+(C+\mu C')v^2+2(D+\mu D')uw+2(E+\mu E')uv+(F+\mu F')u^2 = 0. \qquad (2)$$

Diese Gleichung stellt, wie wir auch den unbestimmten Coefficienten μ bestimmen mögen, nur Parabeln dar, diejenigen besondern Fälle bloss abgerechnet, wo dieselben ein System von zwei Puncten darstellt, von denen alsdann einer unendlich weit liegt. Um auszudrücken, dass die letzte Gleichung ein solches Puncten-System (System homologer Puncte) darstelle, erhalten wir, nach der 466. Nummer, folgende Bedingungs-Gleichung, die in Beziehung auf μ bis zum dritten Grade steigt:

$$(C+\mu C')(D+\mu D')^2-2(B+\mu B')(D+\mu D')(E+\mu E')+(F+\mu F')(B+\mu B')^2 = 0.$$

Auf dieselbe Gleichung reducirt sich die Gleichung (3) der 611. Nummer, wenn wir in derselben A und A' gleich Null setzen.

Wenn wir für μ eine Wurzel der letzten Gleichung nehmen, so stellt die Gleichung (2), nach der eben angezogenen Nummer, das System solcher zwei Puncte dar, von denen einer folgender ist:

$$\left\{ y = {}^1\!/_2\cdot\frac{F+\mu F'}{D+\mu D'}, \qquad x = {}^1\!/_2\cdot\frac{C+\mu C'}{B+\mu B'} \right\},$$

und der andere nach derjenigen Richtung hin unendlich weit liegt, die durch folgende Gleichung gegeben ist:

$$(B+\mu B')v+(D+\mu D')u = 0.$$

620. Um die Coordinaten der drei homologen Puncte irgend zweier gegebener Parabeln (1) zu bestimmen, können wir auch auf eine ähnliche Weise, wie in der 612. Nummer verfahren. Wenn wir die Bezeichnungsweise dieser Nummer beibehalten, und

bloss A = A' = o setzen, und den Anfangspunct der Coordinaten in einen homologen Punct der beiden Parabeln verlegen, so erhalten wir

$$\frac{e}{c} = \frac{e'}{c'}, \qquad \frac{e}{f} = \frac{e'}{f'},$$

das heisst, wenn wir substituiren und die Coordinaten jenes homologen Punctes y und x nennen:

$$\begin{aligned} \frac{E-Dx-By}{C-2Bx} &= \frac{E'-D'x-B'y}{C'-2B'x}, \\ \frac{E-Dx-By}{F-2Dy} &= \frac{E'-D'x-B'y}{F'-2D'y}. \end{aligned} \qquad (3)$$

Wenn wir entwickeln, so kommt:

$$\begin{aligned} 2(DB'-D'B)x^2-((DC'-D'C)+2(EB'-E'B))x-(BC'-B'C)y+(EC'-E'C) &= 0, \\ 2(BD'-B'D)y^2-((BF'-B'F)+2(ED'-E'D))y-(DF'-D'F)x+(EF'-E'F) &= 0, \end{aligned} \qquad (4)$$

und wenn wir diese beiden Gleichungen von einander abziehen, so ergibt sich:

$$2(BD'-B'D)[y^2+x^2]-(B(F'-C')-B'(F-C)+2(ED'-E'D))y-(D(F'-C')-D'(F-C)+ \\ 2(EB'-E'B))x+(E(F'-C')-E'(F-C)) = 0. \qquad (5)$$

Wenn wir zwischen den beiden Gleichungen (4) nach einander x und y eliminiren, so erhalten wir zwei Gleichungen, die in Beziehung auf die übrigbleibende unbekannte Grösse bis zum vierten Grade steigen. Drei Wurzelpaare beziehen sich auf die drei homologen Puncte der beiden gegebenen Parabeln, das vierte Paar enthält fremde Wurzeln. Die geometrische Bedeutung dieser fremden Wurzeln ergibt sich leicht. Die Gleichungen (3) werden nemlich beide befriedigt, wenn wir zugleich:

$$\begin{aligned} e &= E-Dx-By = 0, \\ e' &= E'-D'x-B'y = 0, \end{aligned}$$

setzen. Die durch diese beiden Gleichungen bestimmten, immer reellen, Werthe von y und x beziehen sich offenbar auf keinen der drei homologen Puncte, sondern auf denjenigen Punct, in welchen wir den Anfangspunct der Coordinaten verlegen müssen, wenn aus den Gleichungen beider Parabeln, ohne dass wir die Richtung der Coordinaten-Axen ändern, die mit uv behafteten Glieder ausfallen sollen. Wenn wir rechtwinklige Coordinaten voraussetzen, so bilden (471) die beiden Tangenten, die sich, von diesem Puncte aus, an die eine Parabel legen lassen, mit den beiden durch denselben Punct gehenden Tangenten der andern Parabel gleiche Winkel. Bei dieser Voraussetzung stellt die Gleichung (5), wenn wir y und x als veränderliche Grössen betrachten, einen Kreis dar und dieser Kreis ist der geometrische Ort aller solcher entsprechender Puncte, die wir erhalten, wenn wir das rechtwinklige Coordinaten-System beliebig drehen.

Da es hiernach nothwendig ein Paar reeller zusammengehöriger Werthe von y und x gibt, welche den beiden Gleichungen (4) Genüge leisten, so gibt es ausserdem auch noch ein zweites Paar solcher reeller Werthe und diese sind die Coordinaten eines homologen Punctes der beiden gegebenen Parabeln, der also immer reell bleibt, während die beiden übrigen imaginär werden können.

Der durch die drei Durchschnittspuncte je zweier der drei gemeinschaftlichen Tangenten der beiden gegebenen Parabeln gehende, und durch diese drei Puncte vollkommen bestimmte Kreis geht durch den Brennpunct jeder der beiden Parabeln. Wenn wir, um diess zu zeigen, den Brennpunct einer derselben, etwa der ersten, zum Anfangs-

puncte rechtwinkliger Coordinaten nehmen, so erhalten wir (476):

$$E = 0, \qquad C = F;$$

und hiernach fällt aus der Gleichung (5), die den in Rede stehenden Kreis darstellt, das von y und x unabhängige Glied aus, und der bezügliche Kreis geht also durch den Anfangspunct der Coordinaten. Hiernach ergibt sich folgender bekannter Satz (341):

Die Brennpuncte aller derjenigen Parabeln, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren, liegen auf dem Umfange eines Kreises, der durch die drei Winkelpuncte des Dreiecks geht. *)

Zugleich erhält man hier folgenden Satz:

Wenn irgend ein Dreieck gegeben ist und man legt von irgend einem Puncte des Umfanges des diesem Dreiecke umschriebenen Kreises Tangenten-Paare an solche Parabeln, welche die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berühren, so bilden je zwei solcher Tangenten-Paare mit einander gleiche Winkel.

Wenn wir berücksichtigen, dass mit den Parabeln, welche die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berühren, auch drei Systeme homologer Puncte, deren einer unendlich weit liegt, zusammengehören, und den letzten Satz auf zwei jener drei Systeme anwenden, so begegnen wir dem bekannten Satze, „dass Peripherie-Winkel, die auf demselben Bogen stehen, einander gleich sind."

Aus der Zusammenstellung einer Parabel mit einem der drei Systeme homologer Puncte ergibt sich eine Construction beliebig vieler Tangenten einer Parabel, wenn vier Tangenten derselben gegeben sind.

§. 9.

Verbindung der Gleichungen zweier Oerter zweiter Classe zu der Gleichung irgend eines neuen Ortes derselben Classe. Theorie der Transversalen.

621. Wenn irgend zwei gegebene Oerter zweiter Classe durch folgende beiden Gleichungen dargestellt werden:

$$\begin{aligned} A w^2+2B vw+C v^2+2D uw+2E uv+F u^2 &= 0, \\ A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+F'u^2 &= 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

so erhalten wir für die allgemeine Gleichung aller derjenigen Oerter derselben Classe, welche mit den beiden gegebenen dieselben vier gemeinschaftliche Tangenten haben, folgende:

$$(A+\mu A')w^2+2(B+\mu B')vw+(C+\mu C')v^2+2(D+\mu D')uw+2(E+\mu E')uv+(F+\mu F')u^2 = 0. \qquad (2)$$

---

*) Zu demselben Resultate kommen wir auch, nach der 538. Nummer, wenn wir zwischen den beiden Gleichungen der 480. Nummer.

$$y' = \frac{2BE-D(C-F)}{2(B^2+D^2)},$$

$$x' = \frac{2DE+B(C-F)}{2(B^2+D^2)},$$

B oder D eliminiren.

Wenn also:

$$A''w^2+2B''vwC+''v^2+2D''uw+2E''uv+F''u^2 = o, \qquad (3)$$

die Gleichung irgend eines solchen Ortes ist, so ergeben sich, bei gehöriger Bestimmung des unbestimmten Coefficienten μ, folgende Gleichungen:

$$\frac{B+\mu B'}{A+A\mu'} = \frac{B''}{A''},$$
$$\frac{C+\mu C'}{A+\mu A'} = \frac{C''}{A''},$$
$$\frac{D+\mu D'}{A+\mu A'} = \frac{D''}{A''},$$
$$\frac{E+\mu E'}{A+\mu A'} = \frac{E''}{A''},$$
$$\frac{F+\mu F'}{A+\mu A'} = \frac{F''}{A''},$$

aus denen sich noch 10 andere herleiten lassen, indem wir je zwei derselben in einander dividiren.

622. Aus dem blossen Anblick der 15 Gleichungen, die auf diese Weise sich ergeben, lassen sich eine Reihe von Sätzen herleiten. Wir wollen zuerst einige dieser Gleichungen, einzeln für sich, betrachten.

Jede der beiden Gleichungen:

$$\frac{B+\mu B'}{A+\mu A'} = \frac{B''}{A''}, \qquad \frac{D+\mu D'}{A+\mu A'} = \frac{D''}{A''},$$

gibt folgenden bekannten Satz:

Die Mittelpuncte aller Oerter zweiter Classe, welche vier gegebene gerade Linien berühren, insbesondere die Mitten der drei Diagonalen der, von diesen geraden Linien gebildeten, vollständigen vierseitigen Figur, liegen in gerader Linie.

Wenn wir nemlich die erste oder zweite Coordinaten-Axe durch die Mittelpuncte der beiden Curven (1) legen, so ist

$$D = D' = o, \qquad B = B' = o,$$

und mithin auch

$$D'' = o, \qquad B'' = o.$$

623. Auf gleiche Weise gibt die Gleichung:

$$\frac{E+\mu E'}{A+\mu A'} = \frac{E''}{A''}, \qquad (4)$$

folgenden Satz (469):

Wenn man von irgend einem Puncte aus an jeden von drei, demselben Viereck eingeschriebenen, Oerter zweiter Classe zwei Tangenten legt, so bilden diese drei Tangenten-Paare eine Involution von sechs geraden Linien. *)

*) I. Solche Systeme von sechs geraden Linien und von sechs Puncten, die Involutionen bilden, verdienen ganz die besondere Aufmerksamkeit, welche einige Geometer denselben geschenkt haben. Ich erlaube mir hier einige Bemerkungen über die Art, wie man bei der Betrachtung derselben verfahren kann.

Dieser Satz enthält als besondern Fall den bereits schon in der 440. Nummer hergeleiteten Satz von einer vollständigen vierseitigen Figur. Wenn wir eine Curve mit zwei Puncten-Systemen zusammenstellen, so erhalten wir einen Satz vom umschriebenen Viereck und nach diesem Satze können wir, wenn fünf Tangenten einer Curve zweiter

---

Die nachstehenden Definitionen scheinen mir die zweckmässigsten:

Drei Paare von geraden Linien, von denen jedes mit zwei gegebenen geraden Linien vier Harmonicalen bildet, bilden unter sich eine Involution von sechs geraden Linien.

Drei Paare von Puncten, von denen jedes mit zwei gegebenen Puncten vier harmonische Theilungspuncte bildet, bilden unter sich eine Involution von sechs Puncten.

Es folgt unmittelbar aus den vorstehenden Definitionen, dass jede Transversale eine Involution von sechs geraden Linien in solchen Puncten schneidet, die eine Involution von sechs Puncten bilden, und, andererseits, dass man eine Involution von sechs geraden Linien erhält, wenn man, von einem beliebigen Puncte aus, sechs gerade Linien nach einer Involution von sechs Puncten zieht. Zugleich ist ersichtlich, dass, wenn wir eine Involution von sechs Puncten oder von sechs geraden Linien projiciren, gleichviel ob orthographisch oder perspectivisch, wir in der Projection wiederum eine Involution von sechs Puncten oder von sechs geraden Linien erhalten. Und endlich ist klar, dass, da die Pole von vier Harmonicalen, in Beziehung auf irgend einen gegebenen Kegelschnitt, vier harmonische Theilungspuncte, und die Polaren von vier harmonischen Theilungspuncten vier Harmonicalen sind, auch die Pole einer Involution von sechs geraden Linien eine Involution von sechs Puncten und die Polaren einer Involution von sechs Puncten eine Involution von sechs geraden Linien bilden.

Da von vier harmonischen Theilungspuncten zwei imaginär sein können, so können auch die Puncte einer Involution, paarweise genommen, imaginär werden. Wenn die beiden Puncte eines Puncten-Paares der Involution zusammenfallen, so geschieht diess in einem derjenigen beiden Puncte, die mit jedem Paare der Involution vier harmonische Theilungspuncte bilden. (Auch diese beiden Puncte können imaginär sein). Mit diesen beiden Puncten können zwei Puncten-Paare zusammenfallen. Alsdann erhalten wir also, statt der Involution, bloss vier harmonische Theilungspuncte.

Beziehungen, welche den letzten ganz analog sind, ergeben sich für eine Involution von sechs geraden Linien. —

II. Nach der ersten Definition ergibt sich sogleich folgender Satz:

Wenn eine Involution von sechs geraden Linien gegeben ist, so kann man, im Allgemeinen, eine Transversale auf doppelte Weise so ziehen, dass zwischen je zwei Linien-Paaren der Involution gleiche Stücke derselben liegen.

Aus der zweiten Definition geht folgender Satz hervor (192):

Wenn eine Involution von sechs Puncten gegeben ist, so schneiden sich diejenigen drei Kreise, welche man über den Abständen der Puncte jedes Paares dieser sechs Puncte, als Durchmesser, beschreiben kann, in denselben beiden (reellen oder imaginären) Puncten. Diese Durchschnittspuncte sind zwei solche Puncte, die die Eigenschaften besitzen, dass, wenn man von einem derselben zwei gerade Linien nach jedem Puncten-Paare der Involution zieht, je zwei solcher drei Linien-Paare mit einander gleiche Winkel bilden.

Es sind die beiden in Rede stehenden Durchschnittspuncte reell oder imaginär, je nachdem diejenigen beiden Puncte, welche mit den beiden Puncten jedes Paares der Involution vier harmonische Theilungspuncte bilden, umgekehrt, imaginär oder reell sind. Die gemeinschaftliche Chorde jener drei Kreise halbirt diejenige gerade Linie, welche die letztgenannten beiden Puncte verbindet und steht auf derselben senkrecht. Diese beiden Puncte selbst sind zugeordnete Pole in Beziehung auf jeden der drei Kreise (309); sie sind die Chordalpuncte (363) je zweier derselben.

Eine unmittelbare Anwendung des letzten Satzes gibt folgenden Satz:

Wenn drei Paare von Kreisen, die dieselben beiden Mittelpuncte haben, gegeben sind, so haben diejenigen drei Kreise, welche über den Abständen der Durchschnittspuncte der innern und der äussern gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Kreise der drei Paare, als Durchmesser, beschrieben werden können, eine gemeinschaftliche (ideale) Chorde.

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich direct, wenn wir nach der Gleichung (6) der 186. Nummer die Gleichungen zweier solcher Kreise bilden. Auf diese Weise ergibt sich, indem

Classe gegeben sind, eine sechste Tangente construiren, indem wir zu fünf gegebenen geraden Linien einer Involution die sechste bestimmen.

Alle Resultate dieser Nummer gelten auch für solche Parabeln, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren.

---

wir $b = \beta = o$ und $a+\alpha = o$ setzen:

$$y^2+x^2-2\frac{\varrho^2+r^2}{\varrho^2-r^2}ax = -a^2,$$

$$y^2+x^2-2\frac{\varrho'^2+r'^2}{\varrho'^2-r'^2}ax = -a^2;$$

mithin, wenn wir abziehen, und durch den constanten Factor des ersten Gliedes dividiren:

$$x = o,$$

eine Gleichung, die von der Grösse der Radien der verschiedenen Kreise unabhängig ist. Man kann diesen Beweis auch als den Beweis des letzten Satzes ansehen.

Aus dem vorletzten Satze ergibt sich eine leichte Construction des sechsten Punctes einer Involution, wenn fünf Puncte derselben gegeben sind; und hiernach also auch der sechsten geraden Linie einer Involution, wenn fünf gerade Linien derselben gegeben sind. —

III. Da die Summe der reciproken Abstände zweier zusammengehöriger harmonischer Theilungspuncte von einem der beiden übrigen Theilungspuncte dem doppelten reciproken Abstande der beiden letztgenannten Puncte von einander gleich ist, (Seite 100, Note) so ergibt sich ferner der folgende Satz:

Wenn sechs Puncte einer geraden Linie, die eine Involution bilden, gegeben sind, so gibt es, im Allgemeinen, zwei solche Puncte derselben geraden Linie, für deren jeden die Summe der beiden reciproken Abstände von den beiden Puncten jedes Paares der Involution derselben Grösse gleich ist.

IV. Das Product der Abstände zweier zusammengehöriger harmonischer Theilungspuncte von der Mitte der beiden übrigen Theilungspuncte ist gleich dem Quadrate des halben Abstandes dieser letztgenannten Puncte von einander.

Dieser Satz ergibt sich sogleich. Denn nennt man jene beiden Abstände p und q, und diesen halben Abstand b, so gibt die harmonische Proportion:

$$b+p : b-p = b+q : q-b,$$

und folglich kommt:

$$pq = b^2.$$

Wenn die beiden ersten harmonischen Theilungspuncte reell sind, so ist auch b reell; wenn jene Puncte imaginär sind, nimmt b die Form $\beta\sqrt{-1}$ an und b^2 ist negativ. Im erstern Falle sind p und q reell und haben dasselbe Zeichen, oder sind imaginär; im zweiten Falle sind p und q nothwendig reell und von entgegengesetztem Zeichen. So lange nur die beiden letzten Theilungspuncte reell sind, sind auch p und q reell.

Nach der zweiten Definition ergibt sich hiernach folgender Satz:

Wenn eine Involution von sechs Puncten gegeben ist, so gibt es immer einen siebenten Punct derselben geraden Linie, welcher die Eigenschaft besitzt, dass das Product der Abstände desselben von den beiden Puncten jedes Paares der Involution ein und derselben Grösse gleich ist.

Diesen siebenten Punct kann man den Mittelpunct der Involution nennen. Wenn ein Punct einer Involution unendlich weit liegt, so ist der zugehörige Punct der Mittelpunct derselben.

V. Wenn man einen der Scheitelwinkel ($= 2\vartheta$), welche zwei gegebene gerade Linien mit einander bilden, durch eine gerade Linie halbirt und irgend zwei andere gerade Linien zieht, welche als Harmonicalen zu den beiden gegebenen gehören, und mit der Halbirungs-Linie Winkel bilden, die man η und ξ nennt, so ist:

$$\tang\eta \,.\, \tang\xi = \tang^2\vartheta,$$

Es folgt dieser Satz unmittelbar aus dem letzten Satze von vier harmonischen Theilungspuncten, wenn man eine Transversale zieht, die auf jener Halbirungs-Linie senkrecht steht, und die Durchschnitte derselben mit den vier Harmonicalen betrachtet. Hiernach gibt die erste Definition folgenden Satz:

Wenn wir annehmen, dass die beiden gegebenen Curven einen Mittelpunct haben, und

$$B = B' = o, \qquad D = D' = o$$

setzen, so haben alle in Rede stehenden Curven denselben Mittelpunct und sind

---

Wenn eine Involution von sechs geraden Linien gegeben ist, so gibt es immer zwei auf einander senkrecht stehende gerade Linien, deren jede die Eigenschaft besitzt, dass, wenn man die Winkel, welche die drei Linien-Paare der Involution mit derselben bilden, η und ξ, η' und ξ', η'' und ξ'' nennt:

$$tang\eta tang\xi = tang\eta' tang\xi' = tang\eta'' tang\xi''.$$

Diese beiden geraden Linien kann man die Axen der gegebenen Involution von sechs geraden Linien nennen. Die beiden Axen bilden mit je zwei Linien-Paaren der Involution eine neue Involution.

Die letzte Gleichung gibt, in Uebereinstimmung mit II., insbesondere auch folgenden Satz:

Die Schenkel dreier rechter Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitelpunct haben, bilden eine Involution von sechs geraden Linien. —

VI. Wenn die beiden Gleichungen

$$w+bu = o, \qquad w-bu = o,$$

irgend zwei Puncte darstellen, die auf der zweiten Axe zu beiden Seiten des Anfangspunctes gleich weit von demselben entfernt liegen, so stellen nach der 410. Nummer und der zweiten Definition, wenn μ, μ' und μ'' irgend drei beliebige Coefficienten bedeuten, folgende drei Gleichungen-Paare:

$$(1+\mu)w+(1-\mu)bu = o, \quad (1+\mu')w+(1-\mu')bu = o, \quad (1+\mu'')w+(1-\mu'')bu = o,$$
$$(1-\mu)w+(1+\mu)bu = o, \quad (1-\mu')w+(1+\mu')bu = o, \quad (1-\mu'')w+(1+\mu'')bu = o,$$

eine Involution von sechs Puncten dar, bezogen auf ihren Mittelpunct, als Anfangspunct der Coordinaten. Diese Gleichungen zeigen wiederum, dass das Product der Abstände eines beliebigen Puncten-Paares der Involution vom Mittelpuncte derselben gleich b^2 ist. Ferner erhält man, wenn man die drei Puncten-Paare, wie sie den vorstehenden drei Gleichungen-Paaren entsprechen, V und U, V' und U', V'' und U'' nennt:

$$\frac{V''U}{V''U'} = \frac{(\mu''+\mu)(1-\mu')}{(\mu''+\mu')(1-\mu)},$$
$$\frac{V'U''}{V'U} = \frac{(\mu''+\mu')(1-\mu)}{(\mu'+\mu)(1-\mu'')},$$
$$\frac{VU'}{VU''} = \frac{(\mu'+\mu)(1-\mu'')}{(\mu''+\mu)(1-\mu')},$$

und indem man diese drei Gleichungen in einander multiplicirt, kommt, wenn man zugleich auf die Vorzeichen Rücksicht nimmt:

$$\frac{V''U.V'U''.VU'}{U''V.U'V'.UV'} = -1. \qquad (a)$$

Da man V mit U, V' mit U' und V'' mit U'' beliebig vertauschen kann, so ergeben sich aus der vorstehenden Gleichung noch folgende drei:

$$\frac{V''V.V'U''.UU'}{U''U.U'V''.VV'} = -1, \quad \frac{V''U.U'U''.VV'}{U''V.V'V''.UU'} = -1, \quad \frac{U''U.V'V''.VU'}{V''V.U'U''.UV'} = -1. \qquad (b)$$

Wenn wir nach einander die Gleichung (a) in jede der Gleichungen (b) dividiren, so gelangen wir zu folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{VV''.VU''}{VV'.VU'} = \frac{UU''.UV''}{UU'.UV'}, \quad \frac{V'V.V'U}{V'V''.V'U''} = \frac{U'U.U'V}{U'U''.U'V''}, \quad \frac{V''V'.V''U'}{V''V.V''U} = \frac{U''U'.U''V'}{U''U.U''V}. \qquad (c)$$

Die sieben Gleichungen (a), (b) und (c) entsprechen den schon in der 439. Nummer erwähnten, von H. BRIANCHON aufgestellten, Gleichungen. —

VII. Wenn die beiden Gleichungen:

$$y = tang\alpha.x, \qquad y = -tang\alpha.x,$$

irgend zwei durch den Anfangspunct der Coordinaten (von denen wir annehmen, dass sie rechtwinklige seien) gehende gerade Linien darstellen, welche zu beiden Seiten der ersten Axe liegen und mit derselben gleiche Winkel bilden, so erhalten, nach der ersten Defini-

demselben Parallelogramm eingeschrieben. Unter dieser Voraussetzung enthält die Gleichung (4) folgenden Satz: (497)

Alle Curven zweiter Classe, die demselben Parallelogramm eingeschrieben sind, haben beide dieselben zwei geraden Linien zu zugeordneten Durchmessern.

Diese beiden zugeordneten Durchmesser sind offenbar die beiden Diagonalen des Parallelogramms. Denn wenn wir von einer Curve zu einem Systeme von zwei Puncten übergehen, so fällt von irgend zweien zugeordneten Durchmessern einer immer in die, diese beiden Puncte verbindende, gerade Linie. Es folgt hieraus ferner folgender Satz:

Von allen in ein gegebenes Perallelogramm beschriebenen Ellipsen nähert sich diejenige dem Kreise am meisten, deren gleiche zugeordnete Durchmesser die beiden Diagonalen des gegebenen Parallelogramms sind und deren Axen also die von diesen Diagonalen gebildeten Scheitelwinkel halbiren. —

625. Etwas allgemeiner, als die Beweisführung in den letzten beiden Nummern, ist die nachstehende Betrachungsweise:

Die Gleichung

$$\frac{B+\mu B'}{A+\mu A'} = \frac{B''}{A''},$$

die wir beispielsweise nehmen wollen, reducirt sich, wenn wir

$$\frac{B}{A} = \frac{B'}{A'}$$

setzen, auf folgende:

$$\frac{B}{A} = \frac{B'}{A'} = \frac{B''}{A''}.$$

Wir kommen also zu folgendem allgemeinern Resulsate:

Wenn in der Gleichung einer gegebenen Curve zweiter Classe der Quotient irgend zweier Coefficienten gleich ist dem Quotienten der entsprechenden Coefficienten in der Gleichung einer zweiten solchen gegebenen Curve, so erhält man denselben Quotienten auch dann, wenn man, statt einer der beiden gegebenen Curven, irgend eine dritte betrachtet, welche mit diesen dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten hat.

Es ergeben sich hier 15 verschiedene Fälle, von denen wir einige besonders hervorheben wollen.

---

tion und nach IV., wenn μ, μ' und μ'' beliebig zu bestimmende Coefficienten sind, für irgend eine beliebige Involution von sechs geraden Linien, Ov und Ou, Ov' und Ou', Ov'' und Ou'', deren Axen die beiden Coordinaten-Axen sind, folgende Gleichungen:

$$(1+\mu)y = (1-\mu)ax, \quad (1+\mu')y = (1-\mu')ax, \quad (1+\mu'')y = (1-\mu'')ax,$$
$$(1-\mu)y = (1+\mu)ax, \quad (1-\mu')y = (1+\mu')ax, \quad (1-\mu'')y = (1+\mu'')ax.$$

Hiernach erhält man, nach leichten Reductionen:

$$\frac{tang\, v''Ou}{tang\, v''Ou'} = \frac{(\mu''+\mu)(1-\mu'\mu'')}{(\mu''+\mu')(1-\mu\mu'')}.$$
$$\frac{tang\, v'Ou''}{tang\, v'Ou} = \frac{(\mu''+\mu')(1-\mu\mu')}{(\mu'+\mu)(1-\mu'\mu'')},$$
$$\frac{taug\, v\, Ou'}{tang\, v\, Ou''} = \frac{(\mu'+\mu)(1-\mu\mu'')}{(\mu''+\mu)(1-\mu\mu')},$$

und, indem man diese drei Gleichungen mit einander multiplicirt, kommt:

$$\frac{tang\, v''Ou . tang\, v'Ou'' . tang\, vOu'}{tang\, u''Ov . tang\, u'Ov'' . tang\, uOv'} = -1. \quad \text{(d)}$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich unmittelbar noch sechs andere, die den Gleichungen (b) und (c) entsprechen. —

626. Aus jeder von folgenden drei Gleichungen:

$$\frac{B+\mu B'}{A+\mu A'} = \frac{B''}{A''}, \qquad \frac{D+\mu D''}{A+\mu A''} = \frac{D''}{A''}, \qquad \frac{D+\mu D'}{B+\mu B'} = \frac{D''}{B''},$$

ergibt sich hiernach der Satz der 623. Nummer.

Auf ähnliche Weise folgt aus jeder von folgenden sechs Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} \frac{C+\mu C'}{B+\mu B'} = \frac{C''}{B''}, & \frac{E+\mu E'}{B+\mu B'} = \frac{E''}{B''}, & \frac{E+\mu E'}{C+\mu C'} = \frac{E''}{C''}, \\ \frac{E+\mu E'}{D+\mu D'} = \frac{E''}{D''}, & \frac{F+\mu F'}{D+\mu D'} = \frac{F''}{D''}, & \frac{F+\mu F'}{E+\mu E'} = \frac{F''}{E''}, \end{array} \qquad (5)$$

nachstehender bekannter Satz: (525)

Der geometrische Ort für die Pole einer beliebigen Transversalen, in Beziehung auf alle Ellipsen oder Hyperbeln, welche demselben Viereck eingeschrieben sind, oder in Beziehung auf alle Parabeln, welche die drei Seiten desselben Dreiecks berühren, ist eine gerade Linie.

Aus diesem Satze folgt der zu Anfang dieser Nummer angezogene (durch Gränz-Betrachtungen in der Construction) indem man die beliebige Transversale sich unendlich weit entfernt denkt. In der analytischen Entwicklung vertauschen sich, beim Uebergang von einem Satze zum andern, bloss die zusammen zu stellenden Coefficienten der allgemeinen Gleichung.

Wenn man, statt drei Curven, die drei Paare gegenüberstehender Winkelpuncte einer vollständigen vierseitigen Figur zusammenstellt, so erhält man den Satz der 435. Nummer (526). Die in diesem Satze bestimmte gerade Linie geht also durch den Pol der beliebigen Transversalen, in Beziehung auf jede der vierseitigen Figur eingeschriebene Curve zweiter Classe. Wenn fünf gerade Linien gegeben sind, so erhält man fünf gegebene vierseitige Figuren und mithin auch, einer beliebigen Transversalen entsprechend, fünf gerade Linien, welche durch ein und denselben Punct gehen, durch den Pol dieser Transversalen, in Beziehung auf diejenige Curve zweiter Classe, welche von den fünf gegebenen geraden Linien berührt wird. Diesen Pol können wir also, ohne dass die Curve selbst gegeben ist, durch den Durchschnitt irgend zweier von jenen fünf durch denselben Punct gehenden geraden Linien construiren.

627. Den Satz der 624. Nummer erhalten wir unmittelbar aus folgenden beiden Gleichungen, welche schon unter den Gleichungen (5) vorkommen:

$$\frac{E+\mu E'}{C+\mu C'} = \frac{E''}{C''}, \qquad \frac{E+\mu E'}{F+\mu F'} = \frac{E''}{F''}, \qquad (6)$$

und ferner auch aus folgender:

$$\frac{F+\mu F'}{C+\mu C'} = \frac{F''}{C''}. \qquad (7)$$

Wenn wir nemlich, was die letzte Gleichung anbetrifft, vom Anfangspuncte der Coordinaten, für den wir jeden beliebigen Punct nehmen können, zwei Tangenten an jede der beiden gegebenen Curven legen, ferner der zweiten Axe, der wir eine beliebige Richtung geben können, irgend eine gerade Linie parallel ziehen, die den an die erste Curve gelegten Tangenten in den beiden Puncten u und v, und den an die zweite Curve gelegten Tangenten in u' und v' begegnet, und dann die erste Axe durch einen solchen Punct P dieser geraden Linie legen, der dadurch, und zwar auf einzige Weise, bestimmt ist, dass

so ist offenbar:

$$Pu.Pv = Pu'.Pv',$$

$$\frac{F}{C} = \frac{F'}{C'},$$

und also nach (7):

$$\frac{F}{C} = \frac{F'}{C'} = \frac{F''}{C''},$$

und mithin auch:

$$Pu.Pv = Pu'.Pv' = Pu''.Pv'', \qquad (8)$$

wenn wir die entsprechenden Durchschnitte der durch den Anfangspunct an die dritte Curve gelegten Tangenten u'' und v'' nennen. Es führt also die Gleichung (7) wieder zu dem Satze der 624. Nummer, indem wir die in der Note zu dieser Nummer unter V. entwickelte Eigenschaft einer Involution von sechs geraden Linien berücksichtigen. Ein besonderer Fall ist derjenige, wo, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen:

$$\frac{F}{C} = \frac{F'}{C'} = \frac{F''}{C''} = -1.$$

Diess führt zu Resultaten, bei denen wir später ausführlicher verweilen werden.

628. Der Satz der 624. Nummer, und namentlich die Umschreibung desselben in der Gleichung (8) der vorigen Nummer, besteht auch dann noch, wenn wir annehmen, dass alle Tangenten, statt durch denselben Punct zu gehen, unter einander parallel sind. Es folgt diess einerseits aus Gränz-Betrachtungen in der Construction, und andrerseits, wenn wir eine der beiden Gleichungen:

$$\frac{C+\mu C'}{A+\mu A'} = \frac{C''}{A''}, \qquad \frac{F+\mu F'}{A+\mu A'} = \frac{F''}{A''},$$

behandeln, wie in der vorigen Nummer die Gleichung (7).

Die Discussion des in Rede stehenden Falles führt zu mehrern speciellen Sätzen, von denen wir einige hervorheben wollen. Wir wollen zu diesem Ende, wie in der 17. Figur, eine Curve mit zwei Puncten-Paaren, A und C, B und D, zusammenstellen, und eine beliebige Transversale MN betrachten, welche von den sechs Parallelen in den Puncten u und v, u' und v', u'' und v'' geschnitten werde. Es ist alsdann, nach der Gleichung (a) der Note zur 624. Nummer:

Fig. 17.

$$\frac{V''U}{VU''} = \frac{VU}{VU''} \cdot \frac{U'V''}{U'V},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{V''U}{VU''} = \frac{HB}{HA} \cdot \frac{EC}{ED}.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist das Verhältniss der beiden Vierecksseiten BC und AD, wenn man dieselben auf die Transversale MN nach der Richtung der parallelen Tangenten EG und FH projicirt; er ist also das Verhältniss dieser Seiten selbst, wenn dieselben parallel sind.

Die zweite der Gleichungen (c) gibt:

$$\frac{FD}{FC} \cdot \frac{HB}{HA} = \frac{GB}{GA} \cdot \frac{ED}{EC}.$$

Wenn die gegebene Curve eine Parabel ist, so liegt eine der beiden parallelen Tangenten, etwa FH, unendlich weit. Alsdann ist, nach der Note zur 624. Nummer (IV), U' der Mittelpunct der Involution und also:

$$U'U.U'V = U'U''.U'V'':$$

Die Producte der Abstände je zweier gegenüberliegender Winkelpuncte einer beliebigen, um eine gegebene Parabel beschriebenen, vierseitigen Figur von einer beliebigen festen Tangente sind einander gleich.

Indem man einer Seite des umschriebenen Vierecks andere Lagen gibt, und die drei übrigen Seiten unverändert lässt, ergibt sich sogleich folgender Satz:

Das Verhältnsss der Abstände der beiden Durchschnittspuncte einer beweglichen Tangente mit zwei festen Tangenten einer gegebenen Parabel von einer dritten festen Tangente ist constant.

Hiernach lassen sich leicht, wenn vier Tangenten einer Parabel gegeben sind, beliebig viele Tangenten derselben bestimmen. —

629. Man sieht auf den ersten Blick, wie alle die vorstehenden Resultate unter einander in der genauesten Beziehung stehen, und alle auf eine einfache Weise aus einem derselben, dem Satze der 624. Nummer, werden hervorgehen müssen.

Zu denselben Resultaten kommen wir auch noch durch Elimination von μ. Wenn wir z. B. $A = A' = A'' = 1$ setzen, und dann zwischen den beiden Gleichungen:

$$\frac{B+\mu B'}{1+\mu} = B'', \qquad \frac{D+\mu D'}{1+\mu} = D'',$$

μ eliminiren, so kommt:

$$B''(D'-D)+B'(D-D'')+B(D''-D') = 0.$$

Diese Gleichung ist, in Beziehung auf B'' und D'', vom ersten Grade und stellt also, wenn wir diese Grössen als veränderlich, als x und y, betrachten, eine gerade Linie dar und diese gerade Linie geht durch die beiden Puncte (D', B') und (D, B). Auf diese Weise erhalten wir also den Satz der 623. Nummer.

In die übrigen analogen Entwicklungen gehen wir hier nicht ein, sondern thun gleich einen Schritt weiter.

630. Wenn in der allgemeinen Gleichung zweiten Grades (2), welche aus der Verbindung der beiden Gleichungen zweier gegebener Oerter zweiter Classe (1) hervorgeht, zwischen zweien Quotienten irgend zweier Coefficienten-Paare irgend eine Bedingungs-Gleichung gegeben ist, so haben diese beiden Quotienten bestimmte, zusammengehörige Werthe. Die Anzahl dieser Werthe ist im Allgemeinen gleich dem Grade der Bedingungs-Gleichung, oder doppelt so gross.

Diese Behauptungen ergeben sich unmittelbar. So haben wir zum Beispiel:

$$\frac{B+\mu B'}{A+\mu A'} = \frac{B''}{A''}, \qquad \frac{D+\mu D'}{A+\mu A'} = \frac{D''}{A''},$$

und wenn wir zu diesen beiden Gleichungen noch irgend eine Bedingungs-Gleichung, von irgend einem n. Grade, in Beziehung auf $\frac{B''}{A''}$ und $\frac{D''}{A''}$, die wir allgemein durch

$$\varphi\left(\frac{D''}{A''}, \frac{B''}{A''}\right) = 0 \qquad (9)$$

bezeichnen wollen, hinzufügen, so sind $\frac{D''}{A''}$ und $\frac{B''}{A''}$ vollkommen bestimmt, und zwar erhalten wir für diese beiden Grössen im Allgemeinen n Paare von Werthen. Es sind diess die Coordinaten-Werthe der Durchschnittspuncte derjenigen geraden Linie, welche der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller derjenigen Oerter zweiter Classe ist, die mit den beiden gegebenen (1) dieselben gemeinschaftlichen Tangenten haben,

mit der durch (9) (wenn wir $\frac{D''}{A''}$ und $\frac{B''}{A''}$ als veränderlich, als y und x, betrachten) dargestellten Curve n. Ordnung. Ganz analoge Fälle ergeben sich offenbar

$$\frac{6.5.4}{1.2.3} = 20.$$

Wir haben ferner auch:

$$\frac{B+\mu B'}{A+\mu A'} = \frac{B''}{A''}, \qquad \frac{F+\mu F'}{D+\mu D'} = \frac{F''}{D''},$$

und wenn wir zwischen diesen beiden Gleichungen μ climiniren, so kommt:

$$(D'A-DA')\frac{B''}{A''}\cdot\frac{F''}{D''}+(A'F-AF')\frac{B''}{A''}+(DBD'-B)\frac{F''}{D''}+(F'B-FB') = o,$$

eine Gleichung, die nicht mehr, wie in den vorigen 20 Fällen, sich, in Beziehung auf die Quotienten $\frac{B''}{A''}$ und $\frac{F''}{D''}$, auf den ersten Grad reducirt. Wenn also zwischen denselben beiden Quotienten noch eine Bedingungs-Gleichung irgend eines n. Grades gegeben ist, so erhalten wir für diese Quotienten eine 2nfache Bestimmung. Es ist gut, zu bemerken, dass in dem vorliegenden Falle eine Bedingungs-Gleichung des m. Grades, in Beziehung auf $\frac{B''}{A''}$ und des m'. Grades, in Beziehung auf $\frac{F''}{D''}$, bis zum (m+m'). Grade, in Beziehung (etwa) auf $\frac{A''}{C''}$, $\frac{B''}{C''}$, $\frac{D''}{C''}$ und $\frac{F''}{C''}$, ansteigt.

Auf ähnliche Weise ergibt sich, dass, wenn zwischen drei, vier oder fünf Quotienten beliebiger Coeffienten-Paare der allgemeinen resultirenden Gleichung (2) eine gegebene Bedingungs-Gleichung Statt findet, diese drei, vier oder fünf Quotienten vollkommen bestimmt sind. Die Zahl der möglichen verschiedenen Bestimmungen ist, wenn ein und derselbe Coefficient als Nenner in allen Quotienten vorkommt (ein Fall, auf den wir uns hier beschränken wollen) gleich dem Grade der gegebenen Bedingungs-Gleichung.

Es ist zum Beispiel:

$$tang^2\eta = \frac{4[(A''E''-B''D'')^2-(A''C''-B''^2)(A''F''-D''^2)]sin^2\vartheta}{[(A''C''-B''^2)+2(A''E''-B''D'')ocs\vartheta+(A''F''-D''^2)]^2},$$

eine Bedingungs-Gleichung des vierten Grades (etwa) zwischen den fünf Coefficienten $\frac{B''}{A''}$, $\frac{C''}{A''}$, $\frac{D''}{A''}$, $\frac{E''}{A''}$ und $\frac{F''}{A''}$. Es gibt daher im Allgemeinen (490) vier verschiedene Hyperbeln, deren Asymptoten einen gegebenen Winkel η mit einander bilden und mit zwei gegebenen Curven zweiter Classe dieselben vier (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten haben, das heisst, demselben Viereck eingeschrieben sind. Es gibt aber insbesondere nur zwei gleichseitige Hyperbeln, die vier gegebene gerade Linien berühren, weil die vorstehende Bedingungs-Gleichung für diesen Fall auf folgende sich reducirt:

$$(A''C''-B''^2)+2(A''E''-B''D'')cos\vartheta+(A''F''-D''^2) = o.$$

Diese Gleichung reducirt sich wiederum, wenn wir $B'' = D'' = o$ setzen, auf folgende:

$$C''+2E''cos\vartheta+F'' = o,$$

auf eine Gleichung des ersten Grades in Beziehung auf die beiden Quotienten $\frac{E''}{C''}$ und $\frac{F''}{C''}$. Es gibt also nur eine einzige gleichseitige Hyperbel, welche die vier Seiten eines Parallelogramms berührt.

Um noch ein Beispiel zu haben, wollen wir folgende Bedingungs-Gleichung nehmen:

$$\frac{E''^2-C''F''}{(C''+F'')^2} = \frac{D''^2}{B''^2},$$

welche, bei der Voraussetzung rechtwinklicher Coordinaten-Axen, ausdrückt, dass der durch den Anfangspunct der Coordinaten gehende Durchmesser der resultirenden Curve mit der ersten Coordinaten-Axe einen Winkel bildet, der demjenigen gleich ist, welchen die durch den Anfangspunct gehenden Tangenten der Curve mit einander bilden. Da diese Bedingungs-Gleichung bis zum vierten Grade steigt, so gibt es im Allgemeinen vier Curven, welche, von einem gegebenen Puncte aus, unter einem Winkel gesehen werden, der demjenigen gleich ist, welchen der durch den gegebenen Punct gehende Druchmesser der Curve mit einer gegebenen geraden Linie bildet.

Auf ähnliche Weise ergibt sich (490), dass es im Allgemeinen sechs Curven zweiter Classe gibt, die von einem gegebenen Puncte aus unter einem solchen Winkel gesehen werden, der dem Asymptoten-Winkel der Curve oder dessen Nebenwinkel gleich ist.

631. Wenn wir auf das zu Anfange der vorigen Nummer angeführte Beispiel nochmals zurückblicken, so finden wir, dass $\frac{B''}{A''}$ und $\frac{D''}{A''}$ unabhängig sind von den Coefficienten C, E, F und C', E', F' der beiden Gleichungen (1). Statt der durch diese beiden Gleichungen dargestellten Curven hätten wir also auch irgend zwei andere Curven nehmen können, in deren Gleichungen die entsprechenden sechs Coefficienten beliebige andere Werthe haben. Indem wir diese Bemerkung auf alle Fälle ausdehnen, erhalten wir folgenden Satz:

Wenn zwischen zwei, drei oder vier Quotienten beliebiger Coefficienten der resultirenden Gleichung (2) *eine gegebene Bedingungs-Gleichung Statt findet, so bestimmen sich diese Quotienten auf dieselbe Weise, wie wir auch die Werthe derjenigen Coefficienten der beiden Gleichungen* (1), *welche den in jenen Quotienten nicht vorkommenden Coefficienteu der resultirenden Gleichung* (2) *entsprechen, anders bestimmen mögen.*

Einzelne Fälle dieses Satzes wollen wir beispielsweise hervorheben und geometrisch deuten.

632. Die beiden Gleichungen (1) stellen, wenn wir in denselben nur die sechs Coefficienten C, E, F und C', E', F' als gegeben betrachten, die übrigen sechs Coefficienten aber unbestimmt lassen, solche zwei beliebige Oerter zweiter Classe dar, die zwei Paare fester, durch den Anfangspunct der Coordinaten gehender gerader Linien berühren. Für solche Oerter zweiter Classe können wir insbesondere auch zwei beliebige Systeme von zwei Puncten nehmen, die auf vier festen, durch den Anfangspunct gehenden, geraden Linien liegen. Die durch die resultirende Gleichung (3) darstellbaren Curven sind also solchen beliebigen Vierecken eingeschrieben, deren Winkelpuncte auf jenen vier festen geraden Linien sich befinden.

Die Gleichung

$$E''^2 - C''F'' = 0$$

drückt aus, dass die bezügliche Curve durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, und zeigt zugleich, dass es, im Allgemeinen, zwei Curven zweiter Classe gibt, die vier gegebene gerade Linien berühren und überdiess durch einen gegebenen Punct gehen. Hiernach ergibt sich folgender Satz:

Alle Curven zweiter Classe, welche durch einen gegebenen Punct gehen, und solchen beliebigen Vierecken eingeschrieben sind, deren vier Winkelpuncte auf vier gegebenen, durch den gegebenen Punct gehenden, geraden Linien liegen; berühren in dem gegebenen Puncte eine von zwei festen geraden Linien.

Bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen erhält man ohne Mühe:

$$tang^2\zeta = \frac{E''^2 - C''F''}{(C''+F'')^2},$$

wenn ζ derjenige Winkel ist, unter welchem die bezügliche resultirende Curve vom Anfangspuncte der Coordinaten aus gesehen wird. Es gibt also im Allgemeinen zwei demselben Viereck eingeschriebene Curven, welche, von einem gegebenen Puncte aus, unter einem gegebenen Winkel gesehen werden. Es gibt nur eine solche Curve, wenn der gegebene Winkel ein rechter ist, denn, wenn $\zeta = \frac{1}{2}\pi$, gibt die letzte Gleichung: $C+F = o$. Hiernach erhalten wir folgenden Satz:

Alle Curven zweiter Classe, welche von einem gegebenen Puncte aus unter einem gegebenen Winkel (oder dessen Nebenwinkel) gesehen werden, und solchen beliebigen Vierecken eingeschrieben sind, deren vier Winkelpuncte auf vier gegebenen, durch den gegebenen Punct gehenden, geraden Linien liegen, berühren zwei feste, durch denselben Punct gehende, gerade Linien.

Wenn der gegebene Winkel kein rechter ist, so erhalten wir für diese beiden festen geraden Linien eine zwiefache Bestimmung.

633. Bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten ist der Ausdruck

$$\frac{C''+F''}{A''} - \frac{B''^2+D''^2}{A''^2}$$

gleich dem doppelten Quadrate der Hälfte einer der beiden gleichen zugeordneten Durchmesser der, durch die resultirende Gleichung dargestellten, Curve zweiter Classe (Ellipse) (512). Wenn wir daher den vorstehenden Ausdruck einer gegebenen Constanten K^2 gleich setzen, so ist die Grösse der gleichen zugeordneten Durchmesser der durch die resultirende Gleichung dargestellten Curve gegeben, und zwar durch eine Gleichung des zweiten Grades zwischen den vier Coefficienten $\frac{B''}{A''}$, $\frac{C''}{A''}$, $\frac{D''}{A''}$ und $\frac{F''}{A''}$. Die Bestimmung dieser Quotienten ist von E und E' durchaus unabhängig. Hiernach ergibt sich folgender Satz (534):

Wenn irgend zwei Rechtecke mit parallelen Seiten gegeben sind und man beschreibt in jedes derselben irgend eine beliebige Curve zweiter Classe, so sind diejenigen Ellipsen, welche mit solchen zwei Curven zweiter Classe dieselben gemeinschaftlichen Tangenten haben und deren gleiche zugeordnete Durchmesser, der Grösse nach, gegeben sind, alle einem von zwei vollkommen bestimmten Rechtecken eingeschrieben, deren Seiten den Seiten der beiden gegebenen parallel und deren Diagonalen den, der Grösse nach, gegebenen gleichen zugeordneten Durchmessern gleich sind.

Wenn wir $K^2 = o$ setzen, so sind alle resultirende Curven gleichseitige Hyperbeln; in dem vorstehenden Satze ändert sich alsdann weiter nichts, als dass zwei Seiten der denselben umschriebenen Rechtecke imaginär werden.

634. Wir haben (511), um noch ein letztes Beispiel zu betrachten:

$$\Omega^2 = \frac{C''}{A''} \cdot \frac{D''^2}{A''^2},$$

wenn wir den Inhalt der resultirenden Curve $\Omega\pi$ nennen, und annehmen, dass die beiden gegebenen Curven die erste Coordinaten-Axe im Anfangspuncte berühren, wonach F, E, F', E' = o und also auch F'', E'' = o. (Vergl. die 653. Nummer). Betrachten wir jenen Inhalt als gegeben, so ist die vorstehende Gleichung eine Bedingungs-Gleichung

des dritten Grades zwischen den beiden Quotienten $\frac{C''}{A''}$ und $\frac{D''}{A''}$. Die Bestimmung dieser Quotienten ist von den Coefficienten B und B' in den beiden Gleichungen (1) unabhängig. Hiernach ergibt sich auf dieselbe Weise, als bisher, folgender Satz:

Wenn zwei Curven zweiter Classe eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Puncte berühren, so gibt es ein, beiden Curven umschriebenes, Dreieck und in dieses Dreieck kann man im Allgemeinen drei Curven zweiter Classe von gegebenem Inhalte beschreiben, welche die eine Seite desselben, die gegebene gerade Linie, in dem gegebenen Puncte berühren. Wenn man, statt jeder der beiden ersten Curven, irgend eine andere nimmt, welche dieselbe im gegebenen Puncte osculirt, und mit ihr eine zweite gemeinschaftliche Tangente hat, die der gegebenen parallel ist (581), *so erhält man ein neues umschriebenes Dreieck und drei neue diesem Dreieck eingeschriebene Curven zweiter Classe von dem gegebenen Inhalte. Auf diesem Wege kommt man zu drei Gruppen sich osculirender Curven, welchen Parallel-Trapezen eingeschrieben sind, deren beide parallele Seiten, von welchen die eine überdiess in demselben Puncte berührt wird, in dieselben beiden geraden Linien fallen.*

635. An das Vorstehende schliessen sich unmittelbar auch noch die nachstehenden Entwicklungen an.

Wenn wir folgende lineare Bedingungs-Gleichung:

$$C''z'^2-2E''z'+F'' = 0, \qquad (1)$$

in der z' irgend eine gegebene Grösse bedeutet, zu Grunde legen, so gibt es ausser der gegebenen Grösse z' noch eine zweite Grösse z'', welche, wenn wir $\frac{E''}{C''}$ und $\frac{F''}{C''}$ als bekannt ansehen, für z' substituirt, die letzte Gleichung befriedigt, und man erhält alsdann:

$$\frac{E''}{C''} = z'+z'', \qquad \frac{F''}{C''} = z'z''.$$

Es ist durch die Gleichung (1) eine, durch den Anfangspunct gehende, eine fünfte, Tangente der resultirenden Curve gegeben und aus der linearen Form der obigen Bedingungs-Gleichung folgt, dass es nur eine einzige solche resultirende Curve gibt. Die zweite durch den Anfangspunct gehende Tangente, deren Richtung z'' entspricht, ist eine einzige und vollkommen bestimmte.

Auf ähnliche Weise, wie bisher, ergibt sich, dass diese zweite durch den Anfangspunct der Coordinaten gehende Tangente für alle resultirenden Curven dieselbe bleibt, wenn wir die beiden gegebenen Curven mit andern vertauschen, welche dieselben, durch den Anfangspunct gehenden, geraden Linien berühren. Es folgt dieser Satz auch unmittelbar aus dem Satze der 623. Nummer und, umgekehrt, dieser Satz ergibt sich sogleich aus jenem.

Wenn wir insbesondere voraussetzen, dass die resultirende Gleichung ein System von zwei Puncten, (y', x') und (y'', x''), darstelle, so erhält dieselbe folgende Form:

$$w^2+(x'+x'')vw+x'x''v^2+(y'+y'')uw+(x'y''+x''y')uv+y'y''u^2 = 0,$$

und man hat:

$$z' = \frac{y'}{x'}, \qquad z'' = \frac{y''}{x''}.$$

Wenn wir ferner annehmen, dass die erste gegebene Curve unveränderlich dieselbe bleibt, an die Stelle der zweiten aber wiederum gehörig bestimmte Puncten-Systeme treten, so gelangen wir zu folgendem Satze:

Wenn irgend eine Curve zweiter Classe gegeben ist, und man beschreibt um dieselbe beliebige Vierecke, deren drei Winkelpuncte auf drei gegebenen, durch einen gegebenen Punct gehenden geraden Linien liegen, so liegen die vierten Winkelpuncte auf einer vierten, ebenfalls durch den gegebenen Punct gehenden, geraden Linie. *)

Wenn wir zwei solcher umschriebenen Vierecke betrachten, welche einen Winkelpunct gemein haben, so folgt aus dem vorstehenden Satze unmittelbar der Satz von BRIANCHON: „dass die drei Diagonalen eines um eine Curve zweiter Classe beschriebenen Sechsecks sich in demselben Puncte schneiden."

636. Wir wollen diesen Paragraphen mit einigen Entwicklungen beschliessen, welche aus einer sehr einfachen Schlussweise sich ergeben und zuerst diese Schlussweise selbst allgemein aufstellen.

Wenn wir die Gleichung eines geometrischen Ortes zweiter Classe zwischen den Coordinaten u, v und w, der Kürze halber, durch

$$U = 0 \qquad (1)$$

darstellen und

$$V = 0 \qquad (2)$$

eine solche Gleichung zwischen denselben veränderlichen Grössen bedeutet, in welcher (was wir in Beziehung auf das Folgende hier gleich voraussetzen) die Coefficienten der gegebenen Gleichung (1) nur auf lineare Weise vorkommen, so können wir, wenn eine zweite Curve zweiter Classe durch die Gleichung

$$U' = 0 \qquad (3)$$

gegeben ist, eine Gleichung

$$V' = 0 \qquad (4)$$

so bilden, dass in V' die Constanten von U' gerade auf dieselbe Weise vorkommen, als in V die Constanten von U. Die Gleichungen (2) und (4) stellen alsdann offenbar zwei Curven ein und derselben beliebigen Classe dar, von welchen die erste mit der ersten gegebenen Curve (1) in derselben geometrischen Beziehung steht, als die zweite mit der zweiten gegebenen Curve (3). Wenn irgend eine dritte Curve zweiter Classe

$$U'' = 0 \qquad (5)$$

gegeben ist, so entspricht derselben eine neue Curve:

$$V'' = 0. \qquad (6)$$

Wenn wir nun

$$U + \mu U' = U'' \qquad (7)$$

setzen, das heisst, wenn wir annehmen, dass die drei gegebenen Curven dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten haben, oder, mit andern Worten, derselben vierseitigen Figur eingeschrieben sind, so ergibt sich auch, was sogleich in die Augen springt:

$$V + \mu V' = V'';$$

das heisst, auch die drei Curven (2), (4) und (6) haben, paarweise genommen, dieselben gemeinschaftlichen Tangenten, deren Anzahl nach der besondern Natur dieser Curven und namentlich nach dem Grade ihrer Gleichungen sich bestimmt.

---

*) Dieser Satz ist nur ein einzelner und besonderer aus einer Reihe von Sätzen und Constructionen, über die H. PONCELET sich in den letzten Capiteln seines öfter schon angeführten Werkes ausführlich verbreitet. (*Prop. proj. Sect.* IV. *Chap.* II., III. p. 290 — 368). Dieselben Resultate fliessen ebenfalls aus allgemeinen und einfachen analytischen Betrachtungsweisen; doch diese gehören nicht hierher, weil sie sich an Gleichungen von höhern Graden anknüpfen.

Wenn ferner

$$W = o \qquad (8)$$

irgend eine Gleichung zwischen den Punct-Coordinaten x, y und z bedeutet, deren Coefficienten durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung (1) sich auf lineare Weise ausdrücken lassen, und

$$W' = o, \qquad W'' = o \qquad (9)$$

solche, in Beziehung auf (3) und (5), ähnlich gebildete Gleichungen bedeuten, und endlich wiederum die Gleichung (7) Statt findet, so ergibt sich

$$W + \mu W' = W'';$$

das heisst, wenn die drei gegebenen Curven derselben vierseitigen Figur eingeschrieben sind, so schneiden sich die drei Curven (8) und (9) in denselben Puncten, deren Anzahl von der Natur dieser Curven abhängt.

637. Wir gehen zur Anwendung des Vorstehenden auf einige besondere Fälle über. Wenn wir die Gleichung:

$$Aw^2 + 2Bvw + Cv^2 + 2Duw + 2Euv + Fu^2 = o, \qquad (1)$$

zu Grunde legen, so erhalten wir:

$$(Aw' + Bv' + Du')w + (Bw' + Cv' + Eu')v + (Dw' + Ev' + Fu')u = o,$$

für die Gleichung des Poles irgend einer gegebenen geraden Linie (w', v', u') (548) und:

$$Aw + Bv + Du = o,$$

für die Gleichung des Mittelpunctes der gegebenen Curve. Hiernach gelangen wir, da in den beiden letzten Gleichungen die Constanten der Gleichung (1) nur in der ersten Potenz vorkommen, sogleich die Sätze der 626. und 622. Nummer, dass die Pole einer beliebigen geraden Linie, in Beziehung auf alle Oerter zweiter Classe, die derselben vierseitigen Figur eingeschrieben sind, und insbesondere auch alle Mittelpuncte solcher Curven, in gerader Linie liegen. Und diese Sätze sind zugleich auch für die besondern Fälle, dass die Seiten der vierseitigen Figur alle oder zum Theil zusammenfallen oder imaginär werden, bewiesen, und auch für Puncten-Systeme, die sich mit jenen Curven zusammenstellen.

638. Dieselben Sätze, von denen der letztere als besonderer Fall des erstern anzusehen ist, ergeben sich auch auf folgende Weise, die in der Allgemeinheit der Bezeichnungsart (welche eine unmittelbare Uebertragung auf Curven beliebiger Classen gestattet) den Vorzug verdient. Aus der Gleichung:

$$U + \mu U' = U'',$$

folgt durch Differentiation:

$$\frac{dU}{dw} + \mu\frac{dU'}{dw} = \frac{dU''}{dw},$$

worin der obige Satz, in Beziehung auf die Mittelpuncte, und

$$\frac{dU}{dv} + \mu\frac{dU'}{dv} = \frac{dU''}{dv}, \qquad \frac{dU}{du} + \mu\frac{dU'}{du} = \frac{dU''}{du},$$

worin der Satz, in Beziehung auf die Pole einer der beiden, beliebig anzunehmenden, Coordinaten-Axen, enthalten ist (549). Wollen wir die Coordinaten-Axen als gegeben betrachten, und den Satz direct, in Beziehung auf die Pole einer beliebigen geraden Linie (w', v', u'), beweisen, so brauchen wir nur folgende Gleichung zu bilden:

$$\left\{\frac{dU}{dw}w' + \frac{dU}{dv}v' + \frac{dU}{du}u'\right\} + \mu\left\{\frac{dU'}{dw}w' + \frac{dU'}{dv}v' + \frac{dU'}{du}u'\right\} = \left\{\frac{dU''}{dw}w' + \frac{dU''}{dv}v' + \frac{dU''}{du}u'\right\},$$

die wir erhalten, wenn wir die letzten drei Gleichungen addiren, nachdem wir zuvor die erste mit w', die zweite mit v' und die dritte mit u' multiplicirt haben.

F. 19. 18. 639. Wenn wir wiederum von der Gleichung (1) der 637. Nummer ausgehen, so stellt, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, nach der 483. Nummer folgende Gleichung:

$$A(y^2+x^2)-2Dy-2Bx+(F+C) = 0, \qquad (2)$$

den geometrischen Ort derjenigen Puncte dar, von welchen aus die durch (1) dargestellte Curve zweiter Classe unter rechten Winkeln gesehen wird. Dieser Ort ist derjenige Kreis, dessen Mittelpunct der Mittelpunct der Curve ist und dessen Radius gleich ist der Quadrat-Wurzel aus der Quadrat-Summe der beiden halben Axen der Curve, also für den Fall der Ellipse, gleich derjenigen Chorde, welche die Endpuncte der beiden Axen derselben verbindet. Da in der Gleichung (2) die Coefficienten der Gleichung (1) nur auf lineare Weise vorkommen, und zwei Kreise sich im Allgemeinen in zwei Puncten schneiden, so ergibt sich folgender Satz:

Alle Oerter zweiter Classe, welche einer gegebenen vierseitigen Figur eingeschrieben sind, werden, im Allgemeinen, von zwei festen Puncten aus, unter rechten Winkeln gesehen.

Wenn wir die drei Puncten-Systeme, die zu diesen Oertern gehören, betrachten, so folgt:

Diejenigen drei Kreise, die man über den drei Diagonalen einer gegebenen vollständigen vierseitigen Figur, als Durchmesser, beschreiben kann, gehen durch dieselben beiden Puncte.

Hiernach können wir jene beiden festen Puncte, die wir Q und Q' nennen wollen, leicht construiren. Sie liegen zu beiden Seiten der geraden Linie (LN), welche die Mittelpuncte aller eingeschriebenen Curven zweiter Classe enthält, gleichweit von ihr entfernt und auf einer solchen geraden Linie, welche auf LN senkrecht steht. Wenn die drei letztbezeichneten Kreise sich nicht in reellen Puncten schneiden, so haben sie wenigstens eine reelle gerade Linie zur (idealen) gemeinschaftlichen Chorde.

Die Construction folgender Aufgabe:

In eine gegebene vierseitige Figur eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die von einem gegebenen Puncte, P, aus unter einem rechten Winkel gesehen wird,

kommt, wenn wir zuerst den Mittelpunct der Curve bestimmen, darauf hinaus, den Mittelpunct desjenigen Kreises zu finden, der durch den gegebenen Punct P und durch die beiden festen Puncte Q und Q' geht. Wir können diesen Mittelpunct auch dann bestimmen, wenn die beiden Puncte Q und Q' imaginär werden (120).

In eine gegebene vierseitige Figur eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben.

Da für den Fall einer gleichseitigen Hyperbel der Kreis (2) auf einen Punct, den Mittelpunct derselben, sich reducirt, so erhalten wir die Mittelpuncte derjenigen beiden Hyperbeln, welche, im Allgemeinen, der Aufgabe Genüge leisten, wenn wir die Chordal-Puncte (363, 124) derjenigen beiden Kreise suchen, welche über irgend zwei Diagonalen der gegebenen vierseitigen Figur, als Durchmesser, beschrieben werden können. Wenn jene Hyperbeln reell sein sollen, so müssen die Durchschnittspuncte dieser beiden Kreise imaginär sein.

640. Wenn wir, wie in der vorigen Nummer, Curven zweiter Classe, die vier gegebene gerade Linien berühren, dadurch bestimmen, dass wir die Mittelpuncte derselben

construiren, so tritt uns die Frage entgegen, was für eine Art von Curven zweiter Classe den gegebenen oder durch Construction gefundenen Mittelpuncten entspricht. Ich nehme um so lieber Erörterungen hierüber mit einiger Ausführlichkeit auf, als wir auch noch in dem folgenden Paragraphen öfter auf dieselben zurückzukommen Veranlassung finden werden.

In der 18. Figur seien die vier stärker gezogenen geraden Linien irgend vier gegebene, welche eine vollständige vierseitige Figur bilden, in der die Mitten der drei Diagonalen M, M' und M'' sind. Durch diese drei Mitten geht diejenige gerade Linie LN, welche der geometrische Ort für die Mittelpuncte derjenigen Oerter zweiter Classe ist, welche von den vier gegebenen geraden Linien berührt werden. Da keine dieser Curven, so lange die gegebenen geraden Linien reell bleiben, imaginär werden kann, so ist jeder Punct der geraden Linie LN nothwendig der Mittelpunct eines reellen Ortes zweiter Classe (nicht der reelle Mittelpunct einer imaginären Curve). Aber ist die Curve, die einem beliebig auf LN angenommenen Puncte entspricht, eine Ellipse oder Hyperbel, und welche Lage hat dieselbe in Beziehung auf die vier gegebenen geraden Linien? Fig. 18.

Aus der 521. Nummer folgt zunächst, dass die Puncte M, M' und M'' jedesmal Uebergänge von Ellipsen zu Hyperbeln anzeigen.

Man überzeugt sich sogleich aus dem Anblick der 18. Figur, dass vom Puncte M'', der Mitte der dritten Diagonalen, aus, nach N hin, die Mittelpuncte solcher Ellipsen liegen, welche die beiden Seiten FD und FE selbst, die beiden Seiten AD und AE aber in ihren Verlängerungen berühren, und dass diese Ellipsen sich einer, nach N hin sich öffnenden, Parabel immer mehr nähern, je weiter der Mittelpunct sich von M'' entfernt. Zwischen M'' und M' liegen die Mittelpuncte eingeschriebener Hyperbeln. Von M' bis M erstrecken sich die Mittelpuncte solcher Ellipsen, die dem Vierecke ABFC (im engern Sinne des Wortes) eingeschrieben sind. Von M nach L hin endlich liegen wiederum die Mittelpuncte von eingeschriebenen Hyperbeln.

Wir wollen ferner die Durchschnittspuncte von LN mit den vier gegebenen geraden Linien durch G, H, I und K bezeichnen, und zunächst Puncte von G aus nach L hin zu Mittelpuncten nehmen. Man sieht leicht ein, dass alsdann ein und derselbe Zweig jeder der bezüglichen Hyperbeln von den vier gegebenen geraden Linien berührt wird, und zwar von FD und FE selbst, von AD und AE in ihren Verlängerungen. Dieser Zweig nähert sich der von den vier gegebenen geraden Linien berührten Parabel immer mehr, während der Mittelpunct, von G aus, immer weiter rückt, und also auch der andere Zweig, der innerhalb des Winkels RAG fällt, sich immer weiter entfernt. Wenn wir den Mittelpunct im Puncte G annehmen, so ist die eine gegebene gerade Linie AB Asymptote der bezüglichen Hyperbel. Wenn der Mittelpunct von G aus nach H hin fortrückt, so berührt ein Zweig der bezüglichen Hyperbel die drei gegebenen geraden Linien FE, FT und ES, ähnlich wie eben, und der andere Zweig die vierte gegebene gerade Linie AU auf derselben Seite, nach welcher hin der Punct R liegt. Wenn wir den Mittelpunct im Puncte H annehmen, so ist AE Asymptote. Wenn der Mittelpunct zwischen H und M fällt, so fallen die beiden Zweige der bezüglichen Hyperbel in die beiden Winkel RAU und DFE und berühren die Schenkel dieser Winkel.

Wir sehen ferner leicht ein, dass, wenn wir den Mittelpunct zwischen M'' und K annehmen, AD und FD den einen, AE und FE den andern Zweig der bezüglichen Hyperbel berühren, und zwar so, dass jener Zweig innerhalb des Winkels ADT, und

dieser innerhalb des Winkels AEV liegt. Wenn wir den Punct K zum Mittelpunct nehmen, so wird DC Asymptote. Wenn der Mittelpunct zwischen K und I angenommen wird, so berührt ein Zweig der bezüglichen Hyperbel die drei Seiten FE, FT und ES, der andere berührt AD auf derjenigen Seite, nach welcher hin der Punct R liegt. Wenn der Mittelpunct mit I zusammenfällt, so ist BE Asymptote. Wenn endlich der Mittelpunct zwischen I und M' fällt, so berührt ein Zweig der bezüglichen Hyperbel FT und ES und liegt innerhalb des Winkels TCS, der andere Zweig berührt AD und BF und liegt innerhalb des Winkels ABW.

Wir erhalten also, indem wir zusammenfassen:

1) ein nach einer Seite hin unbegränztes Segment, GL, für den Ort der Mittelpuncte solcher Hyperbeln, deren ein und derselbe Zweig von den vier gegebenen geraden Linien berührt wird;
2) zwei Segmente, GH und IK, welche die Mittelpuncte solcher Hyperbeln enthalten, deren ein Zweig eine bestimmte gegebene gerade Linie, nemlich diejenige, welche das eben genannte Segment GL begränzt, berührt, und deren anderer Zweig die drei übrigen gegebenen geraden Linien berührt;
3) drei Segmente, HM, M'I und KM'', welche die Mittelpuncte solcher Hyperbeln enthalten, deren ein Zweig irgend zwei der vier gegebenen geraden Linien und deren anderer Zweig die beiden übrigen berührt; (Die drei Segmente beziehen sich auf die drei möglichen Combinationen von vier geraden Linien zu zwei und zwei.)
4) ein Segment, MM', Ort der Mittelpuncte derjenigen Ellipsen, welche dem von den gegebenen geraden Linien gebildeten Viereck, ohne einspringende Winkel, im engern Sinne des Wortes, eingeschrieben sind;
5) endlich ein nach einer Seite hin unbegränztes Segment, M''N, Ort für die Mittelpuncte derjenigen Ellipsen, welche die Seiten jenes Vierecks in ihren Verlängerungen berühren.

Wir bemerken beiläufig, dass immer durch ein Puncten-System hindurch eine Ellipse in eine solche Hyperbel übergeht, deren beide Zweige die vier gegebenen geraden Linien, paarweise genommen, berühren.

Die letzten Resultate erhalten nur leichte Modificationen in dem Falle, dass eine Diagonale der von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten vierseitigen Figur von einer zweiten Diagonalen halbirt wird. Diese zweite Diagonale halbirt alsdann auch die dritte Diagonale und ist der geometrische Ort für die Mittelpuncte der eingeschriebenen Oerter zweiter Classe. Die unter 2) bezeichneten beiden Segmente verschwinden also, oder reduciren sich vielmehr auf zwei Puncte. Jeder dieser beiden Puncte ist der Mittelpunct einer solchen Curve zweiter Classe, welche die beiden in demselben sich schneidenden gegebenen geraden Linien zu Asymptoten hat und die beiden übrigen berührt.

Fig. 19. 641. Wenn zwei Seiten eines einer Curve zweiter Classe umschriebenen Vierecks in ein und dieselbe gerade Linie zusammenfallen, so erhalten wir, statt des Vierecks, ein umschriebenes Dreieck und auf einer Seite desselben den Berührungspunct. Wenn ein solches Dreieck ADC und auf einer Seite desselben der Berührungspunct F gegeben ist, so erhält man den geometrischen Ort für die Mittelpuncte aller eingeschriebenen Curven zweiter Classe, wenn man AF zieht und die beiden Mitten von AF und CD, die Puncte M und M', durch eine gerade Linie LN verbindet. Wenn man sich die 19. Figur aus der 18. dadurch entstanden denkt, dass BE um den Punct F so lange sich dreht, bis B

und D, C und E zusammenfallen, so sieht man, wie alsdann die drei Segmente MI, IK und KM″ verschwinden. Den übrig bleibenden fünf Segmenten entsprechen, wenn wir von L nach N vorwärts gehen, der Ordnung nach, die Mittelpuncte 1. von Hyperbeln, deren ein Zweig AD und AC, in ihren Verlängerungen, und DC in F berührt; 2. von Hyperbeln, deren ein Zweig DC in F und CS und deren anderer Zweig AD berührt; 3. von Hyperbeln, deren ein Zweig die Schenkel des Winkels RAG, und deren anderer Zweig DC in F berührt; 4. von Ellipsen, die dem Dreiecke eingeschrieben sind und 5. endlich von Ellipsen, welche DC in F und AD und AC in ihren Verlängerungen berühren.

Wenn alle Curven zweiter Classe die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks ADC, und zwar die eine derselben, AC, in einem gegebenen Puncte E ihrer Verlängerung, berühren, so erhalten wir, ähnlich wie eben, den geometrischen Ort für die Mittelpuncte solcher Curven, indem wir durch die beiden Mitten von AC und DE, durch die Puncte M′ und M″, die gerade Linie LN legen. Wir können uns die bezügliche 20. Figur aus der 18. dadurch entstanden denken, dass die gerade Linie EB in der letztgenannten Figur sich so lange um den Punct E dreht, bis sie mit EA zusammenfällt. Alsdann vereinigen sich die vier Puncte H, M, M′ und I in dem Puncte M der 20. Figur. Wir erhalten also hier wiederum, indem wir vom Puncte L zum Puncte N fortschreiten, fünf Segmente. Diesen entsprechen, der Ordnung nach, die Mittelpuncte 1. von Hyperbeln, deren ein und derselbe Zweig die drei gegebenen Seiten des Dreiecks, und zwar CD selbst, die beiden übrigen aber in ihren Verlängerungen berührt, und deren anderer Zweig innerhalb des Winkels RAG liegt; 2. von Hyperbeln, deren ein Zweig die Seite DA in ihrer Verlängerung, über A hinaus, berührt, und deren anderer Zweig innerhalb des Winkels DCE liegt und die Schenkel desselben berührt; 3. von Hyperbeln, deren ein Zweig die Seite AD selbst, und deren anderer Zweig die Seiten AC und DC in ihren Verlängerungen, über C hinaus, berührt; 4. von Hyperbeln, deren ein Zweig innerhalb des Winkels ADT liegt und die Schenkel desselben berührt, und deren anderer Zweig AE in E berührt und unterhalb dieser geraden Linie sich erstreckt; 5. von Ellipsen, welche die Seite DC selbst und die beiden Seiten AD und AC in ihren Verlängerungen berühren.

Wenn wir zu Curven übergehen, welche sich in demselben Puncte dreipunctig osculiren, und überdiess eine gegebene gerade Linie berühren, so reduciren sich jene fünf Segmente auf drei. (Indem wir z. B. in der 19. Figur AC und DC zusammenfallen lassen, verschwinden die beiden Segmente HM und MM′). Zweien dieser drei Segmente entsprechen immer Hyperbeln und einem Ellipsen.

Wenn endlich alle Curven sich in demselben Puncte vierpunctig osculiren, so liegen auf der einen Seite dieses Punctes die Mittelpuncte der Ellipsen, auf der andern Seite die Mittelpuncte der Hyperbeln. Von den ursprünglichen acht Segmenten sind nur die beiden äussersten geblieben.

642. Die Resultate der 639. Nummer bestehen auch, nur mit Modificationen, die sich von selbst darbieten, wenn die vier gegebenen geraden Linien alle oder zum Theil zusammenfallen. Wir wollen hier beispielsweise die Construction folgender Aufgabe geben:

Eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben, welche irgend eine gegebene Ellipse oder Hyperbel in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt.

Die drei Kreise, welche, in dem Falle der 18. Figur, sich in Q und Q' schneiden, reduciren sich im vorliegenden Falle offenbar auf den gegebenen Osculationspunct. Beschreibt man daher aus dem Mittelpuncte der gegebenen Curve, als Mittelpuncte, und mit einem Radius, dessen Quadrat der Summe der Quadrate der beiden halben Axen der Curve gleich ist, einen Kreis, so ist der Mittelpunct der verlangten Hyperbel der zugeordnete Pol des gegebenen Osculationspunctes, in Beziehung auf den eben bestimmten Kreis. Die Aufgabe gestattet nur eine, immer reelle, Auflösung und auch in dem Falle, dass dieser Kreis imaginär wird, wenn nemlich die gegebene Curve eine Hyperbel und ihr Asymptoten-Winkel grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, bietet sich sogleich eine Construction jenes zugeordneten Poles dar (124, 130). Wenn die gegebene Curve selbst eine gleichseitige Hyperbel ist, so fällt mit derselben die gesuchte gleichseitige Hyperbel zusammen. —

643. Wenn fünf gerade Linien gegeben sind, so bestimmen dieselben fünf verschiedene vierseitige Figuren, und da nur eine einzige Curve zweiter Classe von fünf gegebenen geraden Linien berührt wird, so erhält man unmittelbar fünf Puncten-Paare, die auf dem Umfange ein und desselben Kreises liegen, desjenigen Kreises nemlich, auf welchem sich irgend zwei, auf einander senkrechte, Tangenten jener Curve schneiden. Wenn die gegebenen geraden Linien theilweise zusammenfallen, so ergeben sich einfache Modificationen. Wir erhalten zum Beispiel folgenden Satz, wenn wir zugleich auf den letzten Satz der 292. Nummer Rücksicht nehmen.

Wenn ein Dreieck ABC und drei gerade Linien AD, BE und CF, welche von den drei Winkelpuncten des Dreiecks nach den gegenüberliegenden Seiten gehen und in demselben Puncte sich schneiden, gegeben sind, und man beschreibt Kreise über den Dreiecks-Seiten BC, AC und AB, und über den gegebenen geraden Linien, so schneiden sich diese Kreise, paarweise genommen, in dreimal zwei Puncten, die auf dem Umfange eines neuen Kreises liegen. Wenn man ferner über den Seiten, FE, FD und DE, des dem gegebenen Dreieck eingeschriebenen Dreiecks DEF drei neue Kreise beschreibt, so sind die Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks A, B und C Chordalpuncte dieser drei Kreise und desjenigen Kreises, auf welchem jene dreimal zwei Durchschnittspuncte liegen.

644. Für den Fall der Parabel reducirt sich die Gleichung (2) der 639. Nummer auf:

$$2Dy+2Bx = F+C, \qquad (3)$$

und stellt die Directrix derselben dar (483). Also:

Die Directricen aller Parabeln, welche drei gegebene gerade Linien berühren, gehen durch einen festen Punct.

Mit den Parabeln, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren, gehören auch drei Systeme von zwei Puncten, von welchen einer ein Winkelpunct des gegebenen Dreiecks ist, und der andere, nach der Richtung der gegenüberstehenden Seite hin, unendlich weit liegt, zusammen. Die Directrix eines solchen Puncten-Systems ist das vom Winkelpuncte des Dreiecks auf die gegenüberliegende Seite gefällte Perpendikel. Es folgt diess aus Gränz-Betrachtungen in der Construction, oder auch aus der Glei-

chung (2), wenn man dieselbe für ein solches Puncten-System, bezogen auf ein schickliches Coordinaten-System, umformt. Also:

Die drei von den Winkelpuncten eines gegebenen Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten desselben gefällten Perpendikel schneiden sich in ein und demselben Puncte. Durch diesen Punct gehen die Directricen aller Parabeln, welche die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berühren.

Da vier gegebene gerade Linien vier verschiedene Dreiecke bestimmen, und nur eine einzige Parabel berühren, so ergibt sich folgender Satz:

Die vier Kreuzungspuncte der von den Winkelpuncten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten Perpendikel in solchen vier Dreiecken, welche von vier gegebenen geraden Linien gebildet werden, liegen in gerader Linie. Diese gerade Linie ist die Directrix derjenigen Parabel, welche die vier gegebenen geraden Linien berührt.

Hiernach können wir leicht die Directrix einer Parabel construiren, wenn vier Tangenten derselben gegeben sind. Wir erhalten dieselbe aber auch noch auf einem andern Wege. Denn wenn wir uns auf die 18. Figur beziehen, in welcher AD, AE, DC und BE die vier gegebenen geraden Linien sind, so ist QQ' die in Rede stehende Directrix. Fig. 18

Wenn die Directrix bekannt ist, so erhalten wir unmittelbar noch vier neue Tangenten, welche auf den gegebenen in ihren Durchschnitten mit der Directrix senkrecht stehen. Wir erhalten ferner auch vier gerade Linien, welche alle durch den Brennpunct gehen. Zwei derselben sind in der 18. Figur Zf und Wf, welche dadurch bestimmt sind, dass die Winkel

$$Q'ZC = fZC, \qquad QWB = fWB.$$

Eine Parabel zu beschreiben, die eine gegebene Curve zweiter Classe in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt.

Man erhält die Directrix der verlangten Parabel, wenn man einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunct der Mittelpunct der gegebenen Curve ist, und dessen Radius einer solchen Chorde dieser Curve gleich ist, welche einen Scheitel ihrer grossen Axe mit einem Scheitel ihrer kleinen Axe verbindet, und dann die Chordale dieses Kreises und des gegebenen Osculationspunctes sucht (102). Wenn man die beiden halben Axen der gegebenen Curve A und B, und denjenigen halben Durchmesser derselben, der durch den Osculationspunct geht, C nennt, so erhält man für den Abstand der Directrix von dem Mittelpuncte der gegebenen Curve sogleich folgenden Ausdruck:

$$\frac{A^2+B^2+C^2}{2C}.$$

Es reducirt sich dieser Ausdruck für den Fall der gleichseitigen Hyperbel auf $\frac{1}{2}C$. Die Directrix derjenigen Parabel also, welche eine gegebene gleichseitige Hyperbel in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt, halbirt den durch diesen Punct gehenden Halbdurchmesser und steht auf demselben senkrecht. Hiernach ergibt sich auch die Construction folgender Aufgabe:

Eine gleichseitige Hyperbel zu beschreiben, die eine gegebene Parabel in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt.

Wenn wir den Mittelpunct der Hyperbel direct suchen, so ergibt sich ebenfalls sogleich, dass er eben so weit von der Directrix der gegebenen Parabel entfernt ist, als der gegebene Osculationspunct, und dass die gerade Linie, welche diese beiden Puncte verbindet, auf der Directrix senkrecht steht. Denn diese Directrix ist die Chordale

solcher Kreise, deren beide Chordalpuncte jene beiden Puncte sind. Zugleich ergibt sich folgender Satz:

Die Mittelpuncte aller gleichseitigen Hyperbeln, welche eine gegebene Parabel berühren, liegen auf einer zweiten Parabel, die mit der gegebenen denselben Parameter und dieselbe Directrix hat, sich aber nach entgegengesetzter Seite hin öffnet.

645. Nach der 481. Nummer stellt die Gleichung:

$$By+Dx-E = 0, \qquad (4)$$

wenn wir wiederum annehmen, dass die bezügliche Curve eine Parabel ist, diejenige gerade Linie dar, welche die Berührungspuncte auf den beiden, den Coordinaten-Axen parallelen, Tangenten verbindet. Diese gerade Linie geht, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, durch den Brennpunct der Parabel, und ist also durch diesen Brennpunct und den Berührungspunct auf der, einer Axe, etwa der ersten, parallelen Tangente vollkommen bestimmt. Folgende Gleichung:

$$2(Dy-Bx)+C-F = 0, \qquad (5)$$

stellt unter denselben Voraussetzungen eine andere gerade Linie dar, welche auf der bestimmten im Brennpuncte senkrecht steht (482). Da die Richtung der ersten Axe jede beliebige sein kann und in den vorstehenden beiden Gleichungen (4) und (5) die Coefficienten aus der Gleichung der bezüglichen Parabel nur auf lineare Weise vorkommen, so gelangen wir zu folgenden Sätzen:

Wenn man an solche Parabeln, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren, Tangenten legt, die einer gegebenen geraden Linie parallel sind, so gehen diejenigen geraden Linien, welche in den verschiedenen Parabeln den Berührungspunct auf der, jener gegebenen geraden Linie parallelen, Tangente mit dem Brennpuncte verbinden, durch ein und denselben Punct. Ferner gehen auch diejenigen geraden Linien, welche auf den eben bezeichneten in den bezüglichen Brennpuncten senkrecht stehen, durch ein und denselben Punct.

Um die beiden festen Puncte, in welchen sich die geraden Linien (4) und (5) schneiden, und die wir Q und Q′ nennen wollen, zu construiren, wollen wir das System eines Winkelpunctes des gegebenen Dreiecks und eines nach der Richtung der gegenüberliegenden Seite hin unendlich weit liegenden Punctes durch die Gleichung:

$$w(Bv+Du) = 0,$$

darstellen und dieses Puncten-System, als mit jenen Parabeln zusammengehörend, betrachten. Der Gleichung (4) entspricht alsdann folgende:

$$By+Dx = 0,$$

woraus man sieht, dass die bezügliche gerade Linie durch jenen Winkelpunct des gegebenen Dreiecks geht und mit der ersten Coordinaten-Axe dieselben Winkel, als die gegenüberliegende Seite des Dreiecks, bildet, ohne derselben parallel zu sein. Die bezügliche gerade Linie (5):

$$Dy-Bx = 0,$$

steht auf der eben bestimmten geraden Linie senkrecht im Anfangspuncte der Coordinaten. Also:

Wenn irgend ein Dreieck gegeben ist, und überdiess eine gerade Linie (der Richtung nach) und man legt durch jeden Winkelpunct des Dreiecks eine solche gerade Linie, die von der gegebenen unter denselben Winkeln geschnitten wird, als die dem Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks gegenüberliegende Seite, so erhält man drei

gerade Linien, welche durch ein und denselben Punct R gehen. Man erhält noch drei andere, durch denselben Punct R′ gehende gerade Linien, wenn man auf den drei eben bezeichneten in den drei Winkelpuncten des gegebenen Dreiecks drei Perpendikel errichtet.

Wenn die gegebene gerade Linie senkrecht auf derjenigen steht, welche den Scheitel-Winkel eines gegebenen, einer Parabel umschriebenen, Dreiecks halbirt, so ist offenbar der Scheitelpunct dieses Winkels der Punct R. Wenn also das gegebene Dreieck ein gleichschenkliges ist, so ist jene gerade Linie der Basis desselben parallel. Der Berührungspunct auf der Basis, der gegenüberliegende Winkelpunct und der Brennpunct der Parabel liegen also in gerader Linie. Betrachten wir, statt des gleichschenkligen Dreiecks, ein gleichseitiges, so erhalten wir insbesondere den nachstehenden bekannten Satz:

Wenn irgend eine Parabel die drei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks berührt, so schneiden sich diejenigen drei geraden Linien, welche die Winkelpuncte des Dreiecks mit den Berührungspuncten auf den gegenüberliegenden Seiten desselben verbinden, in dem Brennpuncte der Parabel.

Wenn wir die Richtung der gegebenen geraden Linie um einen rechten Winkel verändern, so vertauschen sich offenbar die beiden Puncte R und R′ unter einander. Der geometrische Ort für die Puncte R und R′, wenn wir der gegebenen geraden Linie nach einander alle möglichen Richtungen geben, ist also ein und derselbe, er enthält die drei Winkelpuncte des umschriebenen Dreiecks und ist kein anderer als der diesem Dreiecke umschriebene Kreis. Wenn man nemlich von irgend einem Puncte S des in Rede stehenden Ortes drei gerade Linien nach den drei Winkelpuncten des Dreiecks zieht, so resultirt ein Viereck mit seinen beiden Diagonalen, und wenn man die Winkel, welche die gegenüberliegenden Seiten des Vierecks, gehörig verlängert, und die beiden Diagonalen desselben mit einander bilden, durch gerade Linien halbirt, so erhält man sechs solcher Linien, von denen drei auf den drei übrigen senkrecht stehen und unter einander parallel sind. Durch diese zwei mal drei Parallellinien sind solche Richtungen bestimmt, zu welchen der Punct S als Punct R und R′ gehört. Die eben erwähnte Eigenschaft des Punctes S kommt demselben aber nur dann zu, wenn derselbe, mit den drei Winkelpuncten des Dreiecks, auf dem Umfange ein und desselben Kreises liegt: eine Folgerung, welche sich unmittelbar aus der 293. Nummer ergibt.

Der geometrische Ort für die Puncte R und R′ ist zugleich also auch der geometrische Ort für die Brennpuncte aller eingeschriebenen Parabeln (620). Wenn der Brennpunct einer Parabel und zwei Tangenten derselben gegeben sind, so kann man hiernach leicht beliebig viele Tangenten derselben bestimmen. Man begegnet hierbei folgendem Satze:

Wenn zwei gerade Linien und ein Punct gegeben sind, und man beschreibt beliebige Kreise, welche durch diesen Punct und durch den Durchschnitt jener beiden geraden Linien gehen, und dieselben überdiess also noch in irgend zwei Puncten schneiden, so umhüllen diejenigen geraden Linien, die durch diese jedesmaligen beiden Durchschnitte gehen, ein und dieselbe Parabel, welche die beiden gegebenen garaden Linien berührt und den gegebenen Punct zum Brennpuncte hat.

Wir würden uns zu weit von unserm eigentlichen Gegenstande entfernen, wenn wir die vorstehenden Erörterungen hier nicht abbrächen. —

§. 10.

Construction verschiedener Aufgaben.

646. *In ein gegebenes Parallelogramm eine Ellipse zu beschreiben, welche mit einem gegebenen Kreise gleichen Inhalt hat.*

Nach der 534. Nummer können wir, indem wir die Coordinaten-Axen den Seiten des gegebenen Parallelogramms parallel nehmen, alle diesem Parallelogramme eingeschriebene Curven zweiter Classe durch folgende Gleichung darstellen:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0, \qquad (1)$$

wenn wir in dieser Gleichung den Coefficienten E unbestimmt lassen. Wir können ferner $A = 1$ und, indem wir den Mittelpunct des gegebenen Parallelogramms zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen, $B = D = 0$ setzen. Alsdann ist C gleich dem, mit negativem Zeichen genommenen, Quadrate der Hälfte einer derjenigen beiden Seiten des Parallelogrammes, welche der ersten Coordinaten-Axe parallel sind und F gleich dem, mit negativem Zeichen genommenen, Quadrate der Hälfte einer der beiden übrigen Seiten.

Die Grösse der, der ersten und zweiten Coordinaten-Axe parallelen, Seiten des gegebenen Parallelogrammes wollen wir s und t, die Winkel desselben ϑ und $(\pi-\vartheta)$ und endlich den Radius desjenigen Kreises, mit welchem die demselben eingeschriebene Curve (1) gleichen Inhalt haben soll, r nennen. Alsdann ergibt sich nach der 511. Nummer:

$$r^4 = (CF-E^2)\sin^2\vartheta, \qquad (2)$$

mithin:

$$E^2 = CF-\frac{r^4}{\sin^2\vartheta} = \frac{s^2t^2\sin^2\vartheta-r^4}{\sin^2\vartheta} = \frac{\Delta^2-r^4}{\sin^2\vartheta} = \frac{(\Delta+r^2)(\Delta-r^2)}{\sin^2\vartheta},$$

wenn wir den Inhalt des gegebenen Parallelogrammes, der Kürze halber, 4Δ nennen. Wir erhalten also für E zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe. Diesen beiden Werthen von E entsprechen zwei verschiedene Ellipsen; in jeder derselben können wir sogleich zwei Paar zugeordneter Durchmesser bestimmen, und wenn diese bekannt sind, die beiden Axen derselben. Derjenige Durchmesser nemlich, dessen zugeordneter in die zweite Coordinaten-Axe fällt, schneidet in denjenigen Punct der auf der positiven Seite der x liegenden, jener Axe parallelen, Seite des gegebenen Parallelogramms ein, dessen Ordinate gleich ist:

$$s.\frac{E}{C} = -\frac{E}{s}.$$

Derjenige Durchmesser ferner, dessen zugeordneter in die erste Coordinaten-Axe fällt, schneidet die nach der positiven Seite der y liegende Seite des gegebenen Parallelogramms in demjenigen Puncte, dessen Abscisse gleich ist:

$$t.\frac{E}{F} = -\frac{E}{t}.$$

Aus der 498. Nummer endlich und aus der Note zur 623. Nummer folgt, „dass irgend drei Paare zugeordneter Durchmesser einer Curve zweiter Classe, eine Involution „von sechs geraden Linien bilden." Die Bestimmung der Richtung der beiden Axen der Curve, wenn zwei Paare zugeordneter Durchmesser derselben der Richtung nach gegeben sind, kommt also darauf hinaus, wenn vier durch denselben Punct gehende gerade Linien gegeben sind, zwei andere solche gerade Linien zu finden, die auf einander senkrecht stehen und mit jenen eine Involution bilden. (Vergl. die oben angezogene Note IV).

Aus dem Vorstehenden ziehen wir zugleich die Folgerung, dass in den beiden, den Bedingungen der Aufgabe entsprechenden Ellipsen diejenigen beiden Durchmesser, deren zugeordnete einer Seite des gegebenen Parallelogramms parallel sind, diese Seite (wie jede der übrigen Seiten des Parallelogramms) in solchen zwei Puncten schneiden, die gleich weit von den auf dieser Seite liegenden Winkelpuncten abstehen.

Die letzte Aufgabe hat nur dann reelle Auflösungen, wenn

$$r^2 < \Delta,$$

das heisst, wenn der Inhalt eines dem gegebenen Kreise umschriebenen Quadrates kleiner ist, als der Inhalt des gegebenen Parallelogramms.

In ein gegebenes Parallelogramm diejenige Ellipse zu beschreiben, welche den grösstmöglichsten Inhalt hat.

Dem grössten Werthe von r^4, der sich ergibt, wenn wir nach einander für E in (2) verschiedene Werthe substituiren, entspricht:

$$E = 0.$$

Zwei zugeordnete Durchmesser der verlangten Ellipse sind den Seiten des gegebenen Parallelogramms parallel. Der Inhalt jener grössten Ellipse verhält sich zum Inhalte dieses Parallelogramms wie $\pi : 4$.

647. *In ein gegebenes Parallel-Trapez eine Ellipse zu beschreiben, deren Inhalt dem Inhalte eines gegebenen Kreises gleich ist.*

Wenn wir denjenigen Punct, in welchen sich die beiden nicht parallelen Seiten des gegebenen Parallel-Trapezes schneiden, zum Anfangspuncte der Coordinaten, und die erste Axe parallel mit den beiden übrigen Seiten nehmen, so können wir alle dem Parallel-Trapeze eingeschriebene Curven zweiter Classe durch folgende Gleichung darstellen:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0,$$

indem wir in dieser Gleichung alle Coefficienten, B ausgenommen, als ein für alle Mal gegeben betrachten (534). Wenn der Inhalt einer solchen Curve gleich ist dem Inhalte eines Kreises, dessen Radius gegeben und gleich r ist, so kommt, indem wir, der Kürze halber, $A = 1$ setzen (511):

$$r^4 = [-FB^2+2EDB+(CF-E^2-CD^2)]\sin^2\vartheta.$$

Diese Gleichung ist, in Beziehung auf B, vom zweiten Grade; es gibt also, im Allgemeinen, zwei Ellipsen von gegebenem Inhalte, welche die Seiten des gegebenen Parallel-Trapezes berühren. Die Bestimmung der beiden Werthe von B können wir noch dadurch erleichtern, dass wir E gleich Null setzen, das heisst, die zweite Coordinaten-Axe, über deren Richtung durchaus keine Voraussetzung Statt findet, so legen, dass sie zur ersten Axe und den beiden nicht parallelen Seiten des gegebenen Parallel-Trapezes, als vierte Harmonicale, gehört, und also die beiden unter sich und mit der ersten Axe parallelen Seiten halbirt. Alsdann geht die letzte Gleichung in folgende über:

$$r^4 = -[FB^2-C(F-D^2)]\sin^2\vartheta,$$

und wird also, in Beziehung auf B, eine rein quadratische. Indem wir uns auf die 21. Figur beziehen, und $OY'' = y''$, $OY' = y'$, $RS = 2m$, $PQ = 2n$ setzen, erhalten wir:

$$D = \tfrac{1}{2}[y'+y''], \qquad F = y'y'',$$

$$\frac{F}{C} = -\left(\frac{m}{y'}\right)^2 = -\left(\frac{n}{y''}\right)^2, \qquad C = -mn,$$

und mithin

$$y'y''B^2 = \frac{1}{4}y'y''(n-m)^2 - \frac{r^4}{sin^2\vartheta}. \qquad (6)$$

Hiernach ergeben sich leicht die beiden Werthe von B, und somit die Mittelpuncte der verlangten Ellipsen. Sollen diese Ellipsen reell sein, so muss, wenn, wie in der 21. Figur, y' und y'' im Zeichen übereinstimmen, folgende Bedingung Statt finden:

$$r^4 < \frac{1}{4}y'y''(n-m)^2 sin^2\vartheta.$$

Der Inhalt der grösstmöglichsten Ellipse ist hiernach gleich:

$$\frac{1}{2}\pi\sqrt{y'y''}.(n-m)sin\vartheta = \frac{1}{2}\pi\sqrt{mn}.(y'-y'')sin\vartheta, \qquad (7)$$

und dieser grössten Ellipse entspricht:

$$B = 0.$$

Auf diese Weise gelangen wir zu den nachstehenden Sätzen:

Der Mittelpunct derjenigen Ellipse, welche einem gegebenen Parallel-Trapez eingeschrieben ist und den grösstmöglichsten Inhalt hat, ist der Durchschnittspunct derjenigen beiden geraden Linien, welche die Mitten der beiden Paare gegenüberliegender Seiten verbinden.

Solche eingeschriebene Ellipsen, deren Mittelpuncte gleich weit von dem Mittelpuncte dieser grössten Ellipse entfernt liegen, haben gleichen Inhalt.

Aus dem letzten der beiden vorstehenden Sätze folgt, da für die beiden Diagonalen, als Oerter zweiter Classe betrachtet, der Ausdruck, den wir gleich r^4 gesetzt haben, verschwindet, dass wir den Mittelpunct der eingeschriebenen Ellipse von grösstmöglichstem Inhalte auch dadurch erhalten, dass wir die Mitten der beiden Diagonalen durch eine gerade Linie verbinden und diese gerade Linie halbiren. Für die Mitten dieser Diagonalen erhalten wir $B(=x) = \pm\frac{1}{2}(n-m)$, indem wir in (6) $r = 0$ setzen. Ueberschreitet der Werth von B diese Gränzen, so wird r^2 imaginär, und wir erhalten keine Ellipsen mehr, sondern Hyperbeln. In diesen Hyperbeln ist alsdann $r^2\sqrt{-1}$ gleich dem Inhalte irgend eines beliebigen Dreiecks, das durch eine beliebige Tangente von dem Asymptoten-Winkel abgeschnitten wird (532).

Fig. 22. Wann y' und y'' nicht dasselbe Zeichen haben, so kann das gegebene Parallel-Trapez kein gewöhnliches sein, sondern die beiden nicht parallelen Seiten müssen sich, wie in der 22. Figur, nothwendig schneiden. Alsdann wird, für $B = 0$, der Inhalt der bezüglichen Curve zweiter Classe imaginär, diese Curve ist eine Hyperbel und zwar diejenige, in welcher ein, durch eine beliebige Tangente von dem Asymptoten-Winkel abgeschnittenes Dreieck den grösstmöglichsten Inhalt hat. Der Inhalt dieses Dreiecks nimmt ab, bis er für $B = \pm(n-m)$ verschwindet. Wenn B diese Gränzen überschreitet, so sind die entsprechenden Curven Ellipsen, deren Inhalt von Null bis ins Unendliche wachsen kann.

Fig. 21. Der Inhalt des gegebenen Parallel-Trapezes (Fig. 21) ist gleich $(y'-y'')(n+m)sin\vartheta$, und mithin verhält sich derselbe zum Inhalte der grössten eingeschriebenen Ellipse (6) wie

$$2(n+m) : \quad \pi\sqrt{mn}.$$

648. *Eine Ellipse zu beschreiben, die irgend vier gegebene gerade Linien berührt, und mit einem gegebenen Kreise gleichen Inhalt hat.*

Wenn wir den Durchschnittspunct von irgend zwei der vier gegebenen geraden Linien zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen, die erste Coordinaten-Axe zugleich durch den Durchschnittspunct der beiden übrigen gegebenen geraden Linien, dessen

Abstand von dem ersten Durchschnittspuncte wir 2a nennen wollen, legen, und die Richtung der zweiten Coordinaten-Axe so bestimmen, dass dieselbe mit derjenigen geraden Linie, welche der geometrische Ort für die Mittelpuncte aller, die vier gegebenen geraden Linien berührenden, Oerter zweiter Classe ist, so können wir alle diese Curven durch folgende Gleichung: Fig. 23.

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = o, \qquad (1)$$

darstellen, wenn die beiden, übrigens beliebig anzunehmenden, Coefficienten, A und B, folgender Bedingungs-Gleichung Genüge leisten:

$$B = aA, \qquad (2)$$

und die übrigen Coefficienten, oder vielmehr die Quotienten je zweier derselben, ein für alle Mal gegeben sind (538). Wenn wir den Radius des gegebenen Kreises wiederum durch r bezeichnen und der Inhalt des Kreises dem Inhalte der Curve (1) gleich sein soll, so erhalten wir (511):

$$\frac{(CD^2+AE^2-2EBD-ACF+FB^2)\sin^2\vartheta}{A^3} = -r^4,$$

oder, indem wir für B seinen Werth substituiren:

$$\frac{(CD^2+A(E^2-2DEa-CF)+A^2Fa^2)\sin^2\vartheta}{A^3} = -r^4. \qquad (3)$$

Da $\frac{D}{A}$ die Ordinate des Mittelpunctes der bezüglichen Curve ist, so bedeutet, wenn wir, was erlaubt ist, D = 1 setzen, A der reciproke Werth dieser Ordinate, die wir y nennen wollen. Hiernach verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$Cy^3+(E^2-2Ea-CF)y^2+Fa^2y+\frac{r^4}{\sin^2\vartheta} = o. \qquad (4)$$

Wenn wir in dieser Gleichung r = o setzen, so kommt:

$$Cy^3+(E^2-2Ea-CF)y^2+Fa^2y = o;$$

eine Gleichung, deren drei Wurzeln die Ordinaten-Werthe der Mitten (M, M′ und M″) der drei Diagonalen der, von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten, vollständigen vierseitigen Figur geben. Bezeichnen wir diese drei Wurzeln, von welchen die eine, als Folge unserer besondern Coordinaten-Bestimmung, gleich Null ist, durch η, η' und η'', so können wir der Gleichung (4) folgende Form geben:

$$C(y-\eta)(y-\eta')(y-\eta'')+\frac{r^4}{\sin^2\vartheta} = o. \qquad (5)$$

Diese letzte Gleichung bleibt identisch dieselbe, wenn wir die Ordinaten y, η, η' und η'' auf der, die Mittelpuncte aller eingeschriebenen Curven zweiter Classe enthaltenden, geraden Linie, von irgend einem andern Puncte als ihrem Durchschnitte mit der ersten Coordinaten-Axe, etwa vom Puncte N an, rechnen. In dieser Gleichung, durch deren Wurzeln die Mittelpuncte derjenigen Ellipsen, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten, gegeben sind, können wir die Werthe für η, η' und η'' unmittelbar aus der Construction nehmen und es bleibt nur noch C zu bestimmen übrig, während in der Gleichung (4) auch noch E und F zu bestimmen übrig bleiben. Zu diesen Bestimmungen kommen wir ohne Mühe. Denn nach der 538. Nummer geben folgende beide Gleichungen:

$$Cv^2+2Ev+F = o,$$
$$Cv^2+2(E-2Da)v+F = o,$$

die Richtungen der, durch den Anfangspunct und den Punct W gehenden, gegebenen

geraden Linien. Bezeichnen wir diese Richtungen durch v' und v'', v''' und v'''', so ist:

$$\frac{v'+v''}{2}=\frac{E}{C},\qquad -\frac{v'''+v''''}{2}=\frac{E-2Da}{C},$$

folglich:

$$\frac{v'+v''}{2}+\frac{v'''+v''''}{2}=2a\frac{D}{C},$$

oder wenn wir uns auf die Figur beziehen:

$$\frac{M''I+M''H+M''K+M''G}{2a}=2a\frac{D}{C},$$

und endlich:

$$\frac{M''\mu}{a^2}=\frac{\delta}{a^2}=\frac{D}{C},$$

indem wir den Schwerpunct gleicher Gewichte, die wir in den Durchschnittspuncten der geraden Linie LN mit den vier gegebenen geraden Linien uns angebracht denken, μ nennen und $M''\mu = \delta$ setzen. Es ist ferner:

$$\frac{F}{C}=v'v''=v'''v''''=\frac{\varepsilon}{a^2},$$

woraus wir beiläufig sehen, dass

$$M''I.M''H = M''K.M''G = \varepsilon,$$

und endlich:

$$\frac{E}{C}=\frac{v'+v''}{2}=\frac{M''I+M''H}{2a}=\frac{\zeta}{2a}.$$

Wenn wir also, wie in den Gleichungen (4) und (5), D gleich Eins setzen, so kommt:

$$C=\frac{a^2}{\delta},\qquad 2E=\frac{\zeta a}{\delta},\qquad F=\frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Die letzte der eben genannten beiden Gleichungen verwandelt sich, indem wir für C den vorstehenden Werth substituiren, in folgende:

$$a^2 \sin^2\vartheta(y-\eta)(y-\eta')(y-\eta'')+r^4\delta = 0. \qquad (6)$$

Es zeigt diese Gleichung, dass es, im Allgemeinen, drei verschiedene Ellipsen gibt, welche den Bedingungen der obigen Aufgabe Genüge leisten. Man sieht sogleich *a priori*, dass in dem Falle, dass diese Ellipsen alle drei reell sind, die Mittelpuncte zweier derselben zwischen M' und M liegen, und dass der Mittelpunct der dritten von M'' aus nach N hin liegt. Es folgt diess auch aus der letzten Gleichung, welche, wenn wir $\eta''=0$ setzen, in folgende übergeht:

$$y^3-(\eta+\eta')y^2+\eta\eta' y+\frac{r^4\delta}{a^2\sin^2\vartheta}=0.$$

Da alsdann nemlich in der Construction der 23. Figur η, η' und δ positiv sind, so ändern sich in dieser Gleichung von einem Gliede zum folgenden zweimal die Zeichen. Nach einem bekannten Satze sind also, wenn alle Wurzeln reell sind, zwei derselben positiv, und da der Ausdruck:

$$y(y-\eta)(y-\eta'),$$

nothwendig negativ ist, so folgt, dass die positiven Werthe von y beide zwischen η und η' fallen müssen. Da den beiden Puncten M' und M Ellipsen entsprechen, deren Inhalt gleich Null ist, so liegt zwischen M' und M der Mittelpunct einer Ellipse, deren Inhalt ein *maximum* ist. Wenn $r^4\pi$ grösser als dieses *maximum* ist, so werden die beiden positiven Wurzeln der letzten Gleichung imaginär und von den verlangten Ellipsen ist nur eine einzige reell, nemlich diejenige, deren Mittelpunct von M' aus nach N hin liegt.

Wenn wir, statt einer Ellipse von gegebenem Inhalte, eine Hyperbel verlangen, in welcher von dem Asymptoten-Winkel durch irgend eine beliebige Tangente ein Dreieck von gegebenem Inhalte, Δ, abgeschnitten wird, so brauchen wir zur Bestimmung des Mittelpunctes einer solchen Hyperbel in den Gleichungen der vorliegenden Nummer bloss $(-r^4)$ mit Δ^2 zu vertauschen. Es gibt also auch, im Allgemeinen, drei solcher Hyperbeln. Die Mittelpuncte zweier derselben liegen zwischen M″ und M′, der Mittelpunct der dritten fällt über M hinaus nach L hin. Diejenige Hyperbel, auf die sich ein *maximum* von Δ bezieht, hat einen Punct zwischen M″ und M′ zu ihrem Mittelpuncte.

Die Summe der drei Wurzeln der Gleichungen (4) oder (6) und die Summe der Producte je zweier derselben ist von dem gegebenen Inhalte $r^2\pi$ durchaus unabhängig. Die erste dieser beiden Bemerkungen gibt, wenn man zugleich berücksichtigt, dass der Schwerpunct der Fläche einer Ellipse in den Mittelpunct derselben fällt, folgenden Satz.

Die Schwerpuncte der Flächen dreier Ellipsen, welche vier gegebene gerade Linien berühren, und beliebigen, aber gleichen Inhalt haben, ist ein fester Punct, der zugleich auch der Schwerpunct der Mitten der drei Diagonalen der, von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten, vierseitigen Figur ist.

649. *In ein gegebenes Viereck diejenige Ellipse zu beschreiben, deren Inhalt der grösstmöglichste ist.* *)

Wenn wir die Gleichung (6), in Beziehung auf die Grössen r und y, welche sich gegenseitig bestimmen, differentiiren und $dr = 0$ setzen, so ergibt sich zur Bestimmung des Mittelpunctes der verlangten Ellipse folgende Gleichung:

$$y^2 - \tfrac{2}{3}(\eta+\eta'+\eta'')y + \tfrac{1}{3}(\eta\eta'+\eta\eta''+\eta'\eta'') = 0. \qquad (7)$$

Wenn wir $\eta+\eta'+\eta'' = 0$ setzen, das heisst, die Abstände auf der geraden Linie NL von demjenigen Puncte an rechnen, welcher der Schwerpunct der Mitten der drei Diagonalen ist und von dem am Ende der vorigen Nummer die Rede war, so sind die Wurzeln der letzten Gleichung folgende:

$$y = \pm\sqrt{-\left[\frac{\eta\eta'+\eta\eta''+\eta'\eta''}{3}\right]} = \pm\sqrt{\left[\frac{\eta^2+\eta\eta'+\eta'^2}{3}\right]}.$$

Der zweite der beiden vorstehenden Ausdrücke für y zeigt, dass diese Wurzeln immer reell bleiben, so lange die vier gegebenen geraden Linien, und demnach η, η' und η'', reell sind. Wenn wir ferner annehmen, dass, wie in der 23. Figur, $\eta > \eta'$ und $\eta' > \eta''$ so folgt, dass der positive Werth von y nothwendig kleiner ist als η und grösser als η', und also auf einen Punct zwischen M′ und M sich bezieht. Hieraus und aus den Bemerkungen der vorigen Nummer ist ersichtlich, dass der positive Werth von y dem Mittelpuncte der verlangten Ellipse entspricht, der negative Werth hingegen derjenigen Hyperbel, in welchem von dem Asymptoten-Winkel durch eine beliebige Tangente ein Dreieck abgeschnitten wird, dessen Inhalt der möglichst grösseste ist.

---

*) Drei Behandlungen dieser Aufgabe befinden sich in VON ZACH's Monatlicher Correspondenz.
Bestimmung der grössten Ellipse, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt. Von H. Prof. GAUSS. 1810 August S. 112 — 121.
Bestimmung der grössten in ein Viereck, so wie auch in ein Dreieck, zu beschreibenden Ellipse. Von H. Prof. PFAFF in Halle. Sept. S. 223 — 226.
In ein gegebenes unregelmässiges Viereck ABCD diejenige Ellipse zu beschreiben, die den möglichst grössten Flächenraum enthält. Von H. Dr. MOLLWEIDE. S. 227 — 234.

Wenn wir die Abstände auf NL von dem Mittelpuncte der eben bestimmten Ellipse oder Hyperbel an rechnen, wodurch eine Wurzel der Gleichung (7) Null wird, so kommt:

$$\eta\eta'+\eta\eta''+\eta'\eta'' = 0,$$

oder, indem wir durch $\eta\eta'\eta''$ dividiren:

$$\frac{1}{\eta''}+\frac{1}{\eta'}+\frac{1}{\eta} = 0:$$

eine Gleichung, welche eine characteristische Eigenschaft dieser Mittelpuncte ausdrückt.

650. Um die Gleichung (5) zu bilden, brauchen wir bloss die Form des Ausdruckes für r^4 und überdiess den Coefficienten C zu kennen; um die Gleichung (7) zu bilden, brauchen wir auch nicht einmal C zu kennen, sondern es ist hinreichend zu wissen, dass r^4 durch eine ganze Function des dritten Grades von y gegeben ist, und dass diese Function für drei bekannte Werthe von y, die aus der Figur sich unmittelbar ergeben, verschwindet. Wir können überhaupt das *maximum* oder *minimum* einer Function einer veränderlichen Grösse bestimmen, wenn wir wissen, dass diese Function eine algebraische ist, und alle diejenigen Werthe der veränderlichen Grösse kennen, für welche die Function verschwindet und unendlich wird. Wenn die Function, wie im vorliegenden Falle, eine ganze ist, so wird dieselbe für keinen endlichen Werth der veränderlichen Grösse unendlich, und zur Bestimmung des *maximum* oder *minimum* derselben brauchen wir nur diejenigen (reellen oder imaginären) Werthe der veränderlichen Grösse zu kennen, für welche die Function verschwindet und die Zahl dieser Werthe wird durch den Grad der Function angezeigt. Zugleich ist vorauszusehen, dass, im Allgemeinen, die Construction desjenigen Werthes der veränderlichen Grösse, für welchen die Function *maximum* oder *minimum* wird, sich leichter construiren lassen werde, wenn wir von denjenigen Werthen der veränderlichen Grössen, als bekannt, ausgehen, für welche die Function verschwindet oder unendlich wird, als von einer Constanten-Bestimmung, die nur in einer entfernteren Beziehung zur jedesmaligen Aufgabe steht.

Auf diese Bemerkung gründet sich die, als ein Muster der analytischen Behandlungsweise gepriesene, oben angeführte GAUSSische Construction der Aufgabe der vorigen Nummer. In der neuen Bestimmung der Curven durch ihre Tangenten erhalten wir den Ausdruck für r^4 auf die möglichst einfache Weise, und um darzuthun, dass dieser Ausdruck für $y = \eta$, $y = \eta'$ und $y = \eta''$ verschwindet, bedarf es hier durchaus keiner Gränz-Betrachtungen, die nothwendig werden beim Gebrauche von Punct-Coordinaten, weil wir durch diese eine Ellipse, die auf eine gerade Linie sich reducirt hat, auf keine Weise durch eine Gleichung des zweiten Grades ausdrücken können.

651. Wenn von den vier gegebenen geraden Linien zwei zusammenfallen, und wir also solche Curven zweiter Classe betrachten, welche einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben sind, und eine Seite desselben in einem gegebenen Puncte berühren, so können wir alle diese Curven, gerade wie bisher, noch durch die allgemeine Gleichung (1) darstellen, indem wir die letztgenannte Seite zur ersten Axe, einen anliegenden Winkelpunct zum Anfangspuncte nehmen, und die zweite Axe derjenigen geraden Linie parallel legen, welche durch die Mitte dieser Seite (die wir gleich (2a) setzen) und die Mitte derjenigen geraden Linie geht, welche den gegebenen Berührungspunct mit dem gegenüberliegenden Winkelpuncte des Dreiecks verbindet. Wir erhalten alsdann nach der 608. Nummer:

$$F = 0, \qquad \frac{E}{D} = x,$$

indem wir durch x die Abscisse des Berührungspunctes bezeichnen, wonach die Gleichung (4) in folgende übergeht:

$$Cy^3 + (x^2 - 2ax)y^2 + \frac{r^4}{\sin^2\vartheta} = 0. \qquad (8)$$

Wenn der gegebene Berührungspunct auf der Dreiecksseite selbst liegt, so fallen (641) die beiden Puncte M″ und M′ zusammen, und zwei solcher eingeschriebenen Hyperbeln, in welchen von dem Asymptoten-Winkel durch eine beliebige Tangente ein Dreieck von gegebenem Inhalte abgeschnitten wird, sind offenbar imaginär, und es gibt kein *maximum* dieses Inhaltes, oder, mit andern Worten, dieses *maximum* wird gleich Null, indem die bezügliche Hyperbel in zwei Puncte, oder, was dasselbe heisst, in die zwiefache Verlängerung derjenigen Seite des Dreiecks übergeht, welche in die erste Axe fällt. Wenn hingegen der gegebene Berührungspunct auf der Verlängerung der Dreiecksseite liegt, so fallen die beiden Puncte M′ und M zusammen und von den drei Ellipsen von gegebenem Inhalte, die, im Allgemeinen, vier gegebene gerade Linie berühren, werden zwei nothwendig imaginär, so lange der gegebene Inhalt nicht gleich Null ist; es gibt kein *maximum* dieses Inhaltes.

Dasselbe folgt aus der letzten Gleichung. Wir können derselben, indem wir

$$-\frac{x^2 - 2ax}{C} = \eta$$

setzen, folgende einfachere Form geben:

$$Cy^2(y - \eta)\sin^2\vartheta + r^4 = 0. \qquad (9)$$

η bedeutet hier offenbar den Abstand der Mitte der in die erste Axe fallenden Dreiecksseite von der Mitte derjenigen geraden Linie, welche den Berührungspunct auf dieser Seite mit dem gegenüberliegenden Winkelpuncte verbindet. Wenn wir die letzte Gleichung, in Beziehung auf r und y, differentiiren, und $dr = 0$ setzen, so ergibt sich, in Uebereinstimmung mit (7):

$$y(y - \tfrac{2}{3}\eta) = 0.$$

Dem Factor y entspricht die in die erste Coordinaten-Axe fallende Dreiecksseite, oder ihre zwiefache Verlängerung, dem andern Factor $(y - \tfrac{2}{3}\eta)$ entspricht eine grösste Ellipse, wenn der gegebene Berührungspunct auf dieser Seite selbst liegt, oder eine Hyperbel, in welcher von dem Asymptoten-Winkel durch eine beliebige Tangente ein Dreieck, dessen Inhalt ein *maximum* ist, abgeschnitten wird, wenn der gegebene Berührungspunct auf der Verlängerung dieser Seite liegt.

Wenn das gegebene Dreieck unverändert dasselbe bleibt, der gegebene Berührungspunct aber auf der Basis desselben oder ihrer Verlängerung (der ersten Coordinaten-Axe) fortrückt, so ändert sich η offenbar so, dass $\eta\sin\vartheta$ constant und gleich der halben Höhe des gegebenen Dreiecks bleibt. Nennen wir diese Höhe h, so erhalten wir für das in Rede stehende *maximum*:

$$y\sin\vartheta = \tfrac{1}{3}h.$$

Der geometrische Ort für den Mittelpunct der eben bestimmten Ellipse oder Hyperbel, für jede verschiedene Lage des Berührungspunctes auf der Basis des gegebenen Dreiecks, ist also eine, durch den Schwerpunct des Dreiecks gehende, der Basis parallele, gerade Linie.

Aus der Gleichung (9) ergibt sich, wenn wir

$$y^2 \sin^2\vartheta = \tfrac{1}{9}h^2, \qquad C(y-\eta) = -\tfrac{1}{3}C\eta = \tfrac{1}{3}(x^2-2ax),$$

setzen:

$$r^4 = \tfrac{1}{27}(2ax-x^2)h^2 = \tfrac{1}{27}(2a-x)xh^2. \qquad (10)$$

Der Inhalt der grössten eingeschriebenen Ellipse hängt also nur von der Höhe des gegebenen Dreiecks und dem Producte der, durch den gegebenen Berührungspunct auf der Basis desselben bestimmten, beiden Segmenten ab. Wenn man diesen Berührungspunct mit dem gegenüberliegenden Winkelpuncte verbindet, so erhält man zwei Dreiecke, deren Inhalt $\tfrac{1}{2}xh = \Delta'$ und $\tfrac{1}{2}(2a-x)h = \Delta''$. Hiernach kommt:

$$r^4 = \tfrac{4}{27}\Delta'\Delta''.$$

Der Ausdruck für r^4 (10) ist, als Function von x, wiederum eines *maximum* fähig. Diesem entspricht

$$x = a,$$

woraus hervorgeht, dass die grösste Ellipse, welche überhaupt in das gegebene Dreieck beschrieben werden kann, die in die erste Axe fallende Seite desselben, und folglich auch die beiden übrigen Seiten, in ihren Mitten berührt. Der Mittelpunct dieser Ellipse ist also der Schwerpunct des gegebenen Dreiecks. Wenn man den Inhalt dieses Dreiecks Δ''' nennt, so ist:

$$3\sqrt{3}.r^2 = 2\Delta'''.$$

Wir hätten auch, um die grösste Ellipse, welche in das gegebene Dreieck sich beschreiben lässt, zu bestimmen, $y\sin\vartheta = z$ (wo alsdann z der Abstand des Mittelpunctes einer eingeschriebenen Ellipse von der ersten Axe bedeutet) setzen, wonach die Gleichung (8), da

$$C = \frac{2ax-x^2}{\eta} = 2.\frac{2ax-x^2}{h}.\sin\vartheta,$$

in folgende übergeht:

$$(2ax-x^2)\left(\frac{z^3}{h}-z^2\right)+r^4 = 0,$$

und dann diese Gleichung, zuerst in Beziehung auf x, und zuletzt in Beziehung auf z differentiiren können. Auf diese Weise ergibt sich zuvörderst der Satz, dass von allen denjenigen eingeschriebenen Ellipsen, deren Mittelpuncte auf einer der Basis des gegebenen Dreiecks parallelen geraden Linie liegen, diejenige Ellipse den grössesten Inhalt hat, welche die Basis in ihrer Mitte berührt.

652. Wir können aus der Gleichung (3) auch noch andere Constructionen der grössten Ellipse, welche vier gegebene gerade Linien berührt, ableiten. Denn setzen wir in dieser Gleichung $\frac{C}{A} = z$, und nennen diejenigen drei Werthe von z, welche sich auf die drei Diagonalen der von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten vierseitigen Figur beziehen, ζ, ζ' und ζ'', so kommt:

$$\left(\frac{D}{C}\right)^2(z-\zeta)(z-\zeta')(z-\zeta'')+\frac{r^4}{\sin^2\vartheta} = 0.$$

Oder wenn wir $\frac{F}{A} = v$ setzen und die jenen drei Diagonalen entsprechenden Werthe von v durch v, v' und v'' unterscheiden, so ist:

$$\frac{C}{F}\left(\frac{D}{F}\right)^2(v-v)(v-v')(v-v'')+\frac{r^4}{\sin^2\vartheta} = 0;$$

und endlich, wenn wir $\frac{E}{A} = w$ setzen, und diejenigen Werthe von w, welche sich auf

die drei Diagonalen beziehen, ω, ω' und ω'' nennen:

$$\frac{C}{E}\left(\frac{D}{E}\right)^2(w-\omega)(w-\omega')(w-\omega'')+\frac{r^4}{sin^2\vartheta}=0.$$

Bei der Bestimmung des *maximum* fallen aus jeder der drei vorstehenden Gleichungen die Coefficienten der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe aus, und wir sehen, dass, für dieses *maximum*, w dieselbe Function von ω, ω und ω'' ist, als v von v, v' und v'', als z von ζ, ζ' und ζ'' und als y von η, η' und η''. So können wir zum Beispiel, wenn wir die grösste Ellipse bestimmen wollen, welche einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben ist und eine Seite desselben, in einem gegebenen Puncte berührt, $\omega'=\omega''=0$, $\zeta'=\zeta''=0$ und $\eta'=\eta''=0$ setzen, und erhalten alsdann für diese grösste Ellipse:

$$y={}^2\!/_3\eta,\qquad z={}^2\!/_3\zeta,\qquad w={}^2\!/_3\omega. -$$

653. Für solche Curven zweiter Classe, welche die erste Axe im Anfangspuncte der Coordinaten berühren, reducirt sich der Ausdruck:

$$\frac{(AC-B^2)(AF-D^2)-(AE-BD)^2}{A^4},$$

indem wir F = E = 0 setzen, auf:

$$-\frac{CD^2}{A^3}. \qquad (10)$$

Wenn die Curven sich auf der ersten Axe dreipunctig oder vierpunctig osculiren, so ist der Quotient $\frac{C}{D}$ constant (581). Wenn also der Inhalt einer osculirenden Ellipse gegeben und gleich $r^2\pi$ ist und wir jenen constanten Quotienten γ nennen, so kommt:

$$\left(\frac{D}{A}\right)^3=-\frac{r^4}{\gamma sin^2\vartheta}.$$

Diese Gleichung gibt für $\left(\frac{D}{A}\right)$, also für die Abscisse des Mittelpunctes der osculirenden Ellipse immer nur einen einzigen reellen Werth. Dasselbe findet Statt, wenn wir im zweiten Theile dieser Gleichung das Zeichen ändern, und also statt einer Ellipse eine Hyperbel erhalten. In beiden Fällen gibt es kein *maximum*. Dieselben Folgerungen hätten wir auch unmittelbar aus der 648. Nummer ziehen können.

Wir bemerken beiläufig, dass der Ausdruck (10) constant bleibt, so lange die Quotienten $\frac{A}{C}$ und $\frac{D}{C}$ dieselben Werthe behalten und somit erhalten wir folgende Sätze (681):

Alle Ellipsen, welche dieselben beiden, unter sich parallelen, geraden Linien berühren und auf einer derselben sich dreipunctig osculiren, haben gleichen Flächeninhalt. In allen Hyperbeln, welche unter sich und mit jenen Ellipsen auf der einen geraden Linie einen dreipunctigen Contact haben, und die andere gerade Linie berühren, wird von dem Asymptoten-Winkel, durch eine beliebige Tangente, ein Dreieck von constantem Inhalte abgeschnitten und dieser Inhalt ist dem Producte der beiden halben Axen einer jener Ellipsen gleich.

654. *Eine Parabel zu beschreiben, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berührt und deren Parameter ein maximum ist.*

Der vierte Theil (P) des Parameters einer durch die allgemeine Gleichung:

$$2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2=0, \qquad (1)$$

dargestellten Parabel ist, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten-Axen, durch

folgende Gleichung bestimmt (506);

$$\frac{(CD^2-2BDE+FB^2)^2}{(B^2+D^2)^3} = 4P^2. \qquad (2)$$

Wenn wir einen Winkelpunct des gegebenen Dreiecks zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen und die erste Axe der diesem Winkelpuncte gegenüberliegenden Seite parallel legen, so können wir in der allgemeinen Gleichung (1) aller eingeschriebenen Parabeln alle Coefficienten, B ausgenommen, als ein für alle Mal gegeben betrachten (536).

Wenn wir in dem Ausdrucke für $4P^2$ Nenner und Zähler durch C^6 dividiren und dann $\frac{B}{C} = \frac{1}{2x}$ setzen, so kommt nach einer einfachen Reduction:

$$\frac{\left\{4\frac{D^2}{C^2}x^3 - 4\frac{D}{C}\cdot\frac{E}{C}x^2 + \frac{F}{C}x\right\}^2}{\left\{4\frac{D^2}{C^2}x^2+1\right\}^3} = P^2.$$

Es bedeutet hier x dasjenige Segment, welches von einer der zweiten Axe parallelen Tangente auf der ersten Axe abgeschnitten wird; denn wenn wir in der Gleichung (1) $u = 0$ setzen, so kommt $-\frac{w}{v} = \frac{C}{2B} = x$. Mit denjenigen Parabeln, welche die Seiten des gegebenen Dreiecks berühren, ordnen sich drei Puncten-Systeme zusammen (618). Jedes derselben besteht aus einem Winkelpuncte des Dreiecks und einem Puncte, der, nach der Richtung der gegenüberliegenden Seite hin, unendlich weit liegt. In Beziehung auf diese drei Systeme erhalten wir offenbar für x die Abscissen der drei Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks. Eine dieser Abscissen ist, bei unserer Coordinaten-Annahme, gleich Null; die beiden andern wollen wir ξ' und ξ'' nennen. Hiernach erhalten wir aus der letzten Gleichung folgende:

$$16\left(\frac{D}{C}\right)^4 \cdot \frac{[x(x-\xi')(x-\xi'')]^2}{\left(4\frac{D^2}{C^2}x^2+1\right)^3} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{C}{D}\right)^2 \cdot \frac{[x(x-\xi')(x-\xi'')]^2}{\left(x^2+\tfrac{1}{4}\frac{C^2}{D^2}\right)^3} = P^2,$$

Wir haben ferner:

$$\frac{C}{2D} = \frac{F}{2D}\cdot\frac{C}{F} = \frac{\xi'\xi''}{\eta'} = \lambda,$$

indem wir durch η' die Ordinate eines der beiden, nicht in den Anfangspunct fallenden, Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks bezeichnen. Hiernach kommt endlich:

$$\lambda^2\frac{[x(x-\xi')(x-\xi'')]^2}{(x^2+\lambda^2)^3} = P^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass es im Allgemeinen sechs verschiedene Parabeln gibt, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren, und deren Parameter eine gegebene Grösse hat. Für diejenigen Parabeln, in welchen dieser Parameter ein *maximum* ist, erhalten wir, auf dem bekannten Wege, folgende Gleichung:

$$(\xi'+\xi'')x^3+(3\lambda^2-2\xi'\xi'')x^2-2\lambda^2(\xi'+\xi'')x+\lambda^2\xi'\xi'' = 0. \qquad (3)$$

Diese Gleichung zeigt, dass es, im Allgemeinen, drei verschiedene solcher *maxima* gibt.

Der um das gegebene Dreieck, ABC, beschriebene Kreis ist der geometrische Ort für die Brennpuncte aller Parabeln, welche die drei Seiten des Dreiecks berühren. Wenn wir den Brennpunct in einem Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks annehmen, so

erhalten wir, statt der Parabel, ein Puncten-System, und der bezügliche Parameter ist gleich Null. Wenn der Brennpunct auf dem umschriebenen Kreise von einem Winkelpuncte des Dreiecks, etwa von B, nach einem andern, C, fortrückt, so wächst anfänglich der Parameter der bezüglichen Parabel, erreicht dann sein *maximum*, und nimmt endlich wieder ab, bis er im Puncte C wieder ganz verschwindet. Wir sehen hieraus, dass den drei Wurzeln der letzten Gleichung wirklich drei *maxima* entsprechen, und dass diese *maxima* nothwendig alle drei reell sind, so lange das gegebene Dreieck reell bleibt. Zugleich ist auf diesem Wege ersichtlich, dass es, im Allgemeinen, sechs verschiedene Parabeln gibt, welche dem gegebenen Dreiecke eingeschrieben sind und einen Parameter von gegebener Länge haben. Jede Seite des Dreiecks und die Verlängerungen der jedesmalig beiden übrigen Seiten werden von zwei Parabeln von gegebenem Parameter, und von einer Parabel, deren Parameter ein *maximum* ist, berührt.

Die Wurzeln der Gleichung (3) lassen sich nur in besondern Fällen durch Constructionen der Elementar-Geometrie bestimmen. Einem solchen Falle entspricht die Bedingungs-Gleichung:

$$\xi'+\xi'' = 0,$$

welche anzeigt, dass das gegebene Dreieck zwei gleiche Schenkel ha. Alsdann reducirt sich die Gleichung (3), indem eine ihrer Wurzeln unendlich wird, auf folgende:

$$[3\xi'^2+2\eta'^2]x^2 = \xi'^4. \qquad (4)$$

Der unendlich werdende Werth von x zeigt eine Parabel an, deren Axe der zweiten Coordinaten-Axe parallel ist, und man sieht sogleich, dass im vorliegenden Falle beide Axen zusammenfallen. Die beiden andern Werthe von x, welche die letzte Gleichung gibt, sind leicht zu construiren.

Die Gleichung (3) reducirt sich ferner auch in demjenigen Falle, dass zwei Seiten des gegebenen Dreiecks, AC und BC, zusammenfallen, und demnach alle Parabeln zwei gerade Linien AN und AC und die eine derselben, AC, in einem gegebenen Puncte, C, berühren. Der Ort für die Brennpuncte aller solcher Parabeln ist ein Kreis, der die gegebene gerade Linie AN in ihrem Durchschnittspuncte A mit AC berührt, und zugleich durch den gegebenen Berührungspunct C auf AC geht. Wir können hieraus leicht *a priori* entnehmen, dass eines der in Rede stehenden *maxima* von P Null wird, und dass diesem *maximum* x = 0 entspricht, wenn wir der obigen Coordinaten-Bestimmung gemäss den Durchschnittspunct der beiden gegebenen geraden Linien, A, zum Anfangspuncte und diejenige gegebene gerade Linie, auf welcher zugleich der Berührungspunct gegeben ist, AC, zur ersten Axe nehmen. Hiernach erhält man: Fig. 24.

$$\xi' = 0, \quad \eta' = 0, \quad \frac{\eta'}{\xi} = tang\varphi, \quad \xi'' = AC, \quad \lambda = \xi'' cotg\varphi,$$

indem man den Winkel, welche die beiden gegebenen geraden Linien mit einander bilden, durch φ bezeichnet. Alsdann geht die Gleichung (3) in folgende leicht zu construirende Gleichung des zweiten Grades über:

$$x^2+3\xi'' cotg^2\varphi . x - \xi''^2 cotg^2\varphi = 0. \qquad (5)$$

Wenn der Winkel φ, welchen die beiden gegebenen geraden Linien mit einander bilden, ein rechter ist, so sind die Wurzeln der letzten Gleichung beide gleich Null; was weiter nichts heisst, als dass die zweite Coordinaten-Axe, also die gegebene gerade Linie AN, eine Tangente der verlangten Parabel ist. In diesem speciellen Falle kommen wir also auf dem oben eingeschlagenen Wege nicht zur Bestimmung dieser Parabel,

Wir gelangen indess leicht hierzu, wenn wir zur Gleichung (2) zurückgehen und in dieser Gleichung, unserer Coordinaten-Annahme gemäss, $F = o$ und $C = o$ setzen. Auf diese Weise kommt:

$$\frac{B^2D^2E^2}{(B^2+D^2)^3} = P^2,$$

und für das *maximum* von P, als Function von B betrachtet:

$$D^2-2B^2 = o,$$

wonach wir, wenn wir den Winkel, welche die Durchmesser der verlangten Parabel mit der ersten Axe bilden, α nennen, folgende Gleichung erhalten:

$$tang\alpha = \pm\sqrt{2}.$$

Wenn alle in Rede stehenden Parabeln sich dreipunctig osculiren, so ist $\xi' = o$ und $\varphi = o$. Von den beiden Wurzeln der Gleichung (5) ist alsdann die eine Null und die andere unendlich; denn das Product derselben, $[= -(\xi''cotg\varphi)^2]$, erscheint unter der unbestimmten, nicht reducirbaren, Form $o.\infty$, während die Summe derselben $[= -3(\xi''cotg\varphi)cotg\varphi]$ unendlich wird. Wir finden diese Behauptung bestätigt, wenn wir wiederum zur Gleichung (2) zurückgehen, und in dieser Gleichung $F = o$ und $E = o$ setzen. Alsdann kommt nemlich:

$$\frac{C^2D^4}{(B^2+D^2)^3} = 4P^2,$$

und man sieht sogleich, dass $B = o$ dem *maximum* von P entspricht. Es stehen also die Durchmesser der bezüglichen Parabel auf der ersten Coordinaten-Axe, der Tangente im Osculationspuncte, senkrecht. Von allen Parabeln, welche eine gegebene (beliebige) Curve in einem gegebenen Puncte osculiren, hat diejenige den grössten Parameter, deren Axe durch den gegebenen Osculationspunct geht.

Hierhin gehört auch der Fall, dass alle Parabeln, statt drei gegebene gerade Linien zu berühren, einen gegebenen Punct zum Brennpuncte haben und überdiess eine gegebene gerade Linie berühren. Wenn wir den gegebenen Brennpunct zum Anfangspuncte nehmen, und die erste Axe parallel mit der gegebenen geraden Linie legen, so verwandelt sich die Gleichung (2), indem wir $E = o$ und $F = C$ nehmen, in folgende:

$$\frac{C^2}{B^2+D^2} = 4P^2,$$

und hiernach kommt, wenn wir, der bisherigen Bezeichnung entsprechend, den Abstand des gegebenen Punctes von der gegebenen geraden Linie η' nennen:

$$\frac{1}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\eta'^2}} = P^2.$$

Diese Gleichung zeigt, dass es unter den Parabeln, die wir betrachten, nur zwei von gegebenem Parameter gibt. Diese sind leicht zu construiren, denn die letzte Gleichung gibt

$$x = \pm\frac{\eta'}{\sqrt{(\eta'^2-P^2)}}.$$

Dem *maximum* von P entspricht $B = o$ oder $x = \infty$, das heisst, diejenige Parabel hat den grössten Parameter, deren Durchmesser auf der gegebenen geraden Linie senkrecht stehen.

655. Wenn wir in dem Ausdrucke für $4P^2$ (2) Nenner und Zähler durch B^6 dividiren, und dann $\frac{D}{B} = -v$ setzen, so kommt:

$$4P^2 = \frac{\left(\frac{C}{B}v^2+2\frac{E}{B}v+\frac{F}{B}\right)^2}{(1+v^2)^3} = \frac{C^2}{B^2}\frac{[v(v-v')(v-v'')]^2}{(1+v^2)^3},$$

indem wir die Wurzeln der Gleichung

$$Cv^2+2Ev+F = 0$$

v' und v'' nennen. $(-v)$ bedeutet die trigonometrische Tangente derjenigen Winkel, welche die Durchmesser der bezüglichen Parabel mit der ersten Axe bilden; die Seiten des gegebenen Dreiecks bilden mit dieser Axe Winkel, deren trigonometrische Tangenten 0, $(-v')$ und $(-v'')$ sind. Für $v = 0$, $v = v'$ und $v = v''$ verschwindet P; es wird P *maximum*, wenn wir v durch folgende Gleichung, die der Gleichung (3) ganz analog gebildet ist, bestimmen:

$$(v'+v'')v^3+(3-2v'v'')v^2-2(v'+v'')v+v'v'' = 0. \qquad (6)$$

656. Da der geometrische Ort für die Brennpuncte solcher Parabeln, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks berühren, der diesem Dreieck umschriebene Kreis ist, so liegt der Gedanke nahe, zur Bestimmung derjenigen Parabel, deren Parameter ein *maximum* ist, noch einen zweiten geometrischen Ort für den Brennpunct zu suchen. Wenn wir zu diesem Ende zu der 480. Nummer zurückgehen und $\left(-\frac{y}{x}\right) = w$ setzen, so kommt:

$$w = -\frac{2BE-D(C-F)}{2DE+B(C-F)} = \frac{2E+(C-F)v}{2Ev-(C-F)},$$

und hiernach:

$$v = \frac{2E+(C-F)w}{2Ew-(C-F)}.$$

Wenn wir diesen Werth für v in die letzte Gleichung der vorigen Nummer substituiren, so erhalten wir eine Gleichung des dritten Grades in w, welche drei durch den Anfangspunct der Coordinaten gehende gerade Linien darstellt. Diese drei gerade Linien schneiden den, dem gegebenen Dreiecke umschriebenen, Kreis, ausser in dem Anfangspuncte, noch in drei Puncten: den Brennpuncten der gesuchten Parabeln. In dem oben schon betrachteten Falle, dass das gegebene Dreieck ein gleichschenkliges ist, gibt die letzte Gleichung, indem wir

$$2E = -(v'+v'') = 0,$$

setzen;

$$v = -w;$$

das heisst, wenn man durch die Spitze eines gleichschenklichen Dreiecks, welches einer gegebenen Parabel so umschrieben ist, dass diese einen der beiden gleichen Schenkel selbst, den andern Schenkel aber und die Basis in ihren Verlängerungen berührt, zwei gerade Linien zieht, von welchen die eine durch den Brennpunct der Parabel geht und die andere der Axe derselben parallel ist, so bilden diese beiden geraden Linien mit der Basis des gegebenen Dreiecks ein zweites gleichschenkliges Dreieck. Wenn man hiernach durch den Anfangspunct der Coordinaten zwei gerade Linien legt, deren Richtung durch die Wurzeln der Gleishung:

$$(3+2v'^2)v^2-v'^2 = 0, \qquad (7)$$

auf welche im vorliegenden Falle die Gleichung (6) sich reducirt, gegeben ist, so geht jede derselben durch den Brennpunct einer der zu construirenden Parabeln und die jedesmalig übrigbleibende ist den Durchmessern derselben Parabel parallel.

In dem vorliegenden Falle können wir auch die beiden Brennpuncte der verlangten Parabeln durch die Durchschnitte des dem gegebenen Dreiecke umschriebenen Kreises und einer, der Basis desselben parallelen, geraden Linie construiren. Für die Gleichung dieser geraden Linie erhalten wir, wenn wir wieder zur 480. Nummer zurückgehen:

$$y = -\frac{D(C-F)}{2(B^2+D^2)},$$

und wir brauchen alsdann nur noch aus dieser Gleichung, vermittelst der Gleichung (4) oder (7), B zu eliminiren. Nach einigen Reductionen erhält man:

$$\left.\begin{aligned} y &= -\frac{\frac{1}{\lambda}(1+v'^2)}{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{x^2}} \\ y &= -\frac{\lambda-\eta'}{1+\frac{1}{v^2}} \end{aligned}\right\} = \tfrac{1}{3}\eta'.$$

Hiernach ergibt sich eine sehr leichte Construction jener beiden Brennpuncte. Der Brennpunct der dritten Parabel liegt auf der zweiten Coordinaten-Axe. —

667. *In ein gegebenes Parallelogramm diejenige Ellipse zu beschreiben, welche einem Kreise am meisten sich annähert.*

Wenn wir, wie in der ersten Nummer dieses Paragraphen, den Mittelpunct des Parallelogramms zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen und die Axen parallel mit den gegenüberliegenden Seiten desselben legen, so ist

$$Aw^2+Cv^2+2Euv+Fu^2 = 0 \qquad (1)$$

die allgemeine Gleichung aller dem gegebenen Parallelogramme eingeschriebenen Curven zweiter Classe. Alle Coefficienten dieser Gleichung sind als gegeben zu betrachten, mit Ausnahme des Coefficienten E, der von einer Curve zur andern sich ändert, und alle möglichen Werthe erhalten kann.

Wenn wir einen derjenigen Winkel, welche die beiden gleichen zugeordneten Durchmesser einer Ellipse mit einander bilden, ξ nennen, so ist bekanntlich $tang^2 \frac{1}{2}\xi$ gleich dem Verhältniss der beiden Axen der Ellipse. Dieses Verhältniss nähert sich um so mehr der Einheit, je näher der Winkel ξ einem rechten kommt, und je grösser also $sin^2\xi$ wird. Indem wir die allgemeine Gleichung (1) zu Grunde legen und $A=0$ setzen, ist (512):

$$sin^2\xi = 4\frac{(CF-E^2)sin^2\vartheta}{(C+2E cos\vartheta+F)^2}. \qquad (2)$$

Wir sehen hieraus, dass sich, im Allgemeinen, zwei verschiedene Ellipsen von gegebenem Axen-Verhältniss in das gegebene Parallelogramm beschreiben lassen. Für die verlangte Ellipse, in welcher das Axen-Verhältniss der Einheit so nahe kommt als möglich, ergibt sich, auf dem bekannten Wege, zur Bestimmung von E folgende Gleichung:

$$E = -2.\frac{CF}{C+F}.cos\vartheta. \qquad (3)$$

Wenn wir wie in der 646. Nummer construiren, so erhalten wir ohne Mühe diejenigen beiden Durchmesser, deren zugeordnete in die beiden Coordinaten-Axen fallen, und dann die beiden Axen der gesuchten Ellipse.

Die Gleichung (2) geht, wenn wir in dieselbe für E den eben gefundenen Werth substituiren, nach einigen leichten Reductionen in folgende über:

$$sin^2\xi = \frac{4CF sin^2\vartheta}{(C-F)^2+4CF sin^2\vartheta} = \frac{4\Delta^2}{(s^2-t^2)^2+4\Delta^2}, \quad (4)$$

wenn wir, was den letzten Ausdruck betrifft, den Inhalt des gegebenen Parallelogramms 4Δ und die Seiten desselben ($2s$) und ($2t$) nennen. Wir sehen hieraus beiläufig, dass nur, wenn das Parallelogramm gleiche Seiten hat, ein Kreis in dasselbe sich beschreiben lässt. Für das Quadrat der Hälfte eines der beiden gleichen zugeordneten Durchmesser ergibt sich (512)

$$\frac{1}{2}[C+2E cos\vartheta+F] = \frac{(C-F)^2+4CF sin^2\vartheta}{2(C+F)} = \frac{(s^2-t^2)^2+4\Delta^2}{2(s^2+t^2)}$$

und für den Inhalt der Ellipse:

$$\frac{\Delta\sqrt{[(s^2-t^2)^2+4\Delta^2]}\pi}{s^2+t^2},$$

Es ist offenbar, dass derjenige Werth, welchen die Gleichung (4) für $sin^2\xi$ gibt, ein *maximum* und kein *minimum* ist. Denn die Gleichung (3) gibt für E einen einzigen Werth, und $sin^2\xi$ kann dadurch, dass die eingeschriebene Ellipse sich immer mehr einer der beiden Diagonalen des gegebenen Parallelogramms annähert, auf zwiefache Weise beliebig klein werden. Diese Diagonalen bilden den Uebergang von eingeschriebenen Ellipsen zu eingeschriebenen Hyperbeln; sie sind als solche Ellipsen anzusehen, in welchen einer der, von den beiden gleichen zugeordneten Durchmessern gebildeten, Winkel gleich Null ist, oder als solche Hyperbeln, in welchem der Asymptoten-Winkel verschwindet. Nennen wir in irgend einer eingeschriebenen Hyperbel den Asymptoten-Winkel ζ, so ist (490)

$$tang^2\zeta = -4\frac{(CF-E^2)}{(C+2E cos\vartheta+F)^2}. \quad (5)$$

Es ist dieser Ausdruck weder eines *maximum* noch eines *minimum* fähig, denn einem solchen würde wiederum die Gleichung (3) entsprechen, und diese gibt

$$CF-E^2 = \frac{CF}{(C+F)^2}[(C-F)^2+4CF sin^2\vartheta] > 0,$$

wonach die bezügliche Curve keine Hyperbel sein kann (489). Dieselbe Folgerung hätten wir auch aus der Gleichung (4) ziehen können, welche für ξ immer einen reellen Werth, und folglich für ζ immer einen imaginären Werth gibt. *) Es existiren also Hyperbeln von jedem möglichen Axen-Verhältniss und insbesondere gibt es also auch eine gleichseitige Hyperbel. Zur Bestimmung dieser gleichseitigen Hyperbel ergibt sich unmittelbar:

$$E = -\frac{C+F}{2cos\vartheta}.$$

Nur in dem einzigen Falle, dass das gegebene Parallelogramm ein rechtwinkliges ist, wird E unendlich, und es gibt, im eigentlichen Verstande, keine gleichseitige Hyperbel, sondern nur solche Hyperbeln, die einer gleichseitigen Hyperbel so nahe kommen können, als man nur will, ohne aber ganz in eine solche überzugehen.

*) Aus der Nebeneinanderstellung der beiden Gleichungen (2) und (5), oder auch aus den allgemeinern Ausdrücken der 490. und 512. Nummer erhalten wir, indem wir den Asymptoten-Winkel irgend einer Curve zweiter Classe ζ und den Winkel, welchen die gleichen zugeordneten Durchmesser derselben Curven mit einander bilden, ξ nennen, die bemerkenswerthe Gleichung:

$$sin^2\xi = -tang^2\zeta.$$

658. Wir wenden uns sogleich zu der nachstehenden allgemeinern Aufgabe:

In irgend ein gegebenes Viereck diejenige Ellipse, welche einem Kreise so nahe als möglich kommt und diejenige Hyperbel, deren Asymptoten-Winkel der möglichst grösseste ist, zu beschreiben.

Fig. 23. Wenn wir die Coordinaten-Axen wiederum wie in der 23. Figur bestimmen und $OW = 2a$ setzen, so ist

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = 0 \quad (1)$$

die allgemeine Gleichung aller, die vier gegebenen (in der Figur stärker gehaltenen) geraden Linien berührenden, Oerter zweiter Classe, wenn wir in dieser Gleichung A und B als beliebig zu bestimmende Coefficienten, zwischen denen bloss die Bedingungs-Gleichung

$$B = aA$$

Statt findet, betrachten. Die vier übrigen Coefficienten, oder vielmehr die Quotienten je zweier derselben, sind durch die vier gegebenen geraden Linien vollkommen bestimmt. Den Coordinaten-Winkel bezeichnen wir, wie bisher, durch ϑ. Wenn wir alsdann irgend eine durch die Gleichung (1) dargestellte Ellipse betrachten und einen derjenigen Winkel, welchen die gleichen zugeordneten Durchmesser derselben mit einander bilden, ξ nennen, so ist (512):

$$sin^2\xi = 4.\frac{[(AC-B^2)(AF-D^2)-(AE-BD)^2]sin^2\vartheta}{[(AC-B^2)+2(AE-BD)cos\vartheta+(AF-D^2)]^2}. \quad (2)$$

Wenn wir in diesem Ausdrucke für $sin^2\xi$ statt B schreiben aA, dann Nenner und Zähler desselben durch A^4 dividiren und endlich $D = 1$, $\frac{1}{A} = y$ setzen, so kommt:

$$sin^2\xi = 4sin^2\vartheta.\frac{Cy^3+(E^2-CF-2Ea)y^2+Fa^2y}{[y^2-(C+F-2(E-a)cos\vartheta)y+a^2]^2}, \quad (3)$$

und diese Gleichung können wir nochmals in folgende umformen:

$$sin^2\xi = 4Csin^2\vartheta.\frac{(y-\eta)(y-\eta')(y-\eta'')}{[(y-\eta_,)(y-\eta_{,,})]^2}, \quad (4)$$

indem wir die Wurzeln der Gleichung:

$$Cy^3+(E^2-CF-2Ea)y^2+Fa^2y = 0, \quad (5)$$

(von denen eine gleich Null ist) durch η, η' und η'', und die Wurzeln der Gleichung:

$$y^2(C+F-2(E-a)cos\vartheta)y+a^2 = 0, \quad (6)$$

durch $\eta_,$ und $\eta_{,,}$ bezeichnen. Es bedeutet alsdann y die Ordinate des Mittelpunctes der bezüglichen Ellipse, η, η' und η'' bedeuten die Ordinaten der Mitten (M, M' und M'') der drei Diagonalen der, von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten, vollständigen vierseitigen Figur, $\eta_,$ und $\eta_{,,}$ die (reellen oder imaginären) Ordinaten der Mittelpuncte derjenigen beiden gleichseitigen Hyperbeln, welche die vier gegebenen geraden Linien berühren. Wir können diese Ordinaten auf der geraden Linie NL selbst nehmen, und da in der Gleichung (4) nur Differenzen solcher Ordinaten vorkommen, so können wir auch, statt diese Ordinaten vom Puncte M'' an zu bestimmen, dieselben von irgend einem beliebigen Puncte dieser geraden Linie an rechnen.

Die Gleichung (4) zeigt, dass es, im Allgemeinen, vier verschiedene Ellipsen gibt, deren gleiche zugeordnete Durchmesser gegebene Winkel mit einander bilden, oder, mit andern Worten, vier Ellipsen, die einer gegebenen Ellipse ähnlich sind. Es ist offenbar, dass die Mittelpuncte zweier dieser Ellipsen zwischen M' und M, und die Mittelpuncte der beiden übrigen von M'' aus nach N hin fallen. Jedem Puncte, nemlich der

zwischen M′ und M, oder über den Punct M″ hinaus nach N hin liegt, entspricht eine eingeschriebene Ellipse und dieser ein endlicher Werth für $sin^2\xi$. Dieser Werth verschwindet einerseits für $y = \eta'$ und $y = \eta$, und andrerseits für $y = \eta''$ und $y = \infty$ (4). Er wächst also, indem der Mittelpunct der bezüglichen Curve von M′ aus nach M hin fortrückt, erreicht sein *maximum* und nimmt dann wieder ab, bis er für den Punct M verschwindet. Wenn ferner der Mittelpunct von M″ aus nach N hin fortrückt, so wächst der Werth von $sin^2\xi$, erreicht wieder ein *maximum* und nimmt dann wiederum bis zum Verschwinden ab, indem die bezügliche Ellipse sich einer Parabel immer mehr annähert. Aus der Form des Ausdruckes für $sin^2\xi$ folgt (512), dass keines jener beiden *maxima* je die Einheit übersteigt. Wenn ein *maximum* derselben gleich kommt, so entspricht demselben ein Kreis.

Wir erhalten ferner für eine dem gegebenen Viereck eingeschriebene Hyperbel, deren Asymptoten-Winkel wir wiederum ζ nennen wollen: Fig. 25.

$$tang^2\zeta = -4C sin^2\vartheta \frac{(y-\eta)(y-\eta')(y-\eta'')}{[(y-\eta_{,})(y-\eta_{,,})]^2}.$$

Es gibt also, im Allgemeinen, vier Hyperbeln, welche die Seiten eines gegebenen Vierecks berühren, und deren Asymptoten sich unter gegebenen Winkeln schneiden. Es sind hier zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden; es gibt entweder unter den eingeschriebenen Hyperbeln zwei gleichseitige und dann liegen die Mittelpuncte derselben, H und H′, zwischen M″ und M′ oder es gibt deren keine. Wenn in dem ersten Falle der Mittelpunct der eingeschriebenen Hyperbel von M″ nach M′ fortrückt, so wächst anfänglich der bezügliche Werth von $tang^2\zeta$, bis er für den Punct H′ unendlich wird, nimmt dann wieder ab, erreicht ein *minimum*, wächst von Neuem, bis er für den Punct H wieder unendlich wird, und nimmt dann endlich wieder ab, bis er für den Punct M′ verschwindet. In dem zweiten Falle wächst der Werth von $tang^2\zeta$, wenn der Mittelpunct von M″ nach M′ hin rückt, erreicht ein *maximum* und nimmt dann wieder bis zum Verschwinden ab. In beiden Fällen wächst der Werth von $tang^2\zeta$, wenn der Mittelpunct von M nach L hin fortrückt, erreicht ein *maximum* und nimmt dann wiederum bis zum Verschwinden ab, indem die bezügliche Hyperbel einer Parabel sich immer mehr annähert.

In dem ersten Falle gibt es also ein *minimum* von $tang^2\zeta$, dem ein Mittelpunct, der zwischen M″ und M′ liegt, und ein *maximum*, dem ein über M hinaus, nach L hin, liegender Mittelpunct entspricht. Dieses *maximum* ist nothwendig kleiner als jenes *minimum*. Ist der Werth von $tang^2\zeta$ gegeben und grösser als das *minimum*, so liegen die Mittelpuncte der bezüglichen Hyperbeln alle vier zwischen M″ und M′. Ist $tang^2\zeta$ kleiner als das *maximum*, so liegen von den Mittelpuncten der bezüglichen vier Hyperbeln zwei zwischen M″ und M′ und zwei über M hinaus nach L hin. Wenn der Werth von $tang^2\zeta$ gegeben ist und zwischen dem *maximum* und *minimum* fällt, so gibt es nur zwei eingeschriebene Hyperbeln, deren Mittelpuncte zwischen M″ und M′ liegen. Im zweiten Falle gibt es zwei *maxima*. Wenn $tang^2\zeta$ gegeben ist, so liegen die Mittelpuncte zweier bezüglicher Hyperbeln zwischen M″ und M′ und die Mittelpuncte der beiden übrigen über M hinaus nach L hin, und alle vier Hyperbeln können imaginär werden.

Es bleibt uns jetzt noch die Frage zu beantworten übrig, ob in denjenigen Hyperbeln, die einem gegebenen Werthe von $tang^2\zeta$ entsprechen, der Asymptoten-Winkel kleiner oder grösser als ein rechter Winkel ist. Wir sehen sogleich, dass, wenn

wir eine Diagonale der von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten vollständigen vierseitigen Figur als eine Hyperbel, in der die imaginäre Axe bis zum Verschwinden abgenommen hat, betrachten (521), in Beziehung auf dieselbe, ζ gleich Null und nicht gleich π ist. Ein Gleiches findet Statt in Beziehung auf die eingeschriebene Parabel, wenn wir dieselbe als eine Gränze von Hyperbeln ansehen. Da ferner nur durch eine gleichseitige Hyperbel hindurch der Uebergang von Hyperbeln, deren Asymptoten-Winkel kleiner als ein rechter ist, zu solchen, in welchen der Asymptoten-Winkel grösser ist als ein rechter, Statt finden kann, so ist offenbar, dass in demjenigen Falle, wo es keine gleichseitige Hyperbel gibt, welche die vier gegebene gerade Linien berührt, der Asymptoten-Winkel jeder eingeschriebenen Hyperbel kleiner ist als ein rechter. Den beiden *maxima* entsprechen also Hyperbeln, deren Asymptoten-Winkel *maxima* sind, aber einen rechten Winkel an Grösse nicht erreichen. Wenn aber unter den eingeschriebenen Hyperbeln sich zwei gleichseitige befinden, so liegen von M aus nach L hin, und zwischen M′ und H, so wie zwischen H′ und M″ die Mittelpuncte solcher Hyperbeln, deren Asymptoten-Winkel kleiner als ein rechter ist und zwischen H und H′ die Mittelpuncte solcher Hyperbeln, deren Asymptoten-Winkel grösser ist als ein rechter. Dem *maximum* sowol als dem *minimum* von $tang^2\zeta$ entspricht ein *maximum* des Asymptoten-Winkels, der einmal kleiner, das andere Mal grösser als ein rechter ist.

Nach diesen vorläufigen Erörterungen wenden wir uns zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück. Wenn wir $\eta'' = 0$ setzen, das heisst alle Abstände auf der geraden Linie NL vom Puncte M″ an (nach L hin) rechnen, so kommt:

$$sin^2\xi = -tang^2\zeta = 4C sin^2\vartheta \frac{y(y-\eta)(y-\eta')}{[(y-\eta_{,})(y-\eta_{,,})]^2}, \qquad (7)$$

und hiernach erhalten wir, nach dem bekannten Verfahren, zur Bestimmung des *maximum* oder *minimum* der Winkel ξ und ζ folgende Gleichung des vierten Grades:

$$y^4-[2(\eta+\eta')-(\eta_{,}+\eta_{,,})]y^3+3(\eta\eta'-\eta_{,}\eta_{,,})y^2-[(\eta_{,}+\eta_{,,})\eta\eta'-2(\eta+\eta')\eta_{,}\eta_{,,}]y-\eta\eta'\eta_{,}\eta_{,,} = 0. \qquad (8)$$

In dieser Gleichung können $\eta_{,}$ und $\eta_{,,}$ imaginär werden. Wenn wir alsdann

$$\eta_{,}+\eta_{,,} = 2\lambda$$

setzen, so ist λ reell und bedeutet den Abstand M″P der gemeinschaftlichen Chorde derjenigen drei Kreise, welche sich über den drei Diagonalen der, von den vier gegebenen geraden Linien gebildeten, vierseitigen Figur, als Durchmesser, beschreiben lassen, von der Mitte (M″) der dritten Diagonale. (Diese gemeinschaftliche Chorde ist, wenn $\eta_{,}$ und $\eta_{,,}$ imaginär sind, keine ideale.) Ueberdiess ist (6);

$$\eta_{,}\eta_{,,} = a^2,$$

und a bedeutet die Hälfte dieser dritten Diagonale. Hiernach können wir der letzten Gleichung folgende Form geben:

$$y^4-2(\eta+\eta'-\lambda)y^3+3(\eta\eta'-a^2)y^2-2[\lambda\eta\eta'-a^2(\eta+\eta')]y-a^2\eta\eta' = 0. \qquad (9)$$

Nach den vorangeschickten allgemeinen Bemerkungen sind die Wurzeln dieser Gleichung nothwendig alle vier reell und zwei derselben beziehen sich auf Ellipsen, deren Annäherung zum Kreise, und die beiden übrigen auf Hyperbeln, deren Asymptoten-Winkel ein *maximum* ist. Drei Wurzeln dieser Gleichung sind positiv, und die vierte, welche sich auf eine Ellipse bezieht, ist negativ.

Da die Gleichung (8) bis zum vierten Grade ansteigt, so folgt, dass die an die Spitze dieser Nummer gestellte Aufgabe keiner elementaren Construction fähig ist. Wir sehen zugleich, dass der Grad dieser Gleichung sich nur dann auf den dritten reduciren kann,

wenn η, η', $\eta_,$ oder $\eta_{,,}$ verschwinden oder unendlich werden. Die beiden letzten dieser vier Grössen können nur zugleich mit a verschwinden. Setzen wir eine der beiden ersten gleich Null, so fallen von den vier gegebenen geraden Linien zwei in der ersten Axe zusammen, und wir haben solche Curven zweiter Classe zu betrachten, welche die drei Seiten eines gegebenen Dreiecks und zwar eine derselben in einem gegebenen Puncte berühren. Wenn wir η' gleich Null setzen und den gemeinschaftlichen Factor y fortlassen, so verwandelt sich die Gleichung (9) in folgende:

$$y^3-2(\eta-\lambda)y^2-3a^2y+2a^2\eta = 0. \qquad (10)$$

Je nachdem der gegebene Berührungspunct auf der einen Dreiecksseite selbst oder auf ihrer Verlängerung liegt, beziehen sich die Wurzeln dieser Gleichung auf zwei Ellipsen und eine Hyperbel oder auf zwei Hyperbeln und eine Ellipse.

Die letzte Gleichung reducirt sich auf den zweiten Grad, wenn wir $\eta = 0$ setzen, und also solche Curven zweiter Classe betrachten, welche mit einer gegebenen auf der ersten Axe einen dreipunctigen Contact und ausserdem noch eine gemeinschaftliche Tangente haben. Auf diese Weise kommt, wenn wir den gemeinschaftlichen Factor y fortlassen:

$$y^2+2\lambda y-3a^2 = 0. \qquad (11)$$

Von den Wurzeln dieser Gleichung, die beide immer reell sind, bezieht sich die eine auf eine Ellipse, die andere auf eine Hyperbel. Wir erhalten hiernach eine leichte Construction folgender Aufgabe:

Unter denjenigen Curven zweiter Classe, welche eine gegebene Curve derselben Classe in einem gegebenen Puncte osculiren (oder, was dasselbe heisst, eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Puncte berühren und in diesem Puncte einen gegebenen Krümmungshalbmesser haben) und überdiess irgend eine gegebene gerade Linie berühren, diejenige Ellipse, deren Annäherung zum Kreise und diejenige Hyperbel, deren Asymptoten-Winkel ein maximum ist, zu bestimmen.

Wenn wir endlich a = o setzen, und also solche Curven zweiter Classe betrachten, welche eine gegebene in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculiren, so verwandelt sich die letzte Gleichung in folgende:

$$y+2\lambda = 0.$$

Der durch diese Gleichung bestimmte Werth für y ist demjenigen gleich, der sich auf diejenige gleichseitige Hyperbel bezieht, welche die gegebene Curve in dem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt (642), hat aber das entgegengesetzte Zeichen. Aus dieser letzten Bemerkung ist ersichtlich, dass dieser Werth von y einer Ellipse entspricht (641). Also:

Der Mittelpunct derjenigen Ellipse, welche eine gegebene Curve in einem gegebenen Puncte vierpunctig osculirt und dem Kreise am meisten sich annähert, ist so weit von diesem Puncte entfernt, als der Mittelpunct der dieselbe Curve in demselben Puncte vierpunctig osculirenden gleichseitigen Hyperbel.

Diese Ellipse ist hiernach leicht zu construiren (642).

Wenn wir $\eta' = \infty$ setzen, so reducirt sich die Gleichung (9) dadurch, dass eine ihrer Wurzeln unendlich wird, auf folgende:

$$2y^3-3\eta y^2+2(\lambda\eta-a^2)y+a^2\eta = 0. \qquad (12)$$

Die Curven, die wir im vorliegenden Falle betrachten, berühren solche vier gerade Linien, von welchen zwei parallel sind, und je nachdem der Durchschnittspunct der

beiden übrigen geraden Linien zwischen diese beiden parallelen fällt oder nicht, beziehen sich die drei Wurzeln der Gleichung (12) auf zwei Ellipsen und eine Hyperbel oder auf zwei Hyperbeln und eine Ellipse.

Wenn wir in der Gleichung (12) $\eta = 0$ oder auch, wenn wir in der Gleichung (10) $\eta = \infty$ setzen, das heisst, wenn wir solche Curven betrachten, welche zwei gegebene parallele gerade Linien und überdiess eine dritte gegebene gerade Linie in einem gegebenen Puncte berühren, so kommt:

$$y^2 = a^2.$$

Die beiden Wurzeln dieser Gleichung bestimmen zwei Ellipsen oder zwei Hyperbeln, je nachdem der gegebene Berührungspunct auf der dritten geraden Linie zwischen den beiden parallelen liegt oder nicht. Wenn man über demjenigen Segmente jener dritten geraden Linie, welches von diesen beiden parallelen geraden Linien begränzt wird, als Durchmesser, einen Kreis beschreibt, und in diesem Kreise denjenigen Durchmesser zieht, der den letztgenannten geraden Linien parallel ist, so sind die Scheitel dieses Durchmessers die Mittelpuncte der beiden zu bestimmenden Curven. Und zwar kommt, bei dieser Bestimmung, die Lage des gegebenen Berührungspunctes auf der dritten gegebenen geraden Linie auf keine Weise in Betracht.

§. 11.

Allgemeine Schemata.

659. Es seien:

$$U = 0, \qquad U' = 0, \qquad U'' = 0, \tag{1}$$

die Gleichungen irgend dreier Oerter zweiter Classe, welche zwei gemeinschaftliche Tangenten haben, und

$$w = 0$$

sei die Gleichung des Durchschnittspunctes dieser beiden Tangenten. Alsdann erhalten wir, bei gehöriger Verbindung der drei Gleichungen (1), Gleichungen von folgender Form:

$$\begin{aligned} U - \mu'' U' &= w.u'' = 0, \\ U - \mu' U'' &= w.u' = 0, \\ U' - \mu U'' &= w.u = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Wenn wir die beiden ersten dieser drei Gleichungen von einander abziehen, so kommt:

$$\mu'' U' - \mu' U'' = w(u' - u''),$$

eine Gleichung, die, was ihre Form zeigt, mit der dritten der Gleichungen (2) identisch sein muss, wonach wir

$$\mu'' u = u' - u''$$

erhalten. Es liegen also die drei, durch folgende Gleichungen:

$$u'' = 0, \qquad u' = 0, \qquad u = 0,$$

dargestellten, Puncte in gerader Linie. Hiernach erhalten wir folgenden Satz:

Wenn irgend drei Oerter zweiter Classe zwei (reelle oder imaginäre) gemeinschaftliche Tangenten haben, so liegen die Durchschnittspuncte der noch übrigen dreimal zwei (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten in gerader Linie.

Wenn die drei in Rede stehenden Oerter zweiter Classe eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Puncte berühren, so haben je zwei derselben einerseits zwei zusammenfallende Durchschnittspuncte und andrerseits zwei zusammenfallende gemeinschaftliche

Tangenten. Es gehen also zu gleicher Zeit die drei gemeinschaftlichen Chorden je zweier Oerter durch denselben Punct (383), und die drei Durchschnittspuncte der drei Paare gemeinschaftlicher Tangenten liegen in gerader Linie.

Wenn die drei Oerter zweiter Classe Parabeln sind, so liegt eine gemeinschaftliche Tangente je zweier derselben unendlich weit. Da alle unendlich weit entfernt liegenden geraden Linien derselben Ebene als zusammenfallend zu betrachten sind, so geschieht den Voraussetzungen des vorstehenden Satzes Genüge, wenn alle drei Parabeln eine einzige gegebene gerade Linie berühren, oder (wenn diese gerade Linie, indem sie parallel mit sich selbst bleibt, immer weiter fortrückt) wenn die Durchmesser derselben parallel sind (585).

Endlich können wir auch für die drei in Rede stehenden Oerter drei solche nehmen. welche einen gemeinschaftlichen Brennpunct haben.

660. Wenn wir mit zwei Curven zweiter Classe ein System von zwei Puncten zusammenstellen wollen, so können wir diese Puncte auf zwei gemeinschaftlichen Tangenten jener Curven beliebig annehmen. Hiernach erhält man sogleich aus dem obigen Satze den nachstehenden. Fig. 26.

Wenn man von irgend zwei Puncten (C, C') zweier gemeinschaftlicher Tangenten zweier gegebener Curven zweiter Classe noch vier Tangenten an die beiden Curven legt, so bilden diese Tangenten ein Viereck, dessen eine Diagonale (SS') durch einen festen Punct (P) geht, der unveränderlich derselbe bleibt, wie auch jene beiden Puncte (C, C') auf den gemeinschaftlichen Tangenten fortrücken mögen.

Nach dem vorstehenden Satze ergibt sich, wenn zwei gemeinschaftliche Tangenten zweier gegebener Curven zweiter Classe gegeben sind, eine leichte Construction des Durchschnittspunctes der beiden übrigen gemeinschaftlichen Tangenten und also können wir auch diese Tangenten selbst, in dem Falle, dass dieselben reell sind, construiren.

Wenn die beiden gegebenen Curven Parabeln sind, so können wir auf eine doppelte Weise den letzten Satz auf dieselben übertragen. Einmal können wir nemlich die beiden Puncte C und C' auf zweien der drei gemeinschaftlichen Tangenten dieser Parabeln annehmen; alsdann liegen die beiden Constructions-Puncte S und S' auf einer sich immer parallel bleibenden geraden Linie. Das andere Mal können wir einen Punct, C, auf einer beliebigen gemeinschaftlichen Tangente und den andern Punct, C', auf der unendlich weit entfernten vierten gemeinschaftlichen Tangente annehmen, das heisst, nach beliebiger Richtung zwei parallele Tangenten an die beiden gegebenen Parabeln ziehen. Der feste Punct, P, ist alsdann der Durchschnitt derjenigen beiden gemeinschaftlichen Tangenten, auf denen C nicht angenommen worden ist.

661. Der Satz der vorigen Nummer erleidet mancherlei Modificationen, wenn zwischen den beiden gegebenen Curven besondere Beziehungen Statt finden. Wir wollen sogleich zwei sich dreipunctig osculirende Curven betrachten. Alsdann fallen drei gemeinschaftliche Tangenten in der Tangente im Osculationspuncte zusammen und es gibt ausserdem nur noch eine einzige gemeinschaftliche Tangente. Nehmen wir also die beiden Puncte C und C' auf der Tangente im Osculationspuncte beliebig an, so ist der feste Punct, P, der Durchschnitt dieser Tangente mit der einzig noch übrigen gemeinschaftlichen Tangente. Also: Fig. 27.

Wenn man von irgend zwei beliebigen Puncten der Tangente im Osculationspuncte zweier oder mehrerer sich dreipunctig osculirender und überdiess dieselbe gerade Linie berührender Curven zweiter Classe an jede derselben noch zwei Tangenten zieht, so liegt der Durchschnittspunct dieser beiden Tangenten auf einer festen geraden Linie, und diese feste gerade Linie geht durch den Durchschnitt der gemeinschaftlichen Tangente mit der Tangente im Osculationspuncte.

An diesen Satz knüpft sich die Construction folgender Aufgabe:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte osculirt, und überdiess irgend zwei gegebene gerade Linien berührt.

Es sei (Fig. 27) O der gegebene Punct, in welchem die gegebene Curve OM osculirt werden soll, die Tangente in diesem Puncte werde von den beiden gegebenen, in S sich schneidenden, geraden Linien in den beiden Puncten C und C′ geschnitten. Von diesen beiden Puncten lege man an die gegebene Curve die beiden Tangenten CS′ und C′S′, deren Durchschnittspunct S′ ist. Endlich ziehe man die gerade Linie SS′, welche der Tangente in O in demjenigen Puncte, P, begegnet, durch welchen zugleich die gemeinschaftliche Tangente der gegebenen und der gesuchten Curve geht. Wenn diese gemeinschaftliche Tangente gegeben oder durch Construction gefunden worden ist, so gibt eine einfache Construction, welche sich sogleich darbietet, beliebig viele Tangenten der zu construirenden Curve.

Eine Parabel zu beschreiben, welche eine gegebene Curve zweiter Classe in einem gegebenen Puncte osculirt und überdiess eine gegebene gerade Linie berührt.

F. 27, 28. Diese Aufgabe ist nur eine Modification der vorigen; wir brauchen nur anzunehmen, dass eine der beiden vorhin gegebenen geraden Linien, etwa C′S, und also auch die beiden Puncte S und C′ unendlich weit entfernt liegen, wie in der 28. Figur.

Fig. 28. *Eine Parabel zu beschreiben, die eine gegebene Curve zweiter Classe in einem gegebenen Puncte osculirt und deren Durchmesser einer gegebenen geraden Linie parallel sind.*

Diese Aufgabe ist wiederum eine Modification der vorigen. Wenn die gerade Linie CS die gegebene ist und, parallel mit sich selbst, immer weiter fortrückt, so nähert sich die Tangente CS′ immer mehr der Tangente C′S′, der Punct S′ immer mehr dem Berührungspuncte σ' auf der letztgenannten Tangente. Wenn wir daher $\sigma'\pi$ parallel mit der gegebenen geraden Linie ziehen, so erhalten wir denjenigen Punct, π, durch welchen die gemeinschaftliche Tangente der gegebenen und der gesuchten Curve geht.

Fig. 27. 662. Wenn wir annehmen, dass der Punct C′ mit dem Puncte C zusammenfällt, so erhalten wir die Berührungspuncte σ und σ' statt der Puncte S und S′. Also:

Wenn man von irgend einem Puncte der Tangente im Osculationspuncte zweier Curven zweiter Classe zwei Tangenten an dieselben legt, so liegen die beiden Berührungspuncte auf diesen Tangenten mit dem Durchschnitte der gemeinschaftlichen Tangente beider Curven und jener Tangente im Osculationspuncte in gerader Linie.

Nach diesem Satze können wir sogleich in den Aufgaben der vorigen Nummer auf jeder Tangente den Berührungspunct finden. Wir erhalten zum Beispiel den Berührungspunct σ auf CS, wenn wir durch P und den Berührungspunct σ', der auf der gegebenen Curve liegt, eine gerade Linie legen.

Wir können hiernach ferner auch folgende Aufgabe construiren:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, welche eine gegebene in einem gegebenen Puncte osculirt, eine gegebene gerade Linie berührt und durch einen gegebenen Punct geht.

Wir wollen zuvörderst voraussetzen, dass die gegebene gerade Linie die gegebene Curve berühre. Demnach sei OM die gegebene Curve, O der Osculationspunct, σ der gegebene Punct und PT die gegebene gerade Linie, welche der Tangente im Osculationspuncte in P begegne. Man ziehe die gerade Linie σP, von welcher die gegebene Curve in σ' und σ, geschnitten werde. In diesen beiden Puncten construire man die Tangenten, welche der Tangente in O in zwei Puncten begegnen. Wenn man diese Durchschnittspuncte (von welchen C der eine ist) mit dem Puncte σ verbindet, so erhält man zwei Tangenten derjenigen beiden Curven, welche den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten.

Wenn die gegebene gerade Linie keine Tangente der gegebenen Curve ist, so können wir leicht irgend eine andere Curve zweiter Classe construiren, welche die gegebene in dem gegebenen Puncte osculirt und die gegebene gerade Linie berührt: und diese Curve alsdann statt der gegebenen betrachten. Es bieten sich in dieser Construction mehrere Vereinfachungen dar.

Als Modification der letzten Aufgabe können wir folgende ansehen:

Eine Parabel zu beschreiben, welche eine gegebene Parabel (beliebige Curve zweiter Classe, beliebige Curve) in einem gegebenen Puncte osculirt und durch einen zweiten gegebenen Punct geht.

663. Wenn man, statt die Puncte C und C′ beide auf der Tangente im Osculationspuncte zweier Curven zweiter Classe anzunehmen, einen derselben auf der gemeinschaftlichen Tangente annimmt, so ergibt sich folgender Satz: Fig. 29.

Wenn man von irgend zwei Puncten der Tangente im Osculationspuncte und der gemeinschaftlichen Tangente zweier sich dreipunctig osculirender Curven zweiter Classe an jede Curve noch zwei Tangenten zieht, so schneiden sich solche zwei Tangenten-Paare in solchen zwei Puncten, die mit dem Osculationspuncte in gerader Linie liegen.

Hiernach ergibt sich eine neue Construction der ersten Aufgabe der 661. Nummer, die auch dann unmittelbar ihre Anwendbarkeit behält, wenn der Durchschnitt der Tangente im Osculationspuncte und der gemeinschaftlichen Tangente der gegebenen und der zu construirenden Curve sehr weit entfernt liegt. Es sei wiederum OM die gegebene Curve, die in O osculirt werden soll, es seien SC und SC′ die beiden zu berührenden geraden Linien. Den Durchschnitt dieser beiden geraden Linien, S, verbinde man mit O, lege von C, dem Durchschnitte einer (beliebigen) derselben mit der Tangente in O die Tangente CS′ an die gegebene Curve, von welcher OS in S′ geschnitten werde, und endlich von S′ die Tangente S′C″ an die gegebene Curve, von welcher SC′ in C′ geschnitten werde. C′ ist alsdann ein Punct der gemeinschaftlichen Tangente der gegebenen und der zu construirenden Curve.

Um (etwa) auf der gegebenen geraden Linie CD den Berührungspunct zu bestimmen, legen wir vom Puncte D aus, in welchem diese gerade Linie der gemeinschaftlichen Tangente DC′ begegnet, die Tangente Dσ' an die gegebene Curve, und verbinden dann den Punct σ', in welchem diese Tangente und die Tangente CS′ sich schneiden, mit dem Osculationspuncte O durch eine gerade Linie. Diese gerade Linie bestimmt alsdann auf CS den gesuchten Berührungspunct σ.

Man erhält ebenfalls aus dem Vorstehenden andere Constructionen für die übrigen Aufgaben der beiden vorigen Nummern.

664. Wenn wir zwei sich doppelt berührende Curven mit einem Systeme von zwei Puncten zusammmenstellen, so erhalten wir folgende beiden Sätze:

Wenn man von irgend zwei Puncten der beiden gemeinschaftlichen Tangenten zweier sich doppelt berührender Curven zweiter Classe noch zwei Tangenten an jede derselben legt, so schneiden sich diese zweimal zwei Tangenten in solchen zwei Puncten, die mit dem Durchschnittspuncte der gemeinschaftlichen Tangenten in gerader Linie liegen.

Wenn man von irgend zwei Puncten einer der beiden gemeinschaftlichen Tangenten zweier sich doppelt berührender Curven zweiter Classe noch zwei Tangenten an jede derselben legt, so schneiden sich diese zweimal zwei Tangenten in solchen zwei Puncten, die mit dem Berührungspuncte auf der andern gemeinschaftlichen Tangente in gerader Linie liegen.

Ich übergehe alle einzelnen Constructionen, die sich an diese beiden Sätze anknüpfen. Wenn die beiden Curven unter einander, statt des doppelten Contactes, einen vierpunctigen haben, so erhalten wir den Satz der 587. Nummer. Ich beschränke mich hier ebenfalls darauf, bloss zu erinnern, dass die beiden Curven auch Hyperbeln oder Parabeln sein können, die sich in unendlicher Entfernung osculiren. Wir kommen alsdann zu Sätzen und Constructionen, von denen wir einige direct schon in der 595. Nummer hergeleitet haben.

Fig. 30. 665. Wenn wir mit einer Curve zweiter Classe zwei Systeme von zwei Puncten zusammenstellen, so müssen, nach den Voraussetzungen der 659. Nummer, die Puncte dieser beiden Systeme B und B′, C und C′, wie in der 30. Figur, auf zwei Tangenten BC und B′C′ der Curve angenommen werden. Die drei Puncte, welche in gerader Linie liegen, sind alsdann S, der Durchschnitt der von B und B′ an die Curve gelegten Tangenten BS und B′S, ferner S′ der Durchschnitt der beiden Tangenten CS′ und C′S′ und endlich P, der Durchschnitt von BC′ und B′C. Der hiermit bewiesene Satz ist also der bekannte BRIANCHONsche.

Die drei Diagonalen eines um eine Curve zweiter Classe beschriebenen Sechsecks gehen durch ein und denselben Punct.

Fig. 31. 666. Wir können endlich noch (Fig. 31) drei Systeme von zwei Puncten: A und A′, B und B′, C und C′ zusammenstellen, die auf zwei geraden Linien vertheilt liegen. Die drei in gerader Linie liegenden Durchschnittspuncte sind alsdann folgende:

(AB′ A′B), (AC′, A′C), (BC′, B′C),

oder S, S′ und S″. Da wir die beiden Puncte jedes Systems mit einander vertauschen können, so erhalten wir sechsmal drei solcher Durchschnittspuncte und hiernach folgenden Satz.

Wenn man auf jeder von zwei gegebenen geraden Linien drei Puncte beliebig annimmt und diese Puncte durch neun gerade Linien verbindet, so erhält man sechsmal drei Durchschnittspuncte, die in gerader Linie liegen. (427)

667. Wir sind in den letzten Nummern zu verschiedenen einzelnen Fällen des Satzes der 659. Nummer gekommen, indem wir besondere Voraussetzungen über die Natur der drei zusammengestellten Oerter zweiter Classe, und über die beiden, ihnen allen dreien gemeinschaftlichen, Tangenten gemacht haben. Wir gelangen noch zu andern speciellen

Sätzen, wenn wir über die übrigen gemeinschaftlichen Tangenten je zweier der drei Oerter besondere Bestimmungen machen, und namentlich annehmen, dass dieselben paarweise zusammenfallen. Auf diese Weise ergibt sich unter andern Sätzen auch der nachstehende:

Wenn von solchen Curven, welche alle zwei gegebene gerade Linien berühren, zwei von jeder der übrigen berührt werden, so gehen diejenigen geraden Linien, welche die jedesmaligen beiden Berührungspuncte auf jenen beiden Curven verbinden, durch einen festen Punct.

Dieser feste Punct ist ein homologer Punct jener beiden Curven, die wir durch K und K' bezeichnen wollen, und zwar derjenige, welcher mit dem gemeinschaftlichen homologen Puncte aller Curven zusammengehört. Wenn man statt der beiden Curven K und K' zwei Puncten-Systeme B und B', C und C', oder, was dasselbe bedeutet, zwei (begränzte) gerade Linien BB' und CC' nimmt, so sind alle berührenden Curven demselben Viereck BCC'B' eingeschrieben und wir erhalten folgenden bekannten Satz:

Diejenige gerade Linie, welche die Berührungspuncte auf zwei gegenüberliegenden Seiten eines einer gegebenen Curve zweiter Classe umschriebenen Vierecks verbindet, geht durch den Durchschnitt der Diagonalen desselben.

Wenn einer von solchen vier Oertern zweiter Classe, welche zwei gegebene gerade Linien berühren, die drei übrigen Oerter ebenfalls berührt, so bilden die drei Berührungspuncte ein Dreieck, dessen Seiten durch die drei (659) in gerader Linie liegenden homologen Puncte je zweier der letztgenannten drei Curven gehen. Die Bestimmung der drei Berührungspuncte, wenn wir diese drei Curven als gegeben betrachten, kommt also darauf hinaus, ein Dreieck zu beschreiben, dessen Winkelpuncte auf drei gegebenen Curven liegen und dessen Seiten durch drei bekannte, in gerader Linie liegende Puncte gehen. Diese Aufgabe, von der noch bei einer späteren Gelegenheit die Rede sein wird, gestattet, im Allgemeinen, acht verschiedene Auflösungen, und die Construction derselben lässt sich, im vorliegenden Falle, auf elementarem Wege ausführen. Hier beschränke ich mich auf den Fall, dass, statt der drei Curven, drei Puncten-Systeme A und A', B und B', C und C' gegeben sind, wo wir alsdann folgender Aufgabe begegnen: Fig. 31.

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die fünf gegebene gerade Linien berührt.

Zwei dieser fünf geraden Linien sind MN und MN'. Die Bestimmung der Berührungspuncte auf den drei übrigen, auf AA', BB' und CC', kommt darauf hinaus, dem von diesen geraden Linien gebildeten Dreieck ein anderes einzuschreiben, dessen Seiten durch die drei Puncte S, S' und S'' gehen. Diese Construction ergibt sich sogleich aus dem bekannten Satze, dass der geometrische Ort für die dritten Winkelpuncte solcher Dreiecke, deren beide ersten Winkelpuncte auf zwei gegebenen geraden Linien liegen und deren Winkelpuncte durch drei in gerader Linie liegende Puncte gehen, eine neue gerade Linie ist. *)

*) Wenn fünf Tangenten einer Curve zweiter Classe gegeben sind, so können wir die Berührungspuncte auf denselben auch nach dem BRIANCHON'schen Satze (665) bestimmen, wenn wir annehmen, dass zwei Seiten des umschriebenen Sechsecks zusammenfallen und wir also statt desselben ein Fünfeck und auf einer Seite desselben den Berührungspunct erhalten. Wir brauchen alsdann nur auf ganz ähnliche Weise, wie in der 319. Nummer, zu construiren.

668. **Es sei, indem wir zu einem zweiten Schema übergehen,**

$$U = o$$

die Gleichung irgend eines Ortes zweiter Classe, der von zweien andern, deren Gleichungen folgende seien:

$$U' = o, \qquad U'' = o,$$

doppelt berührt wird. Alsdann erhalten wir, bei gehöriger Bestimmung von μ' und μ'', folgende identische Gleichungen:

$$\begin{aligned} U+\mu' U' &= \pm p^2, \\ U+\mu'' U'' &= \pm q^2, \end{aligned} \qquad (1)$$

indem wir durch

$$p = o, \qquad q = o, \qquad (2)$$

die Gleichungen des Durchschnittspunctes der gemeinschaftlichen Tangenten des ersten und zweiten und des ersten und dritten Ortes darstellen und in den zweiten Theilen der Gleichungen (1) das gehörige Zeichen nehmen. Wenn wir die beiden Gleichungen (1) von einander abziehen, so kommt:

$$\mu' U' - \mu'' U'' = \pm(p^2 \pm q^2). \qquad (3)$$

Wenn in der Klammer dieser Gleichung das untere Zeichen genommen werden muss, so stellt die Gleichung

$$\mu' U' - \mu'' U'' = \pm(p^2 - q^2) = \pm(p+q)(p-q) = o$$

ein System zweier Puncte dar, die, was der erste Theil dieser Gleichung zeigt, zwei zusammengehörige homologe Puncte des zweiten und dritten gegebenen Ortes sind. Die Gleichungen dieser beiden Puncte sind:

$$p+q = o, \qquad p-q = o;$$

die Puncte selbst liegen also mit den Puncten (2) in gerader Linie und bilden mit denselben ein System von vier harmonischen Theilungspuncten. (410)

Wenn in der Klammer der Gleichung (3) das obere Zeichen gilt, so stellt die Gleichung

$$\mu' U' - \mu'' U'' = \pm(p^2 + q^2) = o$$

zwei imaginäre Puncte, oder, mit andern Worten, eine gerade Linie dar, die, was der erste Theil dieser Gleichung zeigt, eine homologe gerade Linie der zweiten und dritten gegebenen Curve ist. Diese gerade Linie enthält die beiden Puncte (2), denn die letzte Gleichung wird befriedigt, wenn die Gleichungen dieser Puncte beide zugleich befriedigt werden. Also:

Wenn ein Ort zweiter Classe zwei andere Oerter derselben Classe beide doppelt berührt, so liegen die beiden Durchschnittspuncte der (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten des ersten und jedes der beiden übrigen Oerter, und zwei (reelle oder imaginäre) homologe Puncte der letztgenannten Oerter in gerader Linie und sind vier harmonische Theilungspuncte.

Statt der doppelten Berührung können wir in den vorstehenden Entwicklungen insbesondere auch eine vierpunctige Osculation nehmen; an die Stelle des Durchschnittes der beiden gemeinschaftlichen Tangenten tritt alsdann der Osculationspunct.

Wenn wir mit einer Curve ein System von zwei Puncten zusammenstellen wollen, so müssen wir, wenn von einer doppelten Berührung die Rede ist, diese Puncte auf dem Umfange der Curve annehmen. Will man zwei Systeme von zwei Puncten zusammenstellen, so müssen, unter gleicher Voraussetzung, alle vier Puncte in gerader Linie liegen.

Hiernach ergeben sich mancherlei einzelne Sätze, von denen wir beispielsweise nur einige hervorheben wollen.

669. Wenn wir für den ersten Ort irgend eine Curve und für die beiden andern Oerter zwei Puncten-Systeme nehmen, so dass also eine Curve und vier Puncte auf dem Umfange derselben gegeben sind, so begegnen wir folgendem Satze:

Wenn man in eine Curve zweiter Classe ein Viereck beschreibt, dessen Winkelpuncte die Berührungspuncte auf den Seiten eines derselben umschriebenen Vierecks sind, so liegen die Durchschnittspuncte der beiden Paare nicht an einander anstossender Seiten jedes der beiden Vierecke alle vier in gerader Linie und bilden vier harmonische Theilungspuncte.

Dieser Satz umfasst alle verschiedenen Fälle, wenn wir die Definition des Vierecks ganz allgemein nehmen.

670. Wir wollen ferner für den ersten Ort eine Curve nehmen und mit derselben eine zweite dieselbe doppelt berührende Curve und ein System von zwei auf dem Umfange derselben liegenden Puncten zusammenstellen, und zuvörderst voraussetzen, dass die beiden Curven sich vierpunctig osculiren. Es sei (Fig. 32) OMN die erste, OPQ die zweite Curve und M und N seien die beiden gegebenen Puncte. Wenn wir alsdann von M und N vier Tangenten an die gegebene Curve legen, so bilden diese vier Tangenten eine vollständige vierseitige Figur, deren eine Diagonale (in der Figur SS′) durch den Osculationspunct geht. Hiernach ergibt sich eine Construction folgender Aufgabe: Fig. 32.

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene vierpunctig osculirt und überdiess durch irgend zwei gegebene Puncte geht.

Die gegebene Curve sei OPQ, die gegebenen Puncte M und N und zunächst werde der Osculationspunct gesucht. Man lege zu diesem Ende von jedem der beiden gegebenen Puncte zwei Tangenten an die gegebene Curve. Diese beiden Tangenten-Paare schneiden sich in den vier Puncten S und S′, S″ und S‴, durch welche sich noch zwei gerade Linien SS′ und S″S‴ legen lassen. Diese beiden geraden Linien schneiden die gegebene Curve, im Allgemeinen, in vier Puncten O, O′, O″ und O‴, und diese Puncte sind diejenigen, in welchen die gegebene Curve von denjenigen Curven, die den Forderungen der Aufgabe Genüge leisten, und deren es also, im Allgemeinen, vier gibt, osculirt wird.

Wir können hiernach ferner sogleich die Tangenten (etwa) derjenigen Curve, welche die gegebene in O osculirt, in den beiden gegebenen Puncten M und N construiren, da P, der Durchschnittspunct derselben, der vierte harmonische Theilungspunct zu den drei Puncten O, S und S′ ist, (669)

Wir wollen ferner folgende Aufgabe construiren:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene doppelt berührt und überdiess durch drei gegebene Puncte geht.

Wenn wir die gegebene Curve nach einander mit irgend zweimal zwei der drei gegebenen Puncte zusammenstellen, so erhalten wir zweimal zwei Linien-Paare, die dem Linien-Paare SS′ und S″S‴ der 32. Figur entsprechen. Diese beiden Linien-Paare schneiden sich in vier Puncten und diese vier Puncte sind die Durchschnittspuncte der (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Curve und derje-

nigen vier, welche den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten. Die Tangenten dieser Curven in den drei gegebenen Puncten lassen sich wiederum leicht construiren.

Da drei gegebene Puncte sich auf dreifache Art zu zwei combiniren lassen, so erhalten wir dreimal zwei gerade Linien, die nothwendig durch dieselben vier festen Puncte gehen müssen. Diese vier Puncte sind diejenigen, in welchen sich die drei Diagonalen von solchen der gegebenen Curve umschriebenen Sechsecken schneiden, deren Seiten, paarweise genommen, durch die drei gegebenen Puncte gehen. Wir sind also auf indirectem Wege zu dem BRIANCHON'schen Satze vom umschriebenen Sechsecke (666) gelangt und haben zugleich eine geometrische Bedeutung des Durchschnittspunctes der drei Diagonalen nachgewiesen. Es ist nemlich dieser Punct der Durchschnittspunct der (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten der gegebenen Curve und einer andern, welche dieselbe doppelt berührt und ausserdem durch die drei Durchschnitte der gegenüberliegenden Seiten des umschriebenen Sechsecks geht.

671. Wenn wir drei Oerter betrachten, von welchen jeder den ersten gegebenen Ort doppelt berührt und

$$U''' = 0$$

für die Gleichung des neu hinzugekommenen Ortes nehmen, so erhalten wir nach dem Schema der 668. Nummer, wenn

$$r = 0$$

die Gleichung des Durchschnittes der gemeinschaftlichen Tangenten des ersten Ortes und des neu hinzugekommenen ist und wir den Coefficienten μ''' gehörig bestimmen:

$$\begin{aligned} \mu' U' - \mu'' U'' &= \pm(p^2 - q^2) = 0, \\ \mu' U' - \mu''' U''' &= \pm(p^2 - r^2) = 0, \\ \mu'' U'' - \mu''' U''' &= \pm(q^2 - r^2) = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Wenn wir die beiden ersten dieser drei Gleichungen von einander abziehen, so kommen wir zu der dritten Gleichung. Hierin ist folgender Satz enthalten:

Wenn ein gegebener Ort zweiter Classe von dreien andern Oertern derselben Classe doppelt berührt wird, so sind diejenigen drei Paare homologer Puncte je zweier der letztgenannten Oerter, welche mit den bezüglichen Durchschnittspuncten der (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten jedes dieser Oerter und des erstgenannten in gerader Linie liegen, die gegenüberstehenden Winkelpuncte einer vollständigen vierseitigen Figur.

Die vorstehenden Gleichungen (4) beziehen sich ausschliesslich auf denjenigen Fall, wo die bezüglichen homologen Puncte je zweier derjenigen drei Curven, welche die erste gegebene doppelt berühren, reell sind. Es können auch vier dieser drei Puncte imaginär sein, alsdann müssen wir in jenen Gleichungen entweder das Zeichen von p^2 oder von q^2 oder von r^2 ändern. In diesem Falle gestattet der letzte Satz unmittelbar keine geometrische Construction.

Ich kann auch hier einige besondere Fälle des letzten Satzes, den vollständig zu discutiren der Raum verbietet, nicht unerwähnt lassen.

672. Wenn wir für den ersten gegebenen Ort eine Curve und für die drei übrigen drei Systeme von zwei Puncten, die alsdann auf dem Umfange der Curve liegen müssen und die auch theilweise zusammenfallen und auch beliebig mit einander verwechselt werden können, nehmen, so erhalten wir den PASCAL'schen Satz vom eingeschriebenen Sechseck,

der uns eben so oft und ungesucht begegnet, als er eine grosse Rolle in dieser Art von Untersuchungen spielt.

673. Wenn wir für den ersten gegebenen Ort zweiter Classe ein System von zwei (reellen oder imaginären) Puncten, und für die übrigen drei Oerter Curven nehmen, und diese Curven also eine gemeinschaftliche Chorde haben, so liegen viermal drei Durchschnitte der gemeinschaftlichen Tangenten je zweier Curven in gerader Linie. Und dieser Satz besteht endlich auch dann, wenn jene gemeinschaftliche Chorde unendlich weit liegt, das heisst, wenn die Curven irgend drei ähnliche und ähnlich liegende, insbesondere drei Kreise, sind. Er erhält alsdann folgende Aussage:

Die Durchschnittspuncte der äussern und innern (reellen oder imaginären) gemeinschaftlichen Tangenten je zweier irgend dreier gegebener Kreise, sind solche sechs Puncte, von denen viermal drei in gerader Linie liegen (164).

674. Wenn wir für den ersten gegebenen Ort ein Puncten-System und für die drei übrigen Oerter ein zweites Puncten-System und zwei Curven nehmen, so müssen, den Voraussetzungen gemäss, diese beiden Curven sich in den beiden Puncten des ersten Systems schneiden und mit denselben Puncten müssen die Puncte des zweiten Systems in gerader Linie liegen. Hiernach erhalten wir folgenden Satz:

Wenn man von irgend zwei Puncten einer gemeinschaftlichen Chorde irgend zweier Curven zweiter Classe vier Tangenten an jede derselben legt, so erhält man zwei vollständige vierseitige Figuren, die den Curven beiden zugleich umschrieben sind, und in jeder Figur also, ausser den beiden Puncten der gemeinschaftlichen Chorde noch zwei Paare gegenüberliegender Winkelpuncte. Zwei homologe Puncte und zwei, auf zwiefache Art zu wählende, Paare gegenüberliegender Winkelpuncte der beiden umschriebenen Figuren bilden die Winkelpuncte einer neuen vollständigen vierseitigen Figur.

Wenn wir annehmen, dass die beiden auf der gemeinschaftlichen Chorde der beiden Curven liegenden Puncte zusammenfallen, so erhalten wir, statt des letzten Satzes, den nachstehenden:

Wenn man von irgend einem Puncte einer gemeinschaftlichen Chorde irgend zweier Curven zweiter Classe zwei Tangenten an jede derselben legt, so schneiden sich diejenigen vier geraden Linien, welche die beiden Berührungspuncte auf der einen Curve mit den beiden Berührungspuncten auf der andern Curve verbinden, in zwei zusammengehörigen homologen Puncten der beiden Curven (387).

Wir können die beiden Sätze dieser Nummer zur Construction der gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebener Curven zweiter Classe anwenden, wenn wir zwei Durchschnittspuncte dieser Curven kennen. Hier wollen wir Beispielsweise denjenigen Fall näher betrachten, wo die beiden gegebenen Curven eine Hyperbel und ein Kreis sind, die sich in vier reellen Puncten A, B, C und D schneiden und keine gemeinschaftlichen Tangenten haben; und wollen die beiden reellen homologen Puncte derselben construiren. Wenn wir zu diesem Ende von irgend einem Puncte P der gemeinschaftlichen Chorde BD aus zwei Tangenten an jede Curve legen, so gehen, wenn M und N, M′ und N′ die vier Berührungspuncte sind, die beiden geraden Linien MM′ und NN′ durch den einen homologen Punct H und die beiden geraden Linien MN′ und M′N durch den andern homologen Punct H′. Fig. 32.

Wir können hierbei auch nach dem ersten Satze dieser Nummer construiren und von zwei Puncten P und P' der Chorde BD aus Tangenten an die beiden Curven legen. Ziehen wir zum Beispiel die Tangenten PS und PS', P'S und P'S', so geht die gerade Linie, welche sich durch die beiden Puncte S und S' legen lässt, zugleich durch den homologen Punct H. Nehmen wir statt der beiden Tangenten P'S und PS die beiden Tangenten $P'S_{,}$ und PS, so erhalten wir die beiden Puncte S und $S_{,}$, welche mit dem Puncte H' in gerader Linie liegen.

Wir würden dieselben homologen Puncte H und H' erhalten, wenn wir von Puncten der gemeinschaftlichen Chorde AC Tangenten an die beiden Curven legen. Aber von keinem Puncte der vier übrigen Chorden AB und CD, BC und DA lassen sich reelle Tangenten an beide Curven zugleich legen, die entsprechenden homologen Puncte sind imaginär. Die beiden durch diese vier imaginären homologen Puncte gehenden homologen geraden Linien (610) erhält man auf der Stelle. Man braucht zu diesem Ende bloss die beiden Chordalpuncte (363) der beiden gegebenen Curven Q und Q' mit dem dritten Chordalpuncte Q'' durch zwei gerade Linien zu verbinden. Auf ähnliche Weise liegen die beiden reellen homologen Puncte H und H' auf der geraden Linie, welche die beiden Chordalpuncte Q und Q' mit einander verbindet.

Die drei Chordalpuncte zweier Kegelschnitte sind die Winkelpuncte desjenigen Dreiecks, dessen Seiten die drei homologen geraden Linien derselben beiden Kegelschnitte sind. In Beziehung auf jeden derselben sind die drei Chordalpuncte die Pole der drei homologen geraden Linien, und, umgekehrt, diese sind die Polaren von jenen. (Vergl. die 310. Nummer und die Schlussbemerkung der 384. Nummer.) —

675. Es seien, indem wir zu einem neuen Schema übergehen,

$$U = o, \qquad U' = o, \qquad U'' = o, \qquad (1)$$

die Gleichungen irgend dreier gegebener Oerter zweiter Classe; alsdann stellen, wenn μ' und μ'' irgend zwei unbestimmte Coefficienten bedeuten, die Gleichungen:

$$U+\mu'U' = o, \qquad U+\mu''U'' = o, \qquad (2)$$

die wir, der Kürze halber, durch

$$V' = o, \qquad V'' = o,$$

bezeichnen wollen, irgend zwei solche neue Oerter derselben Classe dar, welche respective mit dem ersten und zweiten, und mit dem ersten und dritten gegebenen dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten haben. Wenn wir die beiden Gleichungen (2) von einander abziehen, so erhalten wir

$$\mu'U'-\mu''U'' = V'-V'' = W = o,$$

indem wir zugleich jeden der beiden ersten, vollkommen identischen Ausdrücke $(\mu'U'-\mu''U'')$ und $(V'-V'')$, der Kürze halber, durch W bezeichnen. Die letzte Gleichung zeigt, dass die Curve $W = o$ einerseits mit den beiden gegebenen Oertern $U' = o$ und $U'' = o$ und andrerseits mit den beiden Oertern $V' = o$ und $V'' = o$ dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten hat.

Die vier gemeinschaftlichen Tangenten irgend zweier gegebener Oerter zweiter Classe und die vier gemeinschaftlichen Tangenten irgend zweier anderer Oerter derselben Classe, welche mit jenen beiden gegebenen und irgend einem dritten gegebenen dieselben gemeinschaftlichen Tangenten haben, berühren alle acht ein und denselben neuen Ort zweiter Classe.

676. Zu demselben Resultate kommen wir auch nach folgendem Schema, in welchem ich die Bezeichnung mit der Bezeichnung in der vorigen Nummer übereinstimmend wähle. Es stellt nemlich die Gleichung

$$V'-U-\mu''U'' = W = o$$

irgend einen Ort zweiter Classe dar. Um diese Gleichung zu construiren, setzen wir zugleich:

$$V'-U = \mu U' = o \quad \text{und} \quad U'' = o,$$
$$U+\mu''U'' = V'' = o \quad \text{„} \quad V' = o.$$

Wir sehen hieraus, dass, wie oben, die beiden Curven $U' = o$ und $U'' = o$, so wie die Curven $V' = o$ und $V'' = o$ mit der Curve $W = o$ dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten haben. Betrachten wir die drei Curven $U = o$, $U'' = o$ und $V' = o$ als gegeben, so erhält der letzte Satz folgende Aussage:

Wenn irgend drei Oerter zweiter Classe gegeben sind, so hat jeder der beiden letztern mit einem beliebigen Orte, der mit dem andern derselben und dem ersten gegebenen dieselben gemeinschaftlichen Tangenten hat, vier gemeinschaftliche Tangenten; die acht gemeinschaftlichen Tangenten, die man auf diese Weise erhält, berühren ein und denselben neuen Ort zweiter Classe.

677. Wir wollen hier nur einige ganz specielle Fälle der Sätze der beiden letzten Nummern hervorheben, und zwar zuerst für die drei Oerter Fig. 34.

$$U = o, \qquad U'' = o, \qquad V' = o,$$

die drei Puncten-Systeme Q und Q', R und R', S und S' und demnächst für die beiden Oerter:

$$U' = o, \qquad V'' = o,$$

die beiden Puncten-Systeme N und N', M und M' nehmen. Alsdann berühren die acht geraden Linien SM, SM', S'M, S'M', RN, RN', R'N und R'N' dieselbe Curve zweiter Classe, welche durch die Gleichung:

$$W = o$$

dargestellt wird und die Hyperbel der 34. Figur ist.

An das Vorstehende schliessen sich zierliche Constructionen einer Curve zweiter Classe an, wenn fünf Tangenten derselben gegeben sind. Diese fünf gegebenen Tangenten können wir beliebig unter den letztgenannten acht geraden Linien auswählen und erhalten alsdann verschiedene Constructionen der drei übrigen.

Es seien zum Beispiel SM, SM', S'M, S'M' und RN die fünf gegebenen zu berührenden geraden Linien. Die ersten vier dieser geraden Linien bilden ein Viereck, (das wir auf doppelte Weise nehmen können), dessen gegenüberliegende Winkelpuncte S und S', M und M' seien. Auf der fünften gegebenen geraden Linie nehme man zwei Puncte R und N beliebig an, ziehe RM und SN, die sich in Q, und RM' und S'N, die sich in Q' schneiden. Ferner ziehe man Q'M und QM', die sich in R', und Q'S und QS', die sich in N' schneiden. RN', R'N und R'N' sind alsdann drei neue Tangenten der zu construirenden Curve.

Um ein zweites Beispiel zu nehmen, seien S'M, S'M', R'N, R'N' und SM die fünf gegebenen geraden Linien, wodurch die Durchschnittspuncte S', R' und M bestimmt sind. Man nehme einen Punct Q beliebig an, ziehe QM und nehme auf dieser geraden Linie den Punct R wiederum beliebig an. Man ziehe QS', wodurch auf R'N' der Punct N', QR', wodurch auf S'M' der Punct M' bestimmt wird, ziehe RM' und R'M, die sich in Q' schneiden, Q'S', welche R'N in N begegnet und endlich SM', RN und RN'.

Fig. 36. 678. *Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, welche, mit einer gegebenen zusammengestellt, zwei gegebene Puncte zu homologen Puncten hat, und überdiess eine gegebene gerade Linie berührt.*

Es sei RN die gegebene gerade Linie und M und M' seien die beiden gegebenen Puncte. Wenn diese Puncte beide ausserhalb der gegebenen Curve liegen, so können wir die vorstehende Aufgabe unmittelbar auf die Aufgabe der vorigen Nummer zurückführen, indem wir von den beiden gegebenen Puncten Tangenten an die gegebene Curve legen. Diese Tangenten werden aber paarweise imaginär, wenn M und M' innerhalb der gegebenen Curve liegen. In diesem Falle kommt die vorstehende Aufgabe darauf hinaus, eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, welche fünf gegebene gerade Linien, von welchen zwei und zwei imaginär sind, berührt. Diese imaginären geraden Linien lassen sich allgemein als die imaginären gemeinschaftlichen Tangenten zweier gegebener Curven zweiter Classe geometrisch bestimmen, oder auch, wie in dem vorliegenden Falle, durch die eine dieser Curven und durch zwei innerhalb derselben liegende Puncte M und M', die reellen Durchschnittspuncte der beiden Paare imaginärer gemeinschaftlichen Tangenten.

Die Construction dieser Aufgabe stimmt buchstäblich mit der ersten Construction der vorigen Nummer überein, wenn wir nur die gegebene Curve an die Stelle des gegebenen Puncten-Systems S und S' setzen. Es ist daher hinreichend, bloss die 35. Figur hinzuzufügen.

679. Wenn man annimmt, dass die beiden gegebenen Puncte, M und M', zusammenfallen, so besteht noch immer die erste Construction der 677. Nummer, gibt aber alsdann nur eine einzige neue Tangente. Die verlangte Curve hat alsdann mit der gegebenen einen doppelten Contact, der imaginär wird, wenn die zusammenfallenden Puncte innerhalb der gegebenen Curve angenommen werden.

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, welche mit einer gegebenen auf einer gegebenen (der Curve begegnenden oder nicht begegnenden) geraden Linie einen (reellen oder imaginären) doppelten Contact hat, und überdiess eine zweite gegebene gerade Linie berührt.

Fig. 36. Es sei PP die erste gegebene gerade Linie, im Pole derselben, in Beziehung auf die gegebene Curve, nehme man die beiden zusammenfallenden Puncte M und M' an. (616) Die zweite gegebene gerade Linie sei RN, und auf derselben bestimme man willkührlich die beiden Puncte R und N. Man lege vom Puncte N aus zwei Tangenten an die gegebene Curve, und verbinde die Puncte M (M') und R durch eine gerade Linie, welche jenen Tangenten in Q und Q' begegne. Durch Q und Q' lege man zwei neue Tangenten an die gegebene Curve, welche sich in N' schneiden, und ziehe endlich RN'. Diese gerade Linie ist eine neue Tangente der verlangten Curve.

Wenn man die beiden zusammenfallenden Puncte M und M' auf dem Umfange der gegebenen Curve, etwa in O, annimmt, so enthält das Vorstehende eine neue Construction folgender Aufgabe:

Eine Curve zweiter Classe zu beschreiben, die eine gegebene in einem gegebenen Puncte, der auch auf einer Asymptote derselben unendlich weit liegen kann, vierpunctig osculirt und überdiess eine gegebene gerade Linie berührt.

Es erhellet zugleich aus der letzten Construction, dass alle Curven zweiter Classe, welche eine gegebene gerade Linie berühren, und überdiess eine gegebene Curve derselben

Classe, auf solche Weise doppelt berühren, dass die Pole der bezüglichen Berührungs-Chorden auf einer gegebenen geraden Linie liegen, ausserdem noch ein und dieselbe zweite gerade Linie berühren. An diese Bemerkung schliesst sich eine neue Construction einer Curve zweiter Classe an, welche eine gegebene doppelt und überdiess drei gegebene gerade Linien berührt, und einer Curve zweiter Classe, welche eine gegebene vierpunctig osculirt und überdiess zwei gegebene gerade Linien berührt.

680. Die allgemeine Aufgabe, einen Ort zweiter Classe zu beschreiben, der mit zwei gegebenen dieselben vier, reellen oder imaginären, Tangenten hat und eine gegebene gerade Linie berührt, hat immer eine einzige reelle Auflösung. Wenn insbesondere die gegebene gerade Linie eine homologe gerade Linie der beiden gegebenen Oerter ist, so ist der verlangte Ort offenbar das System der entsprechenden beiden homologen Puncte der beiden gegebenen Oerter. Jede neue Tangente des verlangten Ortes, die wir nach der ersten Constructionsweise der 677. Nummer erhalten, fällt alsdann nothwendig mit der gegebenen geraden Linie zusammen. Diess ist offenbar in dem Falle, dass jene beiden homologen Puncte imaginär sind und wenn es für diesen Fall gilt, muss es offenbar auch für den andern Fall gelten, dass jene Puncte reell sind. Hiernach erhalten wir folgende charakteristische Eigenschaft einer beliebigen homologen geraden Linie zweier gegebener Curven zweiter Classe.

Wenn irgend zwei Curven zweiter Classe gegeben sind und man legt von einem beliebigen Puncte einer ihrer homologen geraden Linien zwei Tangenten an eine Curve, und von einem zweiten beliebigen Puncte derselben Linie zwei Tangenten an die andere Curve, und endlich von zwei gegenüberliegenden Durchschnittspuncten dieser beiden Tangenten-Paare noch zwei Tangenten an jede Curve: so schneiden sich diese zweimal zwei Tangenten in zwei neuen Puncten der homologen geraden Linie.

681. Ich darf hier diese Erörterungen nicht weiter ausdehnen, und schliesse diese Abtheilung mit einigen Andeutungen über die geometrische Bedeutung der bisher gebrauchten unbestimmten Coefficienten.

Wenn zwei Oerter zweiter Classe durch folgende beiden Gleichungen gegeben sind:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Duw+2Euv+Fu^2 = U = 0,$$
$$A'w^2+2B'vw+C'v^2+2D'uw+2E'uv+F'u^2 = U' = 0,$$

und mit diesen beiden Oertern irgend ein dritter Ort, dessen Gleichung:

$$A''w^2+2B''vw+C''v^2+2D''uw+2E''uv+F''u^2 = U'' = 0,$$

dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten hat, so ergibt sich, wenn μ' und μ'' unbestimmte Coefficienten bedeuten:

$$U+\mu'U' = \mu''U''. \qquad (1)$$

Der dritte Ort ist vollkommen bestimmt, wenn der unbestimmte Coefficient μ' gegeben ist, und, umgekehrt, wenn der dritte Ort gegeben ist, lässt sich leicht, auf verschiedene Art, der Werth jenes unbestimmten Coefficienten construiren. Wir wollen, was erlaubt ist, ohne der Allgemeinheit irgend Abbruch zu thun, $A = A' = A'' = 1$ setzen. Wenn wir die Gleichung (1), in Beziehung auf w, differentiiren, so kommt:

$$\frac{dU}{dw}+\mu'\frac{dU'}{dw} = \mu''\frac{dU''}{dw},$$

und die drei partiellen Differential-Coefficienten dieser Gleichung, Ausdrücke von der Form $(w+Bv+Du)$, gleich Null gesetzt, stellen die Mittelpuncte der drei Curven dar. Wenn wir also die Abstände des Mittelpunctes der dritten Curve von den Mittelpuncten

der ersten und zweiten Curve p und p′ nennen, so ist nach der 410 Nummer:

$$\mu' = \pm\frac{p'}{p}, \qquad (2)$$

wobei wir das obere oder untere Zeichen nehmen müssen, je nachdem der dritte Mittelpunct zwischen die beiden ersten fällt oder nicht.

Der Raum verbietet, in Constructionen irgend einer Art hier einzugehen.

Wenn wir die Gleichung (1), in Beziehung auf v, differentiiren, so kommt:

$$\frac{dU}{dv} + \mu'\frac{dU'}{dv} = \mu''\frac{dU''}{dv}.$$

Die drei partiellen Differential-Coefficienten dieser Gleichung, Ausdrücke von der Form $(Bw+Cv+Eu)$, gleich Null gesetzt, stellen die drei Pole der zweiten Axe, in Beziehung auf die drei Curven, dar. Bezeichnen wir die Abstände des dritten Poles von dem ersten und zweiten durch q und q′, so kommt:

$$\mu' = \pm\frac{B'}{B}\cdot\frac{q'}{q}.$$

Aus der Zusammenstellung dieser Gleichung mit der Gleichung (2) folgt:

$$\frac{p'}{p} = \frac{B'}{B}\cdot\frac{q'}{q}. \qquad (3)$$

B und B′ sind die Abstände der Mittelpuncte der beiden ersten Curven von der zweiten Axe. Das Verhältniss dieser Abstände bleibt dasselbe, wenn wir diese Axe um denjenigen Punct beliebig sich drehen lassen, in welchem dieselbe diejenige gerade Linie, welche jenen Mittelpunct enthält, schneidet. Also:

Das Verhältniss der gegenseitigen Abstände der drei Pole einer beliebigen Transversalen, in Beziehung auf drei Curven zweiter Classe, die demselben Viereck eingeschrieben sind, bleibt dasselbe, wenn die Transversale sich um ihren Durchschnittspunct mit der durch die Mittelpuncte der drei Curven gehenden geraden Linie beliebig dreht.

Fig. 87. Wenn wir insbesondere für die beiden gegebenen Oerter zwei Puncten-Systeme, P und P′, Q und Q′, nehmen, so ist der dritte Ort irgend eine Curve, die einem gegebenen Viereck, etwa dem Vierecke PQP′Q′, eingeschrieben ist. Wenn wir die vier Seiten dieses Vierecks als vier Transversalen betrachten, so sind die drei Pole derselben, in Beziehung auf die drei Oerter, die beiden auf derselben liegenden Winkelpuncte und der Berührungspunct. Wenn wir also die Segmente, welche auf den vier Seiten durch die vier Berührungspuncte bestimmt werden, a und a′, b und b′, c und c′, d und d′ nennen, ferner die Abstände der Mitten der beiden Diagonalen von den vier Seiten M, N, O, P und M′, N′, O′, P′, und endlich $\frac{p'}{p} = \frac{C''C'}{C''C} = x$ setzen, so gibt die Gleichung (3):

$$\frac{a'}{a} = x\frac{M'}{M}, \quad \frac{b'}{b} = x\frac{N'}{N}, \quad \frac{c'}{c} = x\frac{O'}{O}, \quad \frac{d'}{d} = x\frac{P'}{P}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{a'.b.c'.d}{a.b'.c.d'} = \frac{M'.N.O'.P}{M.N'.O.P'} = \frac{\sin\alpha'.\sin\beta.\sin\gamma'.\sin\delta}{\sin\alpha.\sin\beta'.\sin\gamma.\sin\delta'} = 1.$$

(Vergleiche die Note zur 441. Nummer.) Der hierin enthaltene Satz ist folgender:

Wenn eine Curve zweiter Classe die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt, so bestimmt auf jeder Seite der bezügliche Berührungspunct zwei Segmente. Das

Product von vier nicht auf einander folgenden solchen Segmente ist dem Producte der vier übrigen gleich,

Statt der Curve kann man in dem letzten Satze ein drittes Puncten-System nehmen und erhält alsdann den Satz der 440. Nummer. Es ist der letzte Satz auch einer bedeutenden Verallgemeinerung fähig *). Er gilt auch für ein umschriebenes Dreieck (436, 321) und für jedes beliebige umschriebene Polygon, was leicht zu zeigen ist.

Ich gehe in kein näheres Detail hier ein; ich wollte durch diese Schlussbemerkungen bloss wiederholt darauf aufmerksam machen, wie die Theorie der Transversalen, welcher die rein geometrische Methode in neuerer Zeit ihre schönsten Entwicklungen verdankt, mit der Betrachtung der unbestimmten Coefficienten in der allgemeinen Verbindung der Gleichungen aufs innigste zusammenhängt, und die einzelnen Sätze derselben aus dieser ohne Mühe sich herleiten lassen. (Vergl. die 436 — 441. Nummer).

*) Poncelet, *Prop. proj.* 152.

Zweite Abtheilung.

Das Princip der Reciprocität.

682. **W**enn wir die Entwicklungen des ersten Bandes mit den Entwicklungen der vorstehenden ersten Abtheilung des zweiten Bandes, und wenn wir namentlich die Entwicklungen der beiden letzten Paragraphen jenes ersten Bandes und dieser ersten Abtheilung mit einander vergleichen, so bemerken wir eine überraschende Analogie in den Resultaten. Es stehen dieselben, paarweise genommen, in so genauer Wechselbeziehung, dass wir, vermittelst eines allgemeinen Principes, mit welchem wir uns in dieser zweiten Abtheilung beschäftigen wollen, sobald ein Satz bekannt ist, unmittelbar den analogen Satz erhalten. Der beschränkte Raum verbietet uns, in den folgenden Auseinandersetzungen mit derjenigen Ausführlichkeit, welche der Gegenstand fordert, zu Werke zu gehen. Bei dieser Beschränkung entscheide ich mich indess lieber dafür, mancherlei einzelne Resultate zu unterdrücken, als bei der Aufstellung und Entwicklung des in Rede stehenden Principes von einem weniger allgemeinen Gesichtspuncte auszugehen.

§. 1.

Ueber das Cramer'sche Paradox.

683. Die allgemeine Gleichung irgend eines n. Grades zwischen zwei veränderlichen Grössen, welche, je nachdem diese veränderlichen Grössen Punct- oder Linien-Coordinaten bedeuten, die Oerter n. Ordnung oder n. Classe darstellt, enthält:

$$1+2+3+ \ldots +(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{1.\quad 2},$$

constante Coefficienten. Jeden beliebigen dieser Coefficienten können wir als gegeben betrachten und etwa gleich Eins setzen. Die übrigen

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2}-1=\frac{n(n+3)}{1.\ 2}$$

Coefficienten sind alsdann durch eine gleiche Anzahl linearer Gleichungen, im Allgemeinen, vollkommen und auf einzige Weise bestimmt. In dem Falle von Punct-Coordinaten entspricht jedem gegebenen Puncte der bezüglichen Curve, in dem Falle von Linien-Coordinaten jeder Tangente der bezüglichen Curve, eine solche lineare Bedingungs-Gleichung. Ein Ort n. Ordnung ist also durch $\frac{n(n+3)}{1.\ 2}$ Puncte, ein Ort n. Classe durch $\frac{n(n+3)}{1.\ 2}$ Tangenten, im Allgemeinen, vollkommen bestimmt.

Aber zwei Curven n. Ordnung schneiden sich, im Allgemeinen, in n^2 Puncten und durch dieselbe n^2 Puncte gehen ausserdem noch unendlich viele Oerter derselben Ordnung. Zwei Oerter n. Classe berühren, im Allgemeinen, beide dieselben n^2 gerade Linien, und dieselben n^2 geraden Linien sind ausserdem auch noch Tangenten von unendlich vielen Oertern derselben Classe. Sobald $n = 3$ oder $n > 3$, und also

$$n^2 \geqq \frac{n(n+3)}{1.\ 2},$$

begegnet man einer Art von Paradox, dass nemlich eine Curve durch so viele oder durch mehrere Puncte geht, oder so viele oder mehrere gerade Linien berührt, als, im Allgemeinen, zu ihrer Bestimmung nöthig sind, und doch noch unbestimmt bleibt.

Auf dieses Paradox, rücksichtlich der Bestimmung der Curven durch Puncte, scheint zuerst CRAMER *) aufmerksam gemacht, und zugleich die analytische Erklärung desselben gegeben zu haben. Es müssen nemlich, was aus den vorangeschickten Erörterungen sogleich *a priori* einleuchtet, wenn die n^2 Durchschnittspuncte zweier Curven n. Ordnung gegeben sind und $n = 3$ oder $n > 3$ ist, diesen Durchschnittspuncten solche n^2 lineare Gleichungen entsprechen, von welchen eine oder mehrere, die man beliebig auswählen kann, von den jedesmalig übrigbleibenden bedingt werden. Um aber vollständig hier zu Werke zu gehen, müssen wir die vorstehende Erklärungsweise auch noch geometrisch deuten. Ich habe dieses bereits beiläufig im ersten Bande der „Entwicklungen" gethan, als ich meinerseits, bei einer speciellen Veranlassung, auf jenes Paradox stiess **). Denselben Gegenstand habe ich später in den zu *Montpellier* erscheinenden „Annalen" ausführlicher behandelt und zugleich die Betrachtungen auf Oberflächen übertragen ***), und hier nehme ich diese Untersuchungen von Neuem auf, weil sie mit den folgenden in genauer Beziehung stehen.

684. Wenn wir $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2}-1\right)$ Puncte willkührlich annehmen, so können wir durch diese Puncte unendlich viele Oerter n. Ordnung legen, deren jeder, im Allgemeinen, vollkommen bestimmt ist, wenn wir ausserdem noch irgend einen neuen Punct kennen, der auf dem Orte liegt. Zwei solche Oerter wollen wir durch die beiden Gleichungen:

---

*) CRAMER, *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques. Geneve, 1750. Nro. 48.* — LACROIX, *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Seconde Edition, Tome I. p. 413, Note.*

**) Vergl. S. 228, Note.

***) *Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés; Gerg. Ann. Tome XIX, p. 97, Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés; ib. p. 129.*

darstellen. Alsdann ist

$$U = 0, \qquad U' = 0, \qquad (1)$$

$$U' + \mu U = 0, \qquad (2)$$

wenn μ einen unbestimmten Coefficienten bedeutet, die allgemeine Gleichung aller derjenigen Oerter n. Ordnung, welche durch die n^2 Durchschnittspuncte der beiden Oerter (1), also durch die $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2}-1\right)$ willkührlich angenommenen Puncte und ausserdem noch (in der Voraussetzung, dass $n \geqq 3$) durch

$$n^2 - \left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2}-1\right) = \frac{(n-2)(n-1)}{1.\ 2} = \frac{n(n-3)}{1.\ 2}+1$$

neue Puncte gehen. Wenn wir noch irgend einen neuen Punct, der auf dem Orte (2) liegt und den wir P nennen wollen, kennen, so erhalten wir eine lineare Gleichung zur Bestimmung von μ. Erst dann ist dieser Ort vollkommen und auf einzige Art bestimmt. Derselbe Ort ist aber auch schon bestimmt, wenn wir zu den $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2}-1\right)$ willkührlich angenommenen Puncten jenen Punct P noch hinzufügen. Der auf diese letzte Weise bestimmte Ort geht mithin durch die n^2 Durchschnittspuncte der beiden Curven (1). Da wir für diese beiden Curven irgend zwei beliebige, welche durch die willkührlich angenommenen Puncte gehen, genommen haben, und jede dieser Curven von der Curve (2) ebenfalls nur in n^2 Puncten geschnitten wird, so folgt, dass alle solche Curven sich in denselben n^2 Puncten schneiden, und also ausser durch jene $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2}-1\right)$ Puncte noch durch $\left(\frac{n(n-3)}{1.\ 2}+1\right)$ andere feste Puncte gehen.

Eine ganz analoge Schlussweise können wir auf Curven n. Classe anwenden und erhalten hiernach die nachstehenden beiden Sätze.

Alle Oerter n. Ordnung, welche durch $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2}-1\right)$ *beliebige, gegebene Puncte gehen, gehen überdiess auch noch durch* $\left(\frac{n(n-3)}{1.\ 2}+1\right)$ *andere feste Puncte.*

Alle Oerter n. Classe, welche $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2}-1\right)$ *beliebige, gegebene gerade Linien berühren, berühren überdiess auch noch* $\left(\frac{n(n-3)}{1.\ 2}-1\right)$ *andere feste gerade Linien.*

So gehen zum Beispiel alle Oerter dritter Ordnung, welche durch acht gegebene Puncte gehen, überdiess auch noch durch einen neunten festen Punct. (Wenn insbesondere die acht gegebenen Puncte acht von den neun Durchschnirtspuncten zweier Systeme von drei geraden Linien sind, so ist der neunte feste Punct der neunte Durchschnittspunct). Alle Oerter vierter Ordnung, welche durch dreizehn gegebene Puncte gehen, gehen überdiess auch noch durch drei neue feste Puncte. Und ferner alle Oerter dritter Classe, welche acht gegebene gerade Linien berühren, berühren überdiess auch noch eine neunte feste gerade Linie, und alle Oerter vierter Classe, welche dreizehn gegebene gerade Linien berühren, berühren ausserdem noch drei andere feste gerade Linien.

Wir bemerken noch beiläufig, dass die gegebenen und resultirenden festen Puncte und geraden Linien auch paarweise imaginär werden können. Solche zwei imaginäre Puncte bestimmen sich geometrisch am einfachsten durch einen beliebigen Kegelschnitt und eine demselben nicht begegnende gerade Linie, so wie solche zwei imaginäre gerade Linien durch einen Kegelschnitt und einen innerhalb desselben liegenden Punct.

685. Die beiden Sätze der vorigen Nummer bestehen offenbar auch dann noch, wenn die gegebenen Puncte und geraden Linien alle oder zum Theil oder gruppenweise zusammenfallen und mithin die bezüglichen Oerter in verschiedenartigen Contact-Beziehungen zu einander stehen. Auf diese Weise ergeben sich zum Beispiel die nachstehenden speciellen Sätze.

Alle Curven dritter Ordnung, welche eine gegebene Curve (derselben oder höherer Ordnung) in einem gegebenen Puncte achtpunctig osculiren, schneiden sich ausserdem noch in ein und demselben Punct. Dieser Punct fällt, im Allgemeinen, nicht mit dem Osculationspuncte zusammen, denn sonst könnten zwei Curven dritter Ordnung unter einander niemals einen blossen achtpunctigen, sondern statt desselben immer nur einen neunpunctigen Contact haben. In besondern Puncten nur wird eine Curve dritter Ordnung von andern Curven derselben Ordnung neunpunctig osculirt *). *Wenn irgend eine Curve und auf dem Umfange derselben irgend zwei Puncte gegeben sind, so gehen alle Curven dritter Ordnung, welche die gegebene in jedem der beiden gegebenen Puncte vierpunctig, oder in einem derselben fünfpunctig und in dem andern dreipunctig osculiren, u. s. w. durch einen festen dritten Punct.*

Wenn wir in allen den eben betrachteten Fällen, statt Curven dritter Ordnung, Curven dritter Classe nehmen, so berühren diese jedesmal eine feste gerade Linie, wo jene durch einen festen Punct gehen. (Wenn nemlich irgend zwei Curven sich osculiren, so fällen in den Osculationspunct eben so viele Durchschnittspuncte der beiden

*) Wir können leicht ein paar Beweise zum Belege für die Behauptungen des Textes anführen. Eine gegebene Curve dritter Ordnung, die wir durch die Gleichung

$$X = o$$

darstellen wollen, kann, im Allgemeinen, in einem gegebenen Puncte von einer Curve zweiter Ordnung bloss fünfpunctig osculirt werden, wird aber in besondern Puncten von einer solchen Curve sechspunctig osculirt. (Vergl. die Note zur 328. Nummer des ersten Bandes.) In einem solchen besondern Puncte hat die gegebene Curve dritter Ordnung mit dem Systeme der sechspunctig osculirenden Curve zweiter Ordnung und der Tangente in demselben Puncte einen achtpunctigen Contact. Der einzige Durchschnittspunct dieses Systems und der gegebenen Curve dritter Ordnung ist derjenige Punct, in welchem diese Curve, welche mit der Curve zweiter Ordnung, ausser dem Osculationspuncte, keinen Punct mehr gemein hat, von jener Tangente im Osculationspuncte geschnitten wird. In demselben Puncte wird die gegebene Curve dritter Ordnung von allen denjenigen Curven derselben Ordnung, von welchen sie achtpunctig osculirt wird, geschnitten. Wenn wir die Gleichungen der sechspunctig osculirenden Curve zweiter Ordnung und der Tangente durch

$$Y = o, \qquad T = o,$$

darstellen und durch μ einen unbestimmten Coefficienten bezeichnen, so erhalten wir für die allgemeine Gleichung aller jener achtpunctig osculirenden Curven dritter Ordnung folgende:

$$X+\mu YT = o.$$

In dem eben betrachteten Falle fällt der Durchschnittspunct niemals mit dem Osculationspuncte zusammen, sonst müsste die gegebene Curve dritter Ordnung von der Tangente im Osculationspuncte dreipunctig osculirt werden, es müsste dieser Punct ein Wendungspunct oder ein Rückkehrpunct sein. (Vergl. die eben angezogene Note.) Alsdann aber geht die osculirende Curve zweiter Ordnung nothwendig in ein System von zwei geraden Linien über. Nur in einem der eben bezeichneten singulären Puncte hat die gegebene Curve dritter Ordnung mit andern Curven derselben Ordnung einen neunpunctigen Contact. Für die allgemeine Gleichung aller neunpunctig osculirenden Curven dritter Ordnung erhalten wir alsdann bei der vorstehenden Bezeichnung:

$$X+\mu(T)^3 = o.$$

Curven zusammen, als in die Tangente im Osculationspuncte gemeinschaftliche Tangenten der Curven zusammenfallen; wonach wir die verschiedenen Ordnungen der Osculation auf eine doppelte Weise bestimmen können. Diese Behauptung ergibt sich sogleich a priori, lässt sich aber auch, was in dem letzten Paragraphen geschehen wird, auf analytischem Wege direct beweisen.)

686. Wir haben bis jetzt geometrische Oerter betrachtet, welche durch solche vollständige Gleichungen zwischen Punct- oder Linien-Coordinaten irgend eines höhern Grades dargestellt werden, deren Coefficienten beliebig zu bestimmende Grössen sind. Die Anzahl dieser unbestimmten Coefficienten können wir dadurch vermindern, dass wir annehmen, dass einige dieser Coefficienten ein für alle Mal gegeben sind, oder dass zwischen einigen derselben oder zwischen allen lineare Bedingungs-Gleichungen Statt finden. Indem wir auf diese Weise die bezüglichen Curven gewissen Bedingungen unterwerfen, ändert sich, im Allgemeinen, in dem einen Falle weder die Zahl der Durchschnittspuncte, noch in dem andern Falle die Zahl der gemeinschaftlichen Tangenten je zweier solcher Curven. Diese Bemerkungen führen zu folgenden beiden Sätzen, die allgemeiner sind, als die entsprechenden Sätze der 684. Nummer.

Wenn $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2}-1\right)$ *Coefficienten der allgemeinen Gleichung des n. Grades zwischen Punct-Coordinaten oder auch eine gleiche Anzahl von Bedingungs-Gleichungen zwischen einigen Coefficienten jener Gleichung oder zwischen allen gegeben sind, so schneiden sich alle durch diese Gleichung darstellbaren Oerter n. Ordnung in denselben* $\left(\frac{n(n-3)}{1.\ 2}+1\right)$ *Puncten.*

Wenn $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2}-1\right)$ *Coefficienten der allgemeinen Gleichung des n. Grades zwischen Linien-Coordinaten oder auch eine gleiche Anzahl von Bedingungs-Gleichungen zwischen einigen Coefficienten jener Gleichung oder zwischen allen gegeben sind, so haben alle durch diese Gleichung darstellbaren Oerter n. Classe dieselben* $\left(\frac{n(n-3)}{1.\ 2}+1\right)$ *gemeinschaftlichen Tangenten.*

Jedem gegebenen Puncte einer Curve entspricht eine lineare Bedingungs-Gleichung zwischen allen Constanten der entsprechenden Gleichung zwischen Punct-Coordinaten. Wenn wir also solche besondere Arten von Curven n. Ordnung betrachten, welche durch die allgemeine Gleichung n. Grades, zwischen deren Coefficienten m Bedingungs-Gleichungen Statt finden, und solche Curven durch $\left(\frac{n(n+3)}{1.\ 2}-(m+1)\right)$ gegebene Puncte legen, so schneiden sich dieselben ausserdem noch in $\left(\frac{n(n-3)}{1.\ 2}+1\right)$ festen Puncten. Wir nehmen hierbei natürlich $m \overline{>} \frac{n(n+3)}{1.\ 2}-1$. Eine analoge Bemerkung können wir auch in Beziehung auf den zweiten der beiden vorstehenden Sätze machen.

Ferner erhalten wir für jede neue höhere Ordnung des Contactes irgend einer Curve n. Ordnung mit einer gegebenen Curve in einem gegebenen Puncte eine neue lineare Bedingungs-Gleichung *). Hiernach ergeben sich die Sätze der vorigen Nummer, auch ohne

*) Wenn nemlich

$$F(x,\ y) = 0 \qquad (a)$$

eine gegebene Curve und (y', x') ein gegebener Punct auf ihrem Umfange ist, in welchem dieselbe von einer Curve n. Ordnung, deren Gleichung wir, der Kürze halber, durch

Gränz-Betrachtungen in der Construction, unmittelbar aus den Sätzen der vorliegenden Nummer.

687. Die beiden allgemeinern Sätze der letzten Nummer sind auch auf geometrische Oerter der ersten und zweiten Ordnung, so wie der ersten und zweiten Classe anwendbar. Mit einigen hierher gehörigen Ausführungen wollen wir diesen Paragraphen beschliessen.

Die allgemeinste Gleichung der geraden Linie ist:

$$ay+bx+c = o. \qquad (1)$$

Wenn wir, unbeschadet der Allgemeinheit, den Coefficienten a als ein für alle Mal gegeben betrachten und überdiess die Voraussetzung machen, dass auch c gegeben ist, so gehen nach dem ersten der beiden Sätze der vorigen Nummer alle, alsdann noch durch die Gleichung (1) darstellbaren, geraden Linien durch ein und denselben Punct; dieser Punct liegt bekanntlich auf der zweiten Coordinaten-Axe. Wenn wir voraussetzen, dass der Coefficient b gegeben ist, so gehen alle gerade Linien (1) ebenfalls noch durch einen festen Punct, dieser feste Punct aber liegt unendlich weit, weil alsdann alle jene geraden Linien parallel sind.

Wenn wir wiederum einen der drei Coefficienten der Gleichung (1) als gegeben betrachten und dann voraussetzen, dass zwischen den beiden übrigbleibenden Coefficienten eine gegebene vollständige Gleichung des ersten Grades besteht, oder wenn, was dasselbe heisst, zwischen den drei unbestimmten Coefficienten der Gleichung (1) eine homogene Bedingungs-Gleichung des ersten Grades, etwa folgende:

$$ma+nb+pc = o,$$

in der m, n und p gegebene Grössen bedeuten, Statt findet, so gehen alle geraden Linien (1) durch ein und denselben Punct. Dieser Punct ist leicht zu construiren (406).

Die allgemeine Gleichung des Punctes ist folgende:

$$a+bv+cw = o. \qquad (2)$$

Nehmen wir wiederum in dieser Gleichung den Coefficienten a ein für alle Mal beliebig an und setzen alsdann b constant, so liegen alle durch (2) darstellbare Puncte, nach dem zweiten Satze der vorigen Nummer, auf einer festen geraden Linie. Diese feste

---

$$\varphi(x, y) = Y = o \qquad (b)$$

darstellen wollen, osculirt werden soll, so kommt zuvörderst

$$\varphi(x', y') = o$$

eine Gleichung, welche ausdrückt, dass die Curve n. Ordnung durch den gegebenen Punct geht. Ferner ergibt sich:

$$\frac{dY}{dx}+\frac{dY}{dy}\frac{dy}{dx} = o,$$

$$\frac{d^2Y}{dx^2}+2\frac{d^2Y}{dxdy}\frac{dy}{dx}+\frac{d^2Y}{dy^2}\frac{dy^2}{dx^2}+\frac{dY}{dy}\frac{d^2y}{dx^2} = o,$$

und so weiter. Wenn wir in die letzten Gleichungen für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ diejenigen constanten Werthe setzen, die wir erhalten, wenn wir die Gleichung (a) differentiiren und die Differential-Coefficienten auf den Punct (y', x') beziehen, und ferner auch in den durch die partiellen Differential-Coefficienten bezeichneten Functionen y' und x' für y und x schreiben, so sind diese Gleichungen offenbar lineare Bedingungs-Gleichungen zwischen den Coefficienten der Gleichung (b). Es drücken diese Gleichungen alsdann aber aus, dass die Curve (a) in dem gegebenen Puncte von der Curve (b) berührt wird, dreipunctig osculirt wird und so weiter.

gerade Linie geht durch den Anfangspunct der Coordinaten. Wenn wir statt des Coefficienten b den Coefficienten c constant setzen, so liegen ebenfalls alle Puncte (2) auf einer festen geraden Linie. Diese feste gerade Linie ist alsdann aber der ersten Coordinaten-Axe parallel. Wenn endlich zwischen den drei unbestimmten Coefficienten der Gleichung (2) irgend eine gegebene homogene Bedingungs-Gleichung des ersten Grades, etwa folgende, besteht:

$$ma+nb+pc = o,$$

so liegen ebenfalls wieder alle, durch (2) noch darstellbaren, Puncte auf einer festen, leicht zu construirenden geraden Linie.

Die Sätze der vorliegenden Nummer haben wir schon direct in der 415. Nummer bewiesen.

688. Wir wollen uns in dieser Nummer zur Betrachtung der durch die allgemeine Gleichung:

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f = o, \qquad (1)$$

dargestellten Oerter zweiter Ordnung wenden. Alle solche Curven, welche durch diese Gleichung dargestellt werden, wenn zwei Coefficienten derselben (von denen wir einen immer willkührlich annehmen können) gegeben sind, oder wenn zwischen beliebigen dieser Coefficienten irgend eine lineare und homogene Bedingungs-Gleichung Statt findet — und welche überdiess durch d r e i gegebene Puncte gehen, schneiden sich ausserdem noch in einem v i e r t e n festen Puncte. Wir wollen einige Beispiele hier hervorheben.

Wenn

$$b+a = o,$$

so sind, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, alle durch (1) dargestellte Curven gleichseitige Hyperbeln. Also:

Alle gleichseitige Hyperbeln, welche durch irgend drei gegebene Puncte gehen, schneiden sich ausserdem noch in einem vierten festen Puncte (295).

Da mit solchen Hyperbeln auch drei Systeme von zwei auf einander senkrecht stehenden geraden Linien gehören, so sieht man sogleich ein, dass jener vierte Durchschnittspunct derjenige Punct ist, in welchem, in dem von den drei gegebenen Puncten gebildeten Dreiecke, die von den Winkelpuncten auf die gegenüberliegenden Seiten gefällten drei Perpendikel sich schneiden. Neben dem letzten Satze erhält man insbesondere auch folgenden Satz:

Alle gleichseitigen Hyperbeln, welche eine gegebene Curve in einem gegebenen Puncte dreipunctig osculiren, schneiden sich in einem festen Puncte der Normalen im Osculationspuncte.

Wenn wir a = 1 setzen und alsdann der Coefficient b gegeben ist, so ist die Richtung desjenigen Durchmessers der bezüglichen Curve, dessen zugeordneter der zweiten Coordinaten-Axe parallel ist, gegeben. Also:

Alle Oerter zweiter Ordnung, in welchen irgend zwei zugeordnete Durchmesser zweien gegebenen geraden Linien parallel sind und welche durch drei gegebene Puncte gehen, schneiden sich ausserdem noch in einem vierten festen Puncte.

Aus diesem Satze folgt durch theilweise Umkehrung, dass in allen Oertern zweiter Ordnung, welche durch vier gegebene Puncte gehen, zwei Durchmesser, welche zugeordnete sind, dieselbe Richtung haben (376).

Es stellt bekanntlich die Gleichung

$$ay+bx+d = 0 \qquad (2)$$

denjenigen Durchmesser der Curve (1) dar, dessen zugeordneter der zweiten Coordinaten-Axe parallel ist. Wenn der Quotient $\frac{d}{a}$ gegeben ist, so kennen wir also einen Punct jenes Durchmessers. Es liegt dieser Punct auf der zweiten Coordinaten-Axe.

Wenn wir irgend einen beliebigen Punct (y', x') des Durchmessers (2) kennen, so erhalten wir folgende Bedingungs-Gleichung:

$$ay'+bx'+d = 0,$$

die, in Beziehung auf die drei Coefficienten a, b und d der Gleichung (1), homogen und linear ist.

Wenn endlich eine feste gerade Linie:

$$y = \alpha x+\beta,$$

gegeben ist, so hat derjenige Durchmesser, dessen zugeordneter dieser geraden Linie parallel ist, folgende Gleichung (244):

$$(ay+bx+d)\alpha+(by+cx+e) = 0, \qquad (3)$$

und wenn wiederum ein Punct dieses Durchmessers gegeben ist, so erhalten wir eine lineare und homogene Gleichung zwischen den fünf ersten Coefficienten der Gleichung (1).

Auf dreifache Weise führt uns hiernach die 686. Nummer zu folgendem Satze:

Alle Oerter zweiter Ordnung, in welchen derjenige Durchmesser, dessen zugeordneter einer gegebenen geraden Linie parallel ist, durch einen gegebenen Punct geht, und welche durch drei gegebene Puncte gehen, schneiden sich ausserdem noch in einem vierten festen Puncte (377).

Wir erhalten noch folgende drei andere Fälle des ersten allgemeinen Satzes der 686. Nummer.

Wenn zwischen den Coefficienten der allgemeinen Gleichung (1) zwei lineare und homogene Bedingungs-Gleichungen Statt finden, so gehen alle durch diese Gleichung noch darstellbaren und durch zwei gegebene Puncte gehende Oerter ausserdem noch durch zwei andere feste Puncte. Wenn zwischen jenen Coefficienten drei lineare und homogene Bedingungs-Gleichungen Statt finden, so gehen alle bezüglichen Oerter, welche durch einen gegebenen Punct gehen, ausserdem noch durch drei andere feste Puncte. Wenn endlich zwischen jenen Coefficienten vier solcher Bedingungs-Gleichungen bestehen, so schneiden sich alle bezüglichen Oerter in denselben vier Puncten.

Beispiele von der Anwendung dieser Sätze liegen nahe. Stellen wir z. B. mehrere Bedingungs-Gleichungen von der Form der Gleichung (3) zusammen, so ergibt sich folgender Satz:

Alle Oerter zweiter Ordnung, welche durch (4—m) gegebene Puncte gehen und der Bedingung unterworfen sind, dass solche m Durchmesser jeder derselben, deren zugeordnete m gegebenen geraden Linien parallel sind, durch m gegebene Puncte gehen, schneiden sich, ausser in den gegebenen, noch in m festen Puncten.

Wir können in der Aussage dieses Satzes $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$ und $m = 4$ setzen. In dem letzten Falle sind die fünf ersten Coefficienten der Gleichung (1) vollkommen bestimmt, wenn wir einen derselben ein für alle Mal beliebig annehmen. Alle Oerter sind alsdann ähnliche, ähnlich liegende und concentrische: ihre (reellen oder imagi-

nären) Durchschnittspuncte fallen paarweise zusammen und liegen auf zwei bestimmten geraden Linien, den (reellen oder imaginären) Asymptoten derselben unendlich weit.

Um noch ein zweites Beispiel zu geben, wollen wir zwei solche Puncte (y', x') und (y", x") betrachten, von denen einer auf der Polaren des andern liegt. Alsdann erhalten wir folgende, in Beziehung auf die Coordinaten der beiden Puncte, symmetrische Gleichung (268):

$$ay'y''+b(x'y''+x''y')+cx'x''+d(y'+y'')+e(x'+x'')+f = o,$$

in welcher die Constanten der allgemeinen Gleichung nur auf lineare Weise vorkommen, und wenn wir mehrere solcher Gleichungen zusammenstellen, folgenden Satz:

Alle Oerter zweiter Ordnung, welche durch (4—m) gegebene Puncte gehen und überdiess der Bedingung unterworfen sind, dass die Polaren von m gegebenen Puncten durch m andere, ebenfalls gegebene, Puncte gehen, schneiden sich, ausser in den (4—m) gegebenen, noch in m festen Puncten.

Aus diesem letzten Satze ergibt sich der vorhergehende, wenn wir annehmen, dass die m gegebenen Pole nach gegebenen Richtungen hin unendlich weit rücken. Wenn wir im letzten Satze m = 1 nehmen, so gibt eine theilweise Umkehrung den zweiten Satz der 380. Nummer.

639. Die Anwendung des zweiten allgemeinen Satzes der 686. Nummer auf Oerter zweiter Classe, für deren Gleichung wir folgende nehmen wollen:

$$Aw^2+2Bvw+Cv^2+2Dw+2Ev+F = o, \qquad (1)$$

gibt mehrere einzelne Sätze, die wir in folgender Aussage zusammenfassen können:

Wenn zwischen beliebigen Coefficienten der allgemeinen Gleichung der Oerter zweiter Classe m homogene Bedingungs-Gleichungen des ersten Grades bestehen, oder wenn, nachdem einer dieser Coefficienten ein für alle Mal angenommen worden ist, m der übrigen Coefficienten gegeben sind, so berühren alle Oerter, welche alsdann noch durch die allgemeine Gleichung dargestellt werden können, und (4—m) gegebene gerade Linien berühren, ausserdem noch m feste gerade Linien und haben also dieselben vier gemeinschaftlichen Tangenten.

Es kann in der Aussage dieses Satzes m = 1, m = 2, m = 3 und m = 4 sein. Wir wollen auch hier ein paar Beispiele hervorheben.

Wenn in der allgemeinen Gleichung C+F = o, so werden (bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten) alle Oerter, vom Anfangspuncte der Coordinaten aus, unter rechtem Winkel gesehen (483); wenn E = o, so bilden die beiden durch den Anfangspunct gehenden Tangenten mit den Coordinaten-Axen ein System von vier Harmonicalen (469); wenn

$$A+\alpha B+\beta D = o,$$

und α und β gegebene Coefficienten bedeuten, so liegen die Mittelpuncte aller bezüglichen Curven auf einer gegebenen geraden Linie (455), und so weiter. Also:

Alle Oerter zweiter Classe, welche von einem gegebenen Puncte aus unter rechten Winkeln gesehen werden, oder an welche sich von einem gegebenen Puncte aus Tangenten legen lassen, welche mit zwei festen, durch diesen Punct gehenden, Tangenten ein System von vier Harmonicalen bilden, oder deren Mittelpuncte auf einer gegebenen geraden Linie liegen, und so weiter — und welche überdiess drei gegebene gerade Linien berühren, berühren ausserdem noch eine vierte feste gerade Linie.

Wenn zwei gerade Linien (w', v', u') und (w'', v'', u'') gegeben sind, von welchen eine durch den Pol der andern, rücksichtlich eines durch die allgemeine Gleichung (1) dargestellten Ortes zweiter Classe, geht (eine Beziehung der beiden gegebenen geraden Linien zu einander, die immer eine gegenseitige ist), so erhalten wir nach der 548. Nummer folgende lineare Bedingungs-Gleichung zwischen den unbestimmten Coefficienten der allgemeinen Gleichung:

$$Aw'w''+B(v'w''+v''w'')+Cv'v''+D(u'w''+u''w')+E(u'v''+u''v')+Fu'u'' = 0,$$

und hiernach folgenden Satz:

Alle Oerter zweiter Classe, welche (4—m) gegebene gerade Linien berühren und überdiess der Bedingung unterworfen sind, dass, in Beziehung auf jeden derselben, m gegebene gerade Linien durch die m Pole von m andern gegebenen geraden Linien gehen, berühren ausserdem noch m, also im Ganzen 4 feste gerade Linien.

Ausführliche Entwicklungen für den Fall, dass in der Aussage des an die Spitze dieser Nummer gestellten Satzes $m = 4$ ist, finden sich schon in der 534. — 541. und ferner in der 608. Nummer. —

Die vorstehenden Ausführungen sind hinreichend um zu zeigen, wie wir auf einem neuen Wege zu den hauptsächlichsten Sätzen über die Zusammenstellung von Kegelschnitten unter sich und mit Systemen von zwei Puncten und zwei geraden Linien gelangen können. Hier ist natürlich nicht der Ort, diese verschiedenen Sätze im Detail zu discutiren, was überdiess auch schon zum Theil in dem Früheren geschehen ist. —

§. 2.

Eine Gruppe von einigen allgemeinen analytisch-geometrischen Sätzen.

690. Es sei

$$F(y, x, b, a) = 0 \qquad (1)$$

irgend eine gegebene algebraische oder transscendente Gleichung zwischen den beiden gewöhnlichen Punct-Coordinaten y und x, und beliebigen constanten Grössen, von denen irgend zwei durch b und a bezeichnet worden sind. Es seien ferner y', x' und y'', x'' zwei Paare gegebener, zusammengehöriger Werthe von y und x, welche die vorstehende Gleichung befriedigen. Alsdann hat man

$$F(y', x', b, a) = 0,$$
$$F(y'', x'', b, a) = 0,$$

und aus diesen beiden Gleichungen kann man die Werthe von b und a ziehen. Betrachten wir b und a als gewöhnliche Punct-Coordinaten und veränderlich, so stellen die beiden letzten Gleichungen zwei Curven dar, und diese Curven gehen beide nothwendig durch denjenigen Punct, dessen Coordinaten gleich b und a sind, das heisst, gleich jenen beiden Constanten der gegebenen Gleichung (1). Da wir die beiden Puncte (y', x') und (y'', x'') beliebig auf der durch diese Gleichung dargestellten Curve annehmen können, so erhalten wir folgenden Satz:

Wenn man irgend einen Punct, der durch die Gleichung

$$F(y, x, b, a) = 0 \qquad (1)$$

dargestellten Curven durch (y', x') bezeichnet, so gehen alle Curven, welche durch folgende Gleichung:

$$F(y', x', b, a) = 0, \qquad (2)$$

wenn wir in derselben nach einander für y' und x' alle möglichen Werthe, welche den verschiedenen Lagen des Punctes (y', x') auf der Curve (1) entsprechen, substituiren, dargestellt werden, durch den festen Punct (b, a).

Wenn in der Gleichung (1) b oder a bloss in der zweiten Potenz vorkommt, so schneiden sich alle Curven (2) in denselben zwei Puncten, die symmetrisch liegen, in Beziehung auf die erste oder zweite Coordinaten-Axe, zu beiden Seiten derselben. Wenn b und a beide zugleich nur in der zweiten Potenz vorkommen, so schneiden sich alle Curven in denselben vier Puncten, welche die vier Winkelpuncte eines Parallelogrammes sind, dessen Mittelpunct der Anfangspunct der Coordinaten ist. Wenn b nur in irgend einer m. und a nur in irgend einer n. Potenz in der Gleichung (1) vorkommen, so schneiden sich alle Curven (2) in denselben mn Puncten. Von diesen Puncten sind aber nur einer oder zwei oder vier reell.

Nichts verhindert uns anzunehmen, dass in der Gleichung (1), von welcher wir ausgehen, b und a gleich Null seien, oder, mit andern Worten, dass diese Grössen in jener Gleichung nicht vorkommen. Alsdann können wir, zum Behuf der Construction des vorstehenden Satzes, jener Gleichung beliebige Glieder hinzufügen, in denen b und a als Coefficienten vorkommen, und die mithin, wenn wir diese Grössen gleich Null setzen, wiederum wegfallen.

691. Wir wollen den vorstehenden Satz durch einige Beispiele erläutern. Es sei zuvörderst, indem wir rechtwinklige Coordinaten voraussetzen,

$$(y-b)^2 = 4px \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung, aus der man, wenn man auf die angezeigte Weise verfährt, folgende erhält:

$$(y-y')^2 = 4x'x. \qquad (2)$$

Man sieht sogleich, dass die beiden Gleichungen (1) und (2) Parabeln darstellen, welche die zweite Coordinaten-Axe berühren und deren Durchmesser der ersten Axe parallel sind. Der, auf der ersten Curve (1) beliebig angenommene, Punct (y', x') ist der Brennpunct der Curve (2), welche nach dem in Rede stehenden Satze durch den festen Punct (b, p), mithin durch den Brennpunct der ersten Parabel geht. Also:

Wenn man eine Parabel mit veränderlichem Parameter, die der Bedingung unterworfen ist, dass sie, in ihrem Scheitel, eine gegebene gerade Linie berührt, sich so bewegen lässt, dass ihr Brennpunct eine gegebene Parabel, die derselben Bedingung unterworfen ist, durchläuft, so geht die bewegliche Parabel immer durch den Brennpunct der gegebenen.

Wir wollen ferner folgende Gleichung nehmen:

$$y^2-b^2 = 4px, \qquad (1)$$

aus der wir auf die angezeigte Weise folgende herleiten:

$$y^2-y'^2 = -4x'x. \qquad (2)$$

Alle durch die letzte Gleichung dargestellten Parabeln gehen, wenn, der Voraussetzung gemäss, (y', x') irgend ein Punct der durch die erste Gleichung dargestellten Parabel ist, durch die beiden festen Puncte (b, p) und $(-b, p)$. Wenn man berücksichtigt, dass $\pm y'$ die Ordinaten derjenigen beiden Puncte sind, in welchen die jedesmalige Parabel (2) der zweiten Axe begegnet, und dass x' den Abstand des Brennpunctes dieser Parabel von ihrem Scheitel ist, so erhält man folgenden Satz:

Wenn irgend eine Parabel gegeben ist und man irgend zwei gerade Linien zieht, die senkrecht auf der Richtung ihrer Durchmesser stehen und von welchen man eine als fest und die andere als beweglich betrachtet, dann ferner von den beiden Durchschnitts-puncten der Curve mit dieser geraden Linie auf jene zwei Perpendikel fällt und endlich eine solche neue Parabel durch die Fusspuncte dieser beiden Perpendikel legt, deren Brennpuncts-Entfernung der Länge dieser Perpendikel gleich ist und deren Durchmesser den Durchmessern der gegebenen Parabel parallel sind, so geht diese neue Parabel durch dieselben beiden festen Puncte, welche Lage die bewegliche gerade Linie auch haben mag.

Wenn die gegebene feste gerade Linie die gegebene Parabel schneidet, so öffnen sich die durch (2) dargestellten Parabeln nach entgegengesetzter Richtung, wenn der Punct (y', x') von der einen Seite dieser geraden Linie auf die andere rückt. In diesem Falle drückt insbesondere die Gleichung (2) auch ein System von zwei Parallellinien aus. Wenn die gegebene Parabel von der gegebenen festen geraden Linie berührt wird, so ist $b = o$ und alle durch (2) darstellbare Parabeln berühren sich im Brennpuncte der gegebenen Parabel. Wenn die gegebene feste gerade Linie der gegebenen Parabel nicht begegnet, so wird b imaginär: in diesem Falle haben alle Parabeln (2) eine gemeinschaftliche ideale Chorde, deren Gleichung immer folgende bleibt:

$$x = p.$$

Wir wollen wiederum von einer Gleichung ausgehen, die derjenigen, von welcher wir eben ausgegangen sind, ähnlich ist, nemlich von folgender:

$$y^2 = -2px+b^2,$$

aber dann die Form der einen Constanten ändern, indem wir p^2+c^2 für b^2 schreiben. Man hat alsdann

$$y^2 = -2px+p^2+c^2, \qquad (1)$$

und hieraus geht folgende Gleichung hervor:

$$y'^2 = -2x'x+x^2+y^2,$$

der wir auch folgende Form geben können:

$$y^2+(x-x')^2 = y'^2+x'^2. \qquad (2)$$

Es stellt diese Gleichung einen solchen Kreis dar, dessen Mittelpunct der Punct (o, x) und dessen Radius gleich $\sqrt{[y'^2+x'^2]}$ ist. Dieser Kreis geht durch die beiden festen Puncte (c, p) und $(-c, p)$. Hiernach ergibt sich folgender Satz:

Wenn man von irgend einem Puncte einer Parabel zwei Perpendikel fällt, das eine auf die Axe derselben und das andere auf eine gegebene feste gerade Linie, die ebenfalls auf dieser Axe senkrecht steht, und man alsdann aus dem Fusspuncte des einen Perpendikels, als Mittelpuncte, einen Kreis beschreibt, der durch den Fusspunct des andern Perpendikels geht, so schneidet dieser Kreis ein und dieselbe gerade Linie, die der gegebenen parallel ist und von derselben um die doppelte Brennpuncts-Entfernung absteht, immer in denselben beiden Puncten, wo man auch jenen Punct auf dem Umfange der gegebenen Parabel annehmen mag.

Wenn die gegebene feste gerade Linie (die zweite Coordinaten-Axe) durch den Brennpunct der gegebenen Parabel geht, so verschwindet aus der Gleichung (1) die Constante c; es haben alsdann alle in Rede stehenden Kreise im Puncte (c, p) eine gemeinschaftliche Tangente, die keine andere ist, als die Directrix der gegebenen Parabel. Wir begegnen in diesem Falle dem allbekannten Satze, „dass jeder Punct der Parabel gleich

weit von ihrem Brennpuncte und ihrer Directrix absteht." Wenn die gegebene feste gerade Linie, in Beziehung auf eine ihr parallele und durch den Brennpunct gehende gerade Linie, auf derselben Seite liegt als der Scheitel der Parabel, so ist die gemeinschaftliche Chorde aller Kreise (2) eine ideale.

Es liefert der letzte Satz eine einfache Construction folgender beiden Aufgaben:

Irgend zwei gegebene Puncte durch den Bogen einer Parabel zu verbinden, wenn die Axe dieser Parabel gegeben ist und man weder den Brennpunct noch den Scheitel derselben erreichen kann. Unter denselben Bedingungen einen parabolischen Bogen zu construiren, wenn statt eines gegebenen Punctes der Parameter gegeben ist.

Wenn wir von folgender Gleichung ausgehen:

$$y^2 - by = px, \qquad (1)$$

so erhalten wir folgende:

$$y'y + x'x = y'^2; \qquad (2)$$

die Gleichung einer geraden Linie, welche durch den Punct (y', o) geht und senkrecht auf derjenigen geraden Linie steht, die den Anfangspunct der Coordinaten mit dem Puncte (y', x') verbindet. Nach dem allgemeinen Satze dreht sich die gerade Linie (2) um den Punct (b, p), wenn der Punct (y', x') auf der gegebenen Parabel sich fortbewegt. Ich verweile nicht bei der Aussage dieses Satzes. Wenn wir $b = o$ setzen, so wird die gegebene Parabel von der zweiten Coordinaten-Axe berührt. Sie wird, im Allgemeinen, von dieser Axe in zwei Puncten geschnitten. Jeden dieser beiden Puncte können wir nach einander zum Anfangspuncte der Coordinaten nehmen. Auf diese Weise ergibt sich folgender Zusatz:

Wenn ein Rechteck ABCD gegeben ist, und man die Schenkel eines rechten Winkels durch die gegenüberstehenden Winkelpuncte A und C, und die eines zweiten rechten Winkels durch die Winkelpuncte B und D so legt, dass die durch C und D gehenden Schenkel sich in irgend einem Puncte Q der geraden Linie AB schneiden, so schneiden sich die beiden andern, durch A und B gehenden, Schenkel in einem Puncte M, der, wenn der Punct Q auf der geraden Linie AB sich fortbewegt, eine Parabel beschreibt.

An diesen Satz knüpfen sich neue Constructionen der beiden oben angeführten Aufgaben.

Wir wollen endlich die beiden letzten Gleichungen in umgekehrter Ordnung nehmen, indem wir von der zweiten dieser Gleichungen, in welcher wir bloss x'' und y'' an die Stelle von x' und y' schreiben wollen, ausgehen. Wenn wir hiernach die Gleichung:

$$y''y + x''x = y''^2, \qquad (1)$$

zu Grunde legen, so erhalten wir folgende:

$$y^2 - y'y = x'x. \qquad (2)$$

Wenn der Punct (y', x') auf der geraden Linie (1) beliebig angenommen wird, so geht die Parabel (2), nach dem allgemeinen Satze, auch, ausser durch den Anfangspunct, noch durch den festen Punct (y'', x''). Statt bei der Aussage dieses Satzes zu verweilen, wollen wir, mit Hülfe desselben, folgende Aufgabe construiren:

Die Parameter derjenigen beiden Parabeln, welche durch vier gegebene Puncte sich legen lassen, zu bestimmen.

Da wir die Richtungen der Durchmesser dieser beiden Parabeln nach der 376. Nummer leicht finden können, so ist die vorstehende Aufgabe darauf zurückgeführt, den Pa-

rameter einer Parabel zu bestimmen, welche durch drei gegebene Puncte geht und deren Durchmesser eine gegebene Richtung haben. Es seien (Fig. 38) O, M' und M'' diese drei gegebenen Puncte und OX die gegebene Richtung der Durchmesser. Die Gleichung der hierdurch bestimmten Parabel, bei irgend einem beliebigen Coordinaten-Winkel, sei die Gleichung (2), indem wir OX und OY zu den beiden Coordinaten-Axen, M'' für den Punct (y'', x'') und $OM' = y'$ nehmen. Alsdann können wir leicht die gerade Linie (1) construiren, es sei dieselbe QR. Legen wir alsdann durch den Punct M' eine gerade Linie M'P, parallel mit OX und bis zur geraden Linie QR, so erhalten wir die Grösse des Parameters desjenigen Durchmessers, welcher in der zu bestimmenden Parabel die der zweiten Coordinaten-Axe parallelen Chorden halbirt. Der Hauptparameter der Parabel ist alsdann, wenn wir den Coordinaten-Winkel ϑ nennen, gleich $M'P \sin^2\vartheta = pp$.

Fig. 38.

Es sei, um noch ein letztes Beispiel zu geben:

$$y''x + x''y = xy, \qquad (1)$$

die gegebene Gleichung, aus der man nach dem bekannten Verfahren folgende erhält:

$$x'y + y'x = x'y', \qquad (2)$$

welche eine gerade Linie darstellt, die von den beiden Coordinaten-Axen die Segmente y' und x' abschneidet und, nach dem allgemeinen Satze, nicht aufhört durch den festen Punct (y'', x'') zu gehen, wie auch der Punct (y', x') auf der Curve (1) fortrücken mag. Diese Curve ist eine Hyperbel, welche durch den Anfangspunct der Coordinaten geht, deren Asymptoten den Coordinaten-Axen parallel sind und deren Mittelpunct der Punct (y'', x'') ist.

In allen Parallelogrammen, deren zwei gegenüberliegende Winkelpuncte auf einer gegebenen Hyperbel liegen und deren Seiten den Asymptoten derselben parallel sind, geht eine Diagonale durch den Mittelpunct dieser Hyperbel.

692. Wenn wir in der 690. Nummer, statt zwei Constanten der Gleichung (1) als Punct-Coordinaten und veränderlich zu betrachten, dieselben als Linien-Coordinaten und veränderlich betrachten, so erhalten wir, was sogleich einleuchtet, folgenden Satz:

Wenn man irgend einen Punct der durch die Gleichung

$$F(y, x, b, a) = 0 \qquad (1)$$

dargestellten Curve durch (y', x') *bezeichnet, so berühren alle Curven, welche durch folgende Gleichung:*

$$F(y', x', w, v) = 0,$$

wenn wir in derselben für y' *und* x' *nach einander alle möglichen Werthe nehmen, welche den verschiedenen Lagen des Punctes* (y', x') *auf der Curve* (1) *entsprechen, und* w *und* v *als Linien-Coordinaten und veränderlich betrachten, dargestellt werden, ein und dieselbe gerade Linie* $(w = b,\ v = a)$. *Statt der Linien-Coordinaten* w *und* v *können wir auch die Linien-Coordinaten* w *und* u *oder* v *und* u *nehmen.*

Ich begnüge mich hier zur Erläuterung des vorstehenden Satzes mit einem einzigen Beispiele, und will zu diesem Ende vorzugsweise folgende Gleichung zu Grunde legen, die einer früher betrachteten ähnlich ist:

$$(y+\alpha x)^2 + 2\gamma y = 0.$$

Es stellt dieselbe eine solche Parabel dar, welche von der ersten Axe im Anfangspuncte der Coordinaten berührt wird, auf der zweiten Axe ein Segment $(-w) = -2\gamma$ abschneidet, und in welcher die Richtung der Durchmesser durch die Gleichung $v = \alpha$ gegeben

ist. Wenn wir auf dieser Parabel irgend einen Punct (y', x') beliebig annehmen, und w und v an die Stelle von $2y$ und a schreiben, so kommt:

$$(y'+x'v)^2+y'w = 0,$$

und diese Gleichung stellt, wenn wir w und v als veränderlich betrachten, eine neue Parabel dar, deren Durchmesser der zweiten Coordinaten-Axe parallel sind, welche eine durch den Punct (y', x') gehende, der ersten Coordinaten-Axe parallele, gerade Linie und überdiess noch eine zweite, durch denselben Punct und den Anfangspunct der Coordinaten gehende, gerade Linie und zwar im Anfangspuncte berührt. Wie auch der Punct (y', x') auf der gegebenen Parabel (1) fortrücken mag, die durch (2) dargestellte Parabel hört nicht auf, die gerade Linie $(w = 2y,\ v = a)$, dass heisst, denjenigen Durchmesser der erstgenannten Parabel, welche durch den zweiten Durchschnittspunct derselben mit der zweiten Coordinaten-Axe geht, zu berühren. Ich verweile nicht bei der Aussage des hierin enthaltenen Satzes, der sich auch theilweise umkehren lässt.

693. Die folgenden beiden Sätze, deren Richtigkeit nach dem Vorhergehenden sogleich in die Augen springt, reihen sich an die Sätze der 690. und 692. Nummer unmittelbar an.

Wenn man irgend eine Tangente der durch folgende Gleichung zwischen Linien-Coordinaten

$$F(w, v, b, a) = 0$$

dargestellten, durchaus beliebigen Curve durch (w', v') *bezeichnet, so gehen alle Curven, welche durch folgende Gleichung:*

$$F(w', v', y, x) = 0,$$

dargestellt werden, wenn wir y *und* x *als Punct-Coordinaten und veränderlich betrachten und der Tangente* (w', v') *nach einander alle möglichen Lagen geben, durch den festen Punct* $(y = b,\ x = a)$.

Wenn wir ferner b *und* a *als Linien-Coordinaten und veränderlich betrachten, als* w *und* v *oder als* v *und* u, *so stellen, bei denselben Voraussetzungen als eben, die Gleichungen:*

$$F(w', v', w, v) = 0 \quad oder \quad F(w', v', v, u) = 0,$$

solche Curven dar, welche alle dieselbe gerade Linie $(w = b,\ v = a)$ *oder* $(v = b,\ u = a)$ *berühren.*

694. Um den ersten der beiden vorstehenden Sätze durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir von folgender Gleichung ausgehen:

$$(v-v'')^2+(u-u'')^2 = k^2, \qquad (1)$$

die bekanntlich, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, eine solche Curve zweiter Classe darstellt, deren ein Brennpunct in den Anfangspunct der Coordinaten fällt, deren, diesem Brennpuncte entsprechende, Directrix die gerade Linie (v'', u'') und deren Parameter gleich dem Doppelten des reciproken Werthes von k ist. Wenn wir alle Glieder dieser Gleichung mit der vierten Potenz einer beliebigen Grösse a, die eine gegebene Linien-Länge bedeutet, multipliciren und dann x und y an die Stelle von $(-\frac{1}{2}a^2v'')$ und $(-\frac{1}{2}a^2u'')$ und v' und u' an die Stelle von v und u schreiben, so erhalten wir folgende Gleichung:

$$(x+\tfrac{1}{2}a^2v')^2+(y+\tfrac{1}{2}a^2u')^2 = (\tfrac{1}{2}a^2k)^2, \qquad (2)$$

die, wenn wir y und x als veränderlick betrachten und für (v', u') nach einander alle möglichen Tangenten der gegebenen Curve nehmen, solche Kreise von constantem Ra-

dius darstellt, die alle durch den festen Punct ($y = -\frac{1}{2}a^2u''$, $x = -\frac{1}{2}a^2v''$) gehen. Die Mittelpuncte aller dieser Kreise liegen also auf einem neuen Kreise, dessen Gleichung folgende ist:

$$(x+\tfrac{1}{2}a^2v'')^2+(y+\tfrac{1}{2}a^2u'')^2 = (\tfrac{1}{2}a^2k)^2.$$

Hiernach erhalten wir den folgenden Satz:

Wenn man an eine Curve zweiter Classe eine beliebige Tangente legt, die von zwei festen im Brennpuncte derselben sich unter rechten Winkeln schneidenden geraden Linien (OY, OX) irgend zwei Segmente (OQ, OP) abschneidet, und dann auf denselben beiden geraden Linien zu jedem dieser Segmente und einer gegebenen Linien-Länge die dritte Proportional-Linie (OS, OR) sucht, so findet man zwei solche Puncte (S, R), deren Mitte einen Kreis beschreibt, wenn die an die gegebene Curve gelegte Tangente nach einander alle möglichen Lagen erhält.

Ein einfaches Beispiel des zweiten Satzes der vorigen Nummer liefert folgende Gleichung:

$$u''v+v''u = u''v'', \qquad (1)$$

die einen Punct darstellt. Bedeutet (v', u') irgend eine durch diesen Punct gehende gerade Linie, so stellt die Gleichung:

$$v'u+u'v = uv, \qquad (2)$$

diejenige Parabel dar, welche die beiden Coordinaten-Axen in denjenigen beiden Puncten berührt, in welchen dieselben von dieser geraden Linie geschnitten werden. Also:

Alle Parabeln, welche irgend zwei gegebene gerade Linien in solchen zwei Puncten berühren, welche mit einem gegebenen festen Puncte in gerader Linie liegen, berühren ausserdem noch ein und dieselbe dritte gerade Linie.

Diese dritte gerade Linie (v'', u'') ist die zweite Diagonale desjenigen Parallelogramms, dessen zwei Seiten in die beiden gegebenen geraden Linien fallen, und dessen erste Diagonale den Durchschnitt dieser beiden Linien mit dem gegebenen festen Puncte verbindet. Wenn diese dritte gerade Linie gegeben ist, so können wir, umgekehrt, auch leicht den festen Punct construiren, und hiernach erhalten wir, da drei gegebene gerade Linien sich auf dreifache Weise zu zwei combiniren lassen, folgenden Satz:

Die drei Berührungs-Chorden aller Parabeln, welche einem gegebenen Dreiecke eingeschrieben sind, gehen durch drei feste Puncte. Diese Puncte sind die Winkelpuncte eines neuen Dreiecks, das dem gegebenen umschrieben und demselben ähnlich ist.

Wenn wir, statt von der Gleichung (1), von der Gleichung (2) ausgehen, so erhalten wir bei demselben Verfahren den Satz der 273. und, mit einer leichten Modification, den Satz der 274. Nummer.

695. Es ist klar, dass die vier in diesem Paragraphen aufgestellten Sätze (690, 692, 693) nicht nur auf die von uns bisher gebrauchten, sondern auch auf alle mögliche sonstige Punct- und Linien-Coordinaten sich beziehen. So können wir zum Beispiel auch z und x oder y (416, Note), oder sogenannte Polar-Coordinaten, oder auch die Coordinaten desjenigen Systems, mit welchem ich mich in einem Aufsatze in CRELLE'S Journal *) beschäftigt habe, wonach die Lage eines Punctes durch die Quotienten je zweier Abstände desselben von drei gegebenen geraden Linien ausgedrückt wird, zu Grunde legen.

*) *Ueber ein neues Coordinaten-System.* V. S. 1 — 36.

696. Ich schliesse diesen Paragraphen mit einer allgemeinen Andeutung. Es findet dieselbe bei allen vier Haupt-Theoremen desselben ihre Stelle; um mich indess einfacher und bequemer ausdrücken zu können, will ich mich zunächst ausschliesslich auf den ersten dieser vier Sätze beschränken.

Wenn wir wiederum in der Gleichung irgend einer gegebenen Curve:

$$F(y, x, b, a) = 0, \qquad (1)$$

nach einander für die veränderlichen Grössen y und x bestimmte Coordinaten-Werthe, y' und x', y'' und x'', u. s. w., die sich auf verschiedene Puncte dieser Curve beziehen, nehmen, wonach zwei der alsdann resultirenden Gleichungen folgende sind:

$$\begin{aligned} F(y', x', b, a) &= 0, \\ F(y'', x'', b, a) &= 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

so können wir durch diese beiden Gleichungen b und a, die beiden Constanten der Gleichung (1), bestimmen. Schreiben wir in den letzten Gleichungen für b und a die Symbole $\psi(y, x)$ und $\varphi(y, x)$, welche wir als zwei unbekannte, durch diese Gleichungen zu bestimmende Grössen betrachten, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} F[y', x', \psi(y, x), \varphi(y, x)] &= 0, \\ F[y'', x'', \psi(y, x), \varphi(y, x)] &= 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

und es ist:

$$\begin{aligned} \psi(y, x) &= b, \\ \varphi(y, x) &= a. \end{aligned} \qquad (4)$$

Nun können wir aber auch die Gleichungen (3) und (4) aus einem andern Gesichtspuncte ansehen, indem wir y und x als veränderlich und $\psi(y, x)$ und $\varphi(y, x)$ als beliebige gegebene Functionen dieser Grössen betrachten. Alsdann stellen die beiden Gleichungen (3) zwei Curven dar, ebenso die beiden Gleichungen (4). Jene beiden Curven gehen alsdann offenbar durch alle Durchschnittspuncte dieser beiden, schneiden einander ausserdem aber auch noch in andern Puncten, weil, im Allgemeinen, b und a nicht die einzigen Werthe sind, welche wir für $\psi(y, x)$ und $\varphi(y, x)$ durch Elimination zwischen den beiden Gleichungen (3) erhalten. Es können b und a alle möglichen Werthe haben und insbesondere auch gleich Null sein. Ich begnüge mich hier mit der blossen Aussage des auf diese Weise bewiesenen Satzes, indem ich dieselbe sogleich auf alle vier bisher behandelten Fälle ausdehne. Einer ganz speciellen Anwendung dieses Satzes werden wir in dem folgenden Paragraphen begegnen.

Wenn irgend eine Curve durch die Gleichung

$$F(\lambda, \varkappa, b, a) = 0, \qquad (1)$$

in welcher λ *und* $\varkappa$ *irgend beliebige Punct- oder Linien-Coordinaten und b und a zwei Constanten bedeuten, dargestellt wird, so erhalten wir die Gleichungen neuer Curven, wenn wir für* λ *und* $\varkappa$ *solche Werthe* λ' *und* $\varkappa'$ *nehmen, welche der Gleichung* (1) *Genüge thun, und dann*

$$\begin{aligned} b &= \psi(\mu, \nu), \\ a &= \varphi(\mu, \nu), \end{aligned} \qquad (2)$$

setzen und μ *und* ν *als veränderlich und zwar einmal als beliebige Punct-Coordinaten, das andere Mal als beliebige Linien-Coordinaten betrachten. Einmal gehen alsdann alle solche Curven, deren Gleichungen mithin folgende Form haben:*

$$F[\lambda', \varkappa', \psi(\mu, \nu), \varphi(\mu, \nu)] = 0, \qquad (3)$$

durch alle Durchschnittspuncte der beiden Oerter (2), *das andere Mal werden sie von allen gemeinschaftlichen Tangenten dieser beiden Oerter ebenfalls berührt.*

§ 3.

Das Princip der Reciprocität.

697. Die allgemeinste Gleichung der geraden Linie zwischen gewöhnlichen Punct-Coordinaten ist:

$$Ay+Bx+C = 0. \qquad (1)$$

Statt dieser Gleichung können wir folgende nehmen:

$$[\eta b+\vartheta a+\xi]y+[\varkappa b+\lambda a+\mu]x+[\nu b+\varrho a+\sigma] = 0, \qquad (2)$$

indem wir die Form der in derselben vorkommenden drei Constanten ändern. Die Gleichung (2) ist die allgemeinste Gleichung, in welcher einerseits die beiden veränderlichen Grössen y und x und andrerseits zwei constante Grössen b und a nur in der ersten Potenz vorkommen. Wenn wir für y und x die Coordinaten-Werthe irgend eines Punctes $(y'\ x')$ der bezüglichen geraden Linie substituiren, und dann b und a als veränderlich, als y und x, betrachten, während wir durch alle griechische Buchstaben ein für alle Mal bestimmte Coefficienten bezeichnen, so ergibt sich aus der letzten Gleichung folgende:

$$[\eta y+\vartheta x+\xi]y'+[\varkappa y+\lambda x+\mu]x'+[\nu y+\varrho x+\sigma] = 0, \qquad (3)$$

oder, wenn wir anders ordnen:

$$[\eta y'+\varkappa x'+\nu]y+[\vartheta y'+\lambda x'+\varrho]x+[\xi y'+\mu x'+\sigma] = 0. \qquad (4)$$

Nach dem letzten Satze des vorigen Paragraphen stellen, wie auch der Punct (y', x') auf der geraden Linie (1) angenommen werden mag, die Gleichungen (3) und (4) eine solche gerade Linie dar, die immer durch den Punct (b, a) geht. Dieser Punct ist der Durchschnittspunct der durch folgende zwei Gleichungen dargestellten geraden Linien:

$$\begin{aligned} \eta y+\vartheta x+\xi &= \Theta(\nu y+\varrho x+\sigma), \\ \varkappa y+\lambda x+\mu &= \Xi(\nu y+\varrho x+\sigma), \end{aligned} \qquad (5)$$

indem wir, der Kürze halber, $\frac{A}{C} = \Theta$ und $\frac{B}{C} = \Xi$ setzen. Wir nennen den Punct (b, a) den Pol der geraden Linie (1), in Beziehung auf die Gleichung (2), und die gerade Linie (4) die Polare des Punctes (y', x'), in Beziehung auf die Gleichung (2). Diese Gleichung können wir füglich *æquatio directrix* nennen; die Bestimmung des Poles einer gegebenen geraden Linie und der Polaren eines gegebenen Punctes richtet sich nach den Werthen der neun Coefficienten η, ϑ, ξ, $\varkappa$, λ, μ, ν, ϱ und σ, die in dieser Gleichung vorkommen.

Wir können hiernach dem in dem Vorstehenden bewiesenen Satze folgende Aussage geben:

Die Polaren aller Puncte einer gegebenen geraden Linie gehen durch den Pol derselben.

Umgekehrt folgt ferner, indem wir die Gleichung (4) als *æquatio directrix* nehmen, dass der Pol jeder geraden Linie, welche durch den Punct (b, a) geht, auf der geraden Linie (1) liegt. Einer dieser Pole ist der Punct (y', x'). Also:

Die Pole aller geraden Linien, welche durch einen gegebenen Punct gehen, liegen auf der Polaren dieses Punctes.

698. Um den Pol einer gegebenen geraden Linie (1), in Beziehung auf die Gleichung (2), zu construiren, müssen wir die neun, ein für alle Mal gegebenen, Coefficienten dieser Gleichung, oder vielmehr bloss die acht Quotienten eines beliebigen derselben in alle Fig. 39.

übrigen, kennen. Wenn wir, zum Behuf dieser Construction, die drei durch folgende Gleichungen:

$$\eta y+\vartheta x+\xi = 0,$$
$$\varkappa y+\lambda x+\mu = 0, \qquad (6)$$
$$\nu y+\varrho x+\sigma = 0,$$

dargestellten drei geraden Linien als gegeben betrachten, so sind jene Coefficienten alle neun bekannt, wenn überdiess noch drei derselben, etwa η, $\varkappa$ und ν, oder auch drei lineare Beziehungen zwischen denselben gegeben sind.

Die beiden Coordinaten-Axen seien OY und OX, die drei gegebenen geraden Linien (6) AC, BC, AB und MN sei die gerade Linie (1), deren Pol wir suchen. Wir wollen denselben als den Durchschnitt der beiden geraden Linien (5) construiren. Die erste dieser beiden geraden Linien geht, was die Form ihrer Gleichung zeigt, durch den Punct A, den Durchschnitt von AC und AB; ebenso geht die zweite derselben durch den Punct B, den Durchschnitt von BC und AB. Zur vollständigen Bestimmung dieser beiden geraden Linien brauchen wir also ausserdem nur noch einen zweiten Punct jeder derselben zu kennen. Um solche zwei Puncte zu erhalten, wollen wir beispielsweise, der obigen Bemerkung gemäss, voraussetzen, es sei

$$\vartheta = \varkappa, \qquad \xi = \nu, \qquad \mu = \varrho. \qquad (7)$$

Alsdann erhalten wir für die Ordinate des Durchschnittspunctes der ersten der beiden geraden Linien (5) mit der zweiten Coordinaten-Axe:

$$y = -\frac{\xi-\Theta\sigma}{\eta-\Theta\nu} = \frac{MQ}{MT}.OT = OY. \qquad (8)$$

Den zweiten dieser Ausdrücke für y erhalten wir, indem wir in dem ersten Nenner und Zähler durch $\xi = \nu$ dividiren und alsdann berücksichtigen, dass $\left(-\frac{\xi}{\eta}\right) = OT$, $\left(-\frac{\sigma}{\nu}\right) = OQ$ und $\left(-\frac{1}{\Theta}\right) = OM$. Hiernach erhalten wir ohne Mühe den Punct Y und somit die erste der beiden geraden Linien (5), nemlich AY. Auf ähnliche Weise ist der Punct X, in welchem die zweite dieser beiden geraden Linien BX in die erste Axe einschneidet, durch folgende Gleichung gegeben:

$$x = \frac{NR}{NS}.OS = OX. \qquad (9)$$

Endlich ist der gesuchte Pol der gegebenen geraden Linie MN der Punct P, der Durchschnitt von AY und BX.

Umgekehrt können wir leicht, wenn der Pol von MN, der Punct P gegeben ist, diese gerade Linie construiren. Die Puncte Y und X sind alsdann bekannt und wir erhalten ohne Mühe aus (8) und (9):

$$OM = \frac{YQ}{YT}.OT, \qquad ON = \frac{XR}{XS}.OS. \qquad (10)$$

Aus dem Vergleich der Gleichungen (8) und (9) mit den Gleichungen (10) ergibt sich die beiläufige Bemerkung, dass der Pol der geraden Linie XY in den Durchschnitt der beiden geraden Linien AM und BN fallen würde.

699. In dem Falle, dass die drei Gleichungen (7) bestehen, können wir auch den Pol einer gegebenen geraden Linie und die Polare eines gegebenen Punctes, in Beziehung auf die Gleichung (2), construiren, indem wir einen Kegelschnitt zu Hülfe nehmen, denjenigen nemlich, dessen Gleichung folgende ist:

$$\eta y^2+2\vartheta xy+\lambda x^2+2\xi y+2\mu x+\sigma = 0. \qquad (11)$$

Diejenige gerade Linie, deren Pol, in Beziehung auf diesen Kegelschnitt, der Punct (b, a) ist, hat folgende Gleichung:

$$[\eta b+\vartheta a+\xi]y+[\vartheta b+\lambda a+\mu]x+[\xi b+\mu a+\sigma] = 0,$$

und diese Gleichung ist, unter den gemachten Voraussetzungen, mit der Gleichung (2) identisch. Es ist also der Pol einer gegebenen geraden Linie, in Beziehung auf diese Gleichung, identisch dasselbe mit dem Pole derselben geraden Linie, in Beziehung auf den Kegelschnitt (11), der *conica directrix*. Dasselbe gilt von der Polaren eines gegebenen Punctes.

700. Durch die Voraussetzung, dass die Gleichungen (7) Statt finden, werden die beiden Gleichungen (2) und (4) übereinstimmend, wenn wir y' und x' mit a und b vertauschen, es ist (y', x') der Pol der durch (4) dargestellten geraden Linie, auch in Beziehung auf die Gleichung (2). Diese Gleichung ist in diesem Falle symmetrisch, in Beziehung auf die beiden veränderlichen Grössen y und x und die beiden Constanten b und a. Die beiden Sätze der 697. Nummer treten alsdann in einen innigern Zusammenhang unter einander.

Die Polaren aller Puncte einer gegebenen geraden Linie gehen alle durch ein und denselben festen Punct, durch den Pol derselben. Die gegebene gerade Linie ist die Polare dieses festen Punctes, es ist dieselbe der geometrische Ort für die Pole aller geraden Linien, welche durch diesen Punct gehen.

In dem Folgenden wollen wir, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt werden wird, durchgehends voraussetzen, dass die Gleichung (2), die *æquatio directrix*, in Beziehung auf y, x und b, a, symmetrisch sei.

701. Die beiden möglichst einfachen, in Beziehung auf y, x und b, a, symmetrischen Gleichungen sind folgende:

$$\begin{aligned} y \pm ax + b &= 0, \\ by + ax \pm r^2 &= 0. \end{aligned} \qquad (12)$$

Jede derselben können wir an die Stelle der Gleichung (2) setzen. Was die erste derselben betrifft, so können wir leicht den Pol der durch dieselbe dargestellten geraden Linie, den Punct (b, a), construiren, müssen aber, weil b und a nicht homogen sind, zum Behuf dieser Construction, eine Linien-Länge als Einheit annehmen. Statt dessen können wir sogleich an die Stelle der ersten der beiden vorstehenden Gleichungen folgende setzen:

$$p(y+b) \pm ax = 0. \qquad (13)$$

Dieser Gleichung entspricht eine Parabel, deren Gleichung folgende ist:

$$x^2 \pm 2py = 0;$$

denn in Beziehung auf diese Parabel ist (b, a) der Pol der durch (13) dargestellten geraden Linie.

Die Construction des Poles (b, a), wenn wir die zweite der beiden Gleichungen bei (12) zu Grunde legen, ergibt sich ebenfalls ohne alle Mühe. Es entspricht dieser Gleichung, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, ein Kreis, dessen Gleichung folgende ist:

$$y^2+x^2 = \mp r^2,$$

und der mithin, je nachdem wir das obere oder untere Zeichen nehmen, imaginär oder reell ist. Wir sehen zugleich leicht ein, dass wir auch, vermittelst des reellen Kreises, den Pol, in Beziehung auf den imaginären Kreis, construiren können. Wir

brauchen zu diesem Ende bloss den Pol, in Beziehung auf den reellen Kreis, zu construiren und dann die Coordinaten desselben mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen. Wenn wir statt der in Rede stehenden zweiten Gleichung bei (12) folgende allgemeinere nehmen:

$$\pm \eta b y \pm \lambda a x \pm \sigma = 0,$$

so ist die entsprechende Curve ein reeller oder imaginärer Kegelschnitt, dessen Mittelpunct in den Anfangspunct der Coordinaten fällt. Die Construction des Poles (b, a) nach der 698. Nummer ist hier zwar nicht anwendbar; wenn wir indess die drei Coefficienten η, λ und σ in der letzten Gleichung kennen, so können wir unmittelbar die beiden übrigen Constanten, b und a, construiren, wenn die bezügliche jedesmalige gerade Linie gegeben ist.

702. Nach diesen Vorbereitungen gehen wir zur Entwicklung des Principes der Reciprocität über.

Die Polare des Durchschnittspunctes zweier gegebener gerader Linien geht durch die Pole dieser beiden geraden Linien. Der Pol einer geraden Linie, die zwei gegebene Puncte verbindet, ist der Durchschnittspunct der Polaren dieser beiden Puncte. Wenn also drei oder mehrere gerade Linien durch denselben Punct gehen, so liegen ihre Pole in gerader Linie; wenn, umgekehrt, drei oder mehrere Puncte in gerader Linie liegen, so gehen ihre Polaren durch denselben Punct. Aus diesen Bemerkungen, die unmittelbare Folgerungen aus den Sätzen der 700. Nummer sind, ist ersichtlich, wie jedem Satze, der sich lediglich auf den Durchschnitt von geraden Linien und auf Puncte, die in gerader Linie liegen, ohne irgend eine Art von absoluter Grössen-Bestimmung, bezieht, ein zweiter Satz entspricht, den man sogleich erhält, wenn man sich die Pole und Polaren der Winkelpuncte und Seiten derjenigen Figur, auf welche sich der gegebene Satz bezieht, construirt denkt. Das Princip dieser Uebertragung tritt als solches noch nicht in folgendem Satze hervor, den H. BRIANCHON in GERGONNE'S Annalen, früher als dieses Princip seine Entwicklung erhalten hatte, mittheilte:

Wenn ein beliebiger Kegelschnitt und in der Ebene desselben irgend ein Sechseck, dessen drei gegenüberliegende Seiten-Paare sich in solchen drei Puncten schneiden, die in gerader Linie liegen, gegeben ist, so gehen die drei Diagonalen desjenigen Sechsecks, dessen Winkelpuncte die Pole der Seiten des gegebenen Sechsecks, in Beziehung auf den gegebenen Kegelschnitt, sind, durch ein und denselben Punct.

Der Uebergang von diesem Satze zu jenem Principe ist aber nur ein Schritt. Ein einziges Beispiel wird die Anwendung desselben anschaulich machen. Wir wollen zu diesem Ende von dem Satze der 427. Nummer ausgehen:

Wenn zwei gerade Linien und auf jeder derselben drei Puncte gegeben sind, so können wir diese Puncte, paarweise genommen, durch neun neue gerade Linien verbinden. Diese neun geraden Linien schneiden sich in achtzehn neuen Puncten. Von diesen achtzehn Puncten liegen sechsmal drei in gerader Linie. Von diesen sechs geraden Linien gehen drei und drei durch denselben Punct.

Aus diesem Satze ergibt sich sogleich der nachstehende, so wie, umgekehrt, dieser aus jenem:

Wenn zwei Puncte und drei durch jeden derselben gehende gerade Linien gegeben sind, so schneiden sich diese geraden Linien noch in neun neuen Puncten. Durch diese neun Puncte, paarweise genommen, lassen sich achtzehn neue gerade Linien legen.

Von diesen achtzehn geraden Linien gehen sechsmal drei durch denselben Punct (74). *Von diesen sechs Puncten liegen drei und drei in gerader Linie.*

703. Zuweilen liefert die Anwendung des Principes der Reciprocität auf einen gegebenen Satz keinen neuen Satz. Es kann der Satz, den wir nach demselben aus dem gegebenen herleiten, die blosse Umkehrung dieses Satzes sein. Ein Beispiel hiervon geben die folgenden beiden durch jenes Princip mit einander verbundenen Sätze:

Wenn die drei Seiten eines Dreiecks den drei Seiten eines andern in solchen drei Puncten begegnen, die in gerader Linie liegen, so schneiden sich diejenigen geraden Linien, welche die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkelpuncte verbinden, in demselben Puncte.

Wenn diejenigen drei geraden Linien, welche die Winkelpuncte zweier gegebener Dreiecke, paarweise genommen, verbinden, in demselben Puncte sich schneiden, so schneiden sich die diesen Winkelpuncten gegenüberliegenden Seiten in solchen drei Puncten, die in gerader Linie liegen.

704. Wenn irgend ein Polygon gegeben ist, so können wir ein zweites Polygon construiren, dessen Winkelpuncte die Pole der Seiten des gegebenen sind; zugleich sind alsdann die Seiten des zweiten Polygons die Polaren der Winkelpuncte des gegebenen. Diese Beziehungen finden Statt, unabhängig von der Grösse und der Anzahl der Seiten der Polygone, sie gelten also auch dann noch, wenn an die Stelle derselben Curven treten. Es liegen die Pole der Tangenten einer gegebenen Curve auf dem Umfange einer zweiten Curve, welche wir die Polar-Curve der gegebenen nennen wollen; die Polaren der Puncte von jener sind Tangenten von dieser. Die Beziehung solcher zwei Curven zu einander ist eine durchaus gegenseitige, wenn die Hülfs-Gleichung (*æquatio directrix*), rücksichtlich auf y, x und b, a, symmetrisch ist. Im entgegengesetzten Falle können wir die erste Curve auch noch als die Polar-Curve der zweiten betrachten; müssen alsdann aber die Form der Hülfs-Gleichung ändern.

Wenn die gegebene Curve von irgend einer m. Ordnung ist, so wird sie, im Allgemeinen, von einer gegebenen geraden Linie in m Puncten geschnitten; die m Polaren dieser Durchschnittspuncte, Tangenten der Polar-Curve, vereinigen sich alle in demselben Puncte, dem Pole jener geraden Linie. Keine neue Tangente der Polar-Curve kann durch diesen Punct gehen, denn sonst müsste die gegebene gerade Linie die gegebene Curve auch noch in einem (m+1)-Puncte, dem Pole der neuen Tangente, schneiden. Da wir diese gerade Linie immer so wählen können, dass ein beliebiger Punct ihr Pol ist, so folgt, dass an die Polar-Curve irgend einer gegebenen Curve m. Ordnung, von einem gegebenen Puncte aus, sich, im Allgemeinen, m Tangenten legen lassen. Eine solche Curve nennt H. GERGONNE eine Curve m. Classe, eine Benennung, die ich in der ersten Abtheilung des vorliegenden Bandes aufgenommen habe, wobei ich indess die Definition einer solchen Curve an den Grad ihrer Gleichung zwischen den neuen Linien-Coordinaten knüpfe.

Die Polar-Curve einer gegebenen Curve irgend einer m. Ordnung ist von der m. Classe und, umgekehrt, die Polar-Curve einer gegebenen Curve irgend einer m. Classe ist von der m. Ordnung.

705. Es sei durch die Gleichung:

$$F(y, x) = 0, \qquad (1)$$

irgend eine, algebraische oder transcendente, Curve gegeben: wir wollen die Polar-

Curve derselben bestimmen, indem wir die allgemeinste, nicht symmetrische, Hülfs-Gleichung des ersten Grades:

$$[\eta b+\vartheta a+\xi]y+[\varkappa b+\lambda a+\mu]x+[\nu b+\varrho a+\sigma] = 0, \qquad (2)$$

zu Grunde legen. Und zwar wollen wir **erstens** die Polar-Curve durch ihre Gleichung zwischen **Linien**-Coordinaten ausdrücken.

Wenn (y', x') irgend einen Punct der gegebenen Curve bezeichnet, so stellt die letzte Gleichung, wenn wir in derselben y' und x' statt y und x schreiben, und dann b und a als veränderlich, als y und x, betrachten, die Polare jenes Punctes (y', x'), eine Tangente der Polar-Curve, dar. Dieser Gleichung können wir alsdann folgende Form geben:

$$[\eta y'+\varkappa x'+\nu]y+[\vartheta y'+\lambda x'+\varrho]x+[\xi y'+\mu x'+\sigma] = 0,$$

und indem wir die bezügliche gerade Linie durch (w, v, u) bezeichnen, ergibt sich (402):

$$\frac{\eta y'+\varkappa x'+\nu}{\xi y'+\mu x'+\sigma} = \frac{u}{w}, \qquad \frac{\vartheta y'+\lambda x'+\varrho}{\xi y'+\mu x'+\sigma} = \frac{v}{w}.$$

Hieraus erhält man:

$$y' = \frac{(\varrho\varkappa-\nu\lambda)w+(\nu\mu-\sigma\varkappa)v+(\sigma\lambda-\varrho\mu)u}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)w+(\varkappa\xi-\mu\eta)v+(\mu\vartheta-\lambda\xi)u},$$

$$x' = -\frac{(\varrho\eta-\nu\vartheta)w+(\nu\xi-\sigma\eta)v+(\sigma\vartheta-\varrho\xi)u}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)w+(\varkappa\xi-\mu\eta)v+(\mu\vartheta-\lambda\xi)u},$$

und wenn wir diese Werthe von y' und x' in die Gleichung der gegebenen Curve für y und x substituiren, so kommt:

$$F\left\{\frac{(\varrho\varkappa-\nu\lambda)w+(\nu\mu-\sigma\varkappa)v+(\sigma\lambda-\varrho\mu)u}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)w+(\varkappa\xi-\mu\eta)v+(\mu\vartheta-\lambda\xi)u},\ -\frac{(\varrho\eta-\nu\vartheta)w+(\nu\xi-\sigma\eta)v+(\sigma\vartheta-\varrho\xi)u}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)w+(\varkappa\xi-\mu\eta)v+(\mu\vartheta-\lambda\xi)u}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung stellt, wenn wir w, v und u als veränderlich betrachten, die zu bestimmende Polar-Curve dar.

706. Wir wollen **zweitens** dieselbe Polar-Curve durch **Punct**-Coordinaten bestimmen. Wenn wir b und a als Coordinaten und veränderlich betrachten und der Punct (y, x) die gegebene Curve beschreibt, so stellt die Gleichung (2) nach einander alle möglichen Tangenten der Polar-Curve dar. Um den Berührungspunct auf einer solchen Tangente zu erhalten, brauchen wir bloss den Durchschnitt dieser Tangente mit einer zweiten, unmittelbar auf dieselbe folgenden, zu suchen, und zu diesem Ende die Coordinaten-Werthe b und a aus der Gleichung (2) und ihrer Differential-Gleichung, in Beziehung auf y und x:

$$(\eta b+\vartheta a+\xi)dy+(\varkappa b+\lambda a+\mu)dx = 0, \qquad (3)$$

zu ziehen, wobei wir den Werth von $\frac{dy}{dx}$ aus der Gleichung (1) herleiten müssen. Denn die Gleichung jener zweiten Tangente ergibt sich aus (2), wenn wir in dieser Gleichung $(y+dy)$ und $(x+dx)$ statt y und x schreiben, und diese Gleichung können wir, zum Behuf der Bestimmung von b und a, vermittelst der Gleichung (2), reduciren und erhalten alsdann die vorstehende Gleichung (3). Diese Gleichung stellt mithin, wenn wir b und a als veränderlich betrachten, eine solche gerade Linie dar, die durch den Berührungspunct auf der in Rede stehenden ersten Tangente (2) geht. Der durch die beiden Gleichungen (2) und (3) bestimmte Punct (b, a) ist ein Punct der Polar-Curve; wenn wir diese beiden Gleichungen auf irgend eine Weise zu einer neuen Gleichung mit einander verbinden, so stellt diese Gleichung einen neuen Ort, der durch den Punct (b, a) geht, dar, und dieser Ort ist jene Polar-Curve, wenn die resultirende Gleichung diejenige ist, welche man erhält, wenn man aus den beiden Gleichungen (2) und (3), vermittelst der

Gleichung (1), y und x eliminiren. Es sei die auf diese Weise sich ergebende Gleichung folgende:

$$\varphi(b, a) = 0. \qquad (4)$$

Durch die drei Gleichungen (1), (2) und (3) sind die vier Grössen y, x, b und a vollkommen bestimmt, wenn eine derselben gegeben ist: wir können jene als Functionen von dieser ansehen. Differentiiren wir demnach die Gleichung (2) vollständig in Beziehung auf y, x, b und a, so erhalten wir, wenn wir vermittelst der Gleichung (3) reduciren, folgende Gleichung:

$$(\eta y+\varkappa x+\nu)db+(\vartheta y+\lambda x+\varrho)da = 0, \qquad (5)$$

wobei wir den Werth des Differential-Quotienten $\frac{db}{da}$ aus der Gleichung (4) nehmen können. Wir können aber auch die letzte Gleichung, als durch blosse Differentiation der Gleichung (2), in Beziehung auf b und a, wobei y und x als constant zu betrachten sind, entstanden, ansehen; so dass, wenn wir y und x mit b und a vertauschen, die Gleichung (5) in dieselbe Beziehung zur Gleichung (2) tritt, in der früher die Gleichung (3) stand. Wenn wir zwischen den drei Gleichungen (4), (2) und (5) die Grössen b und a eliminiren, so kommen wir nothwendig zur Gleichung (1) zurück.

Wir finden hiernach durch eine einfache analytische Betrachtung die frühere Bemerkung bestätigt, dass auch die gegebene Curve (1) gegenseitig die Polar-Curve ihrer eigenen Polar-Curve ist, nur dass hierbei die Hülfs-Gleichung (*aequatio directrix*) jedesmal ihre Form ändert, wenn dieselbe, in Beziehung auf y, x und b, a, nicht symmetrisch ist, denn bei der Rückkehr der zweiten Curve zur ersten treten b und a an die Stelle von y und x.

707. Wir können die in der vorigen Nummer angezeigten Eliminationen nur dann ausführen, wenn die Gleichung der Curve (1) wirklich gegeben und nicht durch ein blosses Functions-Zeichen dargestellt ist. Es ist diess aber nicht nothwendig, wenn wir statt der Gleichung (4) bloss die Differential-Gleichung derselben verlangen, und in diesem Falle braucht die gegebene Curve ebenfalls nur durch ihre Differential-Gleichung gegeben zu sein. Diese Gleichung sei folgende:

$$f\left(\frac{dy}{dx},\ y,\ x\right) = 0. \qquad (6)$$

Wir erhalten zuvörderst aus der Gleichung (3):

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varkappa b+\lambda a+\mu}{\eta b+\vartheta a+\xi},$$

und dann ferner aus der Zusammenstellung der beiden Gleichungen (2) und (5):

$$y = \frac{(\varrho\varkappa-\nu\lambda)(adb-bda)+(\sigma\varkappa-\nu\mu)db+(\sigma\lambda-\varrho\mu)da}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)(adb-bda)+(\mu\eta-\varkappa\xi)db+(\mu\vartheta-\lambda\xi)da},$$

$$x = -\frac{(\varrho\eta-\nu\vartheta)(adb-bda)+(\sigma\eta-\nu\xi)db+(\sigma\vartheta-\varrho\xi)da}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)(adb-bda)+(\mu\eta-\varkappa\xi)db+(\mu\vartheta-\lambda\xi)da}.$$

Wenn wir die vorstehenden Werthe von $\frac{dy}{dx}$, y und x in die gegebene Differential-Gleichung (6) substituiren, so gelangen wir unmittelbar zur gesuchten Differential-Gleichung der Polar-Curve. *)

*) An die letzten Nummern des Textes knüpfen sich rein analytische Betrachtungen an. Indem ich mich hier auf einige blosse Andeutungen beschränke, ist meine Absicht, denselben Gegenstand an einem andern Orte wieder aufzunehmen.

708. Wenn eine gegebene Curve einen vielfachen Punct, das heisst, einen solchen Punct hat, in welchem mehrere Zweige derselben sich schneiden, so entspricht diesem Puncte in der Polar-Curve eine gerade Linie, welche eine gleiche Anzahl von Zweigen dieser Curve berührt. Wenn jene Zweige, die durch den-

---

Wenn irgend eine, auf eine beliebige Curve sich beziehende, Differential-Gleichung gegeben ist, so können wir die Differential-Gleichung der Polar-Curve, indem wir eine beliebige lineare *aequatio directrix* zu Grunde legen, unmittelbar hinschreiben (707). Wenn wir alsdann das Integral einer dieser beiden Differential-Gleichungen kennen, so erhalten wir das Integral der andern durch blosse Elimination (708). Wenn zum Beispiel die Gleichung (1) das bekannte Integral der Gleichung (6) ist, so erhalten wir die Gleichung (4), die durch Elimination von $\frac{dy}{dx}$, y und x zwischen den Gleichungen (1), (2) und (3) sich ergibt, als Integral der am Ende der 707. Nummer bezeichneten, der Raum-Ersparniss wegen, nicht hingeschriebenen Differential-Gleichung. Ich will hierbei auf einen Fall besonders aufmerksam machen. Wenn die letztgenannte Gleichung auf folgende sich reducirt:

$$f\left\{\frac{(\rho\varkappa-\nu\lambda)(adb-bda)+(\sigma\varkappa-\nu\mu)db+(\sigma\lambda-\rho\mu)da}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)(adb-bda)+(\mu\eta-\varkappa\xi)db+(\mu\vartheta-\lambda\xi)ba},\quad -\frac{(\rho\eta-\nu\vartheta)(adb-bda)+(\sigma\eta-\nu\xi)db+(\sigma\vartheta-\rho\xi)da}{(\lambda\eta-\varkappa\vartheta)(adb-bda)+(\mu\eta-\varkappa\xi)db+(\mu\vartheta-\lambda\xi)da}\right\} = o,$$

in der alsdann die neun Coefficienten $(\rho\varkappa-\nu\lambda)$, u. s. w. als beliebige von einander unabhängige Coefficienten anzusehen sind, so erhält man für die Polar-Curve derjenigen Curve, auf welche diese Gleichung sich bezieht:

$$f(y, x) = o:$$

eine Gleichung zwischen endlichen Grössen. Wenn man zwischen dieser Gleichung und den Gleichungen (2) und (3) $\frac{dy}{dx}$, y und x eliminirt, so erhält man eine Gleichung, welche die singuläre Auflösung der vorgelegten Differential-Gleichung ist. —

Die Verallgemeinerung der vorstehenden Bemerkungen liegt nahe. Wenn wiederum:

$$F(y, x) = o \qquad \text{(I)}$$

eine gegebene Gleichung ist, aber an die Stelle der Gleichung (2) irgend eine beliebige Gleichung zwischen y, x, b und a, als *aequatio directrix*, tritt, die wir durch

$$\psi(y, x, b, a) = o, \qquad \text{(II)}$$

und deren Differential-Gleichung, in Beziehung auf y und x, wir durch

$$\Psi\left(\frac{dy}{dx}, y, x, b, a\right) = o \qquad \text{(III)}$$

darstellen wollen, so können wir zwischen den vorstehenden drei Gleichungen y und x eliminiren, nachdem wir zuvor in die letzte derselben für $\frac{dy}{dx}$ denjenigen Ausdruck substituirt haben, welchen die Differentiation der Gleichung (I) gibt. Das Resultat der Elimination sei:

$$\varphi(b, a) = o. \qquad \text{(IV)}$$

Wenn wir ferner die Gleichung (II), in Beziehung auf b und a, differentiren, und die resultirende Gleichung durch

$$\Phi\left(\frac{db}{da}, b, a, y, x\right) = o \qquad \text{(V)}$$

darstellen, so erhalten wir aus (II) und (V) y und x als Function von $\frac{db}{da}$, b und a:

$$y = f\left(\frac{db}{da}, b, a\right), \qquad x = \mathfrak{F}\left(\frac{db}{da}, b, a\right), \qquad \text{(VI)}$$

und hiernach, wenn wir in (I) substituiren:

$$F\left\{f\left(\frac{db}{da}, b, a\right), \quad \mathfrak{F}\left(\frac{db}{da}, b, a\right)\right\} = o. \qquad \text{(VII)}$$

Die Gleichung (IV) ist die singuläre Auflösung der Gleichung (VII). Der erste Theil dieser Gleichung ist Function zweier andern Functionen, die man erhält, wenn man aus irgend einer Gleichung (II) zwischen zweien veränderlichen Grössen b und a und ihrer Differential-Gleichung (V) die Ausdrücke für zwei, in diesen Gleichungen vorkommenden, Constanten zieht. Die Gleichung (II) ist das gewöhnliche Integral der Gleichung (VII). y und x sind zwei Constante, welche sich, nach der Gleichung (I), auf eine einzige reduciren.

selben Punct gehen, theilweise eine gemeinschaftliche Tangente haben, so fallen auf dieser, mehrere Zweige berührenden, geraden Linie theilweise die Berührungspuncte zusammen. Die in einem vielfachen Puncte sich schneidenden Zweige können paarweise imaginär werden, ihr Durchschnitt bleibt alsdann reell und man erhält, statt der beiden Zweige, einen blossen Punct. Dieser Punct stellt sich als conjugirter isolirter Punct dar, wenn jener vielfache Punct ein blosser Doppelpunct ist; die Spur desselben verliert sich, wenn noch ein dritter reeller Zweig der Curve durch denselben Punct geht. Auf ganz analoge Weise erhält man in der Polar-Figur, wenn mehrere Zweige, welche von derselben geraden Linie berührt werden, paarweise imaginär sind, statt jedes Paares solcher imaginären Zweige, bloss jene gerade Linie, ihre gemeinschaftliche Tangente. Diese gemeinschaftliche Tangente erscheint als isolirte, der Polar-Curve conjugirte gerade Linie, wenn kein anderer Zweig dieselbe ausserdem noch berührt; wenn hingegen dieser Fall eintritt, so gehört zu der Polar-Curve eine ihrer Tangenten.

Aus den vorstehenden Bemerkungen erhellet, wie es ganz natürlich ist, in die allgemeine Theorie der Curven neben dem Begriff des singulären Punctes auch den Begriff der singulären geraden Linie einzuführen. In denjenigen singulären Puncten, in welchen sich solche Curven-Zweige vereinigen, welche zum Theil in diesem Puncte eine gemeinschaftliche Tangente haben, ist diese Tangente eine singuläre gerade Linie. In der Gleichung einer Curve zwischen Punct-Coordinaten ist jede Spur der singulären geraden Linien der Curve verschwunden, so wie in der Gleichung derselben Curve zwischen Linien-Coordinaten die Spur der singulären Puncte.

709. Wenn wir die allgemeine, nicht symmetrische, Hülfs-Gleichung:

$$(\eta b+\vartheta a+\xi)y+(\varkappa b+\lambda a+\mu)x+(\nu b+\varrho a+\sigma),$$

zu Grunde legen, so erhalten wir (705) für die Polare desjenigen Punctes, welche der Durchschnitt der durch folgende beide Gleichungen:

$$\eta y+\varkappa x+\nu = 0, \qquad \vartheta y+\lambda x+\varrho = 0, \qquad (1)$$

dargestellten geraden Linie ist, eine solche gerade Linie, die unendlich weit liegt, und deren Richtung eine unbestimmte ist. Wenn dieser Punct auf einer gegebenen Curve liegt, so ist der Pol der Tangente der Curve in diesem Puncte der Berührungspunct auf jener unendlich weit entfernt liegenden geraden Linie, die eine Tangente der Polar-

---

Da die Gleichung (IV) das Resultat der Elimination der beiden als constant zu betrachtenden und durch die Gleichung (I) mit einander verbundenen Grössen, y und x, zwischen den beiden Gleichungen (II) und (III) ist, so folgt sogleich, nach der bekannten Theorie, dass die Gleichung (IV) (die singuläre Auflösung) eine solche Curve darstellt, die alle diejenigen Curven umhüllt, welche durch die Gleichung (II) (die gewöhnliche Integral-Gleichung), wenn wir nach einander den Constanten y und x alle möglichen Werthe beilegen, dargestellt werden.

Wenn wir aus den beiden Gleichungen (II) und (III) die Werthe von b und a ziehen und dann in die Gleichung (IV) substituiren, so erhalten wir eine Differential-Gleichung zwischen y und x; und diese Gleichung hat die Gleichung (II), in welcher alsdann b und a zwei durch die Gleichung (IV) mit einander verbundene Constante bedeuten, zum gewöhnlichen Integral und die Gleichung (I) zur singulären Auflösung.

Es hat bekanntlich zuerst LAGRANGE die vollständigste Theorie der besondern Auflösungen gegeben und das Vollständigste hierüber findet sich in seinen *Leçons sur le Calcul des Fonctions.* Die in dem Vorstehenden angedeutete allgemeine Theorie der singulären Auflösungen steht mit dem Princip der Reciprocität in der genauesten Beziehung; diess hervorzuheben ist der Zweck dieser Anmerkung.

Curve ist. Es ist sogleich ersichtlicht, dass dieser Berührungspunct auf der durch folgende Gleichung (706 (2)):

$$(\eta y+\vartheta x+\xi)v'-(\varkappa y+\lambda x+\mu) = 0, \qquad (2)$$

in der v' sich auf die Richtung der Tangente der gegebenen Curve in dem gegebenen Puncte bezieht, dargestellten geraden Linien unendlich weit liegt. Es entspricht also der gegebenen Curve eine Polar-Curve, die zwei parabolische Zweige hat, deren Durchmesser der geraden Linie (2) parallel sind. Wenn die gegebene Curve einen vielfachen Punct hat, der mit dem eben bezeichneten Punct zusammenfällt, so hat die Polar-Curve mehrere Paare parabolischer Zweige, deren Durchmesser leicht zu bestimmende Richtungen haben.

Zu denselben Folgerungen gelangen wir auch dann, wenn wir, indem wir rein geometrisch zu Werke gehen, insbesondere irgend einen beliegen Kegelschnitt zur Hülfs-Curve nehmen, und alsdann die gegebene Curve durch den Mittelpunct dieses Kegelschnittes geht. *)

710. Eine gerade Linie, die durch den Durchschnitt der beiden geraden Linien (1) geht und deren Richtung durch v' bestimmt ist, hat nach der vorigen Nummer zum Pole den auf der geraden Linie (2) unendlich weit entfernt liegenden Punct. Wenn jene gerade Linie eine singuläre gerade Linie einer gegebenen Curve ist, so ist dieser unendlich weit entfernt liegende Punct ein singulärer Punct der Polar-Curve. Wir sehen hieraus, dass es auch singuläre Puncte in unendlicher Entfernung gibt: eine für das Gesetz der Continuität in der Theorie der Curven wichtige Bemerkung, die zuerst H. PONCELET am eben angeführten Orte gemacht hat. Wir werden im folgenden Paragraphen auf diese singulären Puncte noch zurückkommen.

711. Wenn endlich mehrere Curven sich in dem Durchschnittspuncte der beiden geraden Linien (1) mpunctig osculiren, so haben die Polar-Curven in unendlicher Entfernung eine mpunctige parabolische Osculation. Wenn mehrere Curven auf irgend einer durch den Durchschnitt der beiden geraden Linien (1) gehenden dritten geraden Linie sich mpunctig osculiren, so haben die Polar-Curven die gerade Linie (2) zur gemeinschaftlichen Asymptote und auf dieser Asymptote in unendlicher Entfernung einen mpunctigen Contact. Wir sind schon im 7. Paragraphen der ersten Abtheilung dieses Bandes unmittelbar auf die Osculation parabolischer und hyperbolischer Zweige geführt worden. —

712. *Die Polaren von irgend vier gegebenen harmonischen Theilungspuncten bilden vier Harmonicalen und folglich auch, umgekehrt, die Pole von irgend vier gegebenen Harmonicalen vier harmonische Theilungspuncte.*

Wir können diesen Satz auf folgende Weise für den allgemeinsten Fall, dass die nicht symmetrische Gleichung (2) der 705. Nummer zu Grunde gelegt wird, beweisen. Nach dieser Nummer erhalten wir

$$\frac{\xi y'+\mu x'+\sigma}{\eta y'+\varkappa x'+\nu} = w', \quad \frac{\xi y''+\mu x''+\sigma}{\eta y''+\varkappa x''+\nu} = w'', \quad \frac{\xi y'''+\mu x'''+\sigma}{\eta y'''+\varkappa x'''+\nu} = w''', \quad \frac{\xi y''''+\mu x''''+\sigma}{\eta y''''+\varkappa x''''+\nu} = w'''',$$

wenn (y', x'), (y'', x''), (y''', x''') und (y'''', x'''') die vier gegebenen harmonischen Theilungspuncte und w', w'', w''' und w'''' Ordinaten ihrer Polaren bedeuten. (Wir setzen,

*) PONCELET, *Mémoire sur la théorie générale des polaires reciproques* 71 in CRELLE's Journal, IV. 1829.

der Kürze halber, die Ordinate u gleich Eins.) Die vorstehenden vier Gleichungen stellen, wenn wir die verschieden accentuirten y und x als veränderlich betrachten, vier gerade Linien dar, die durch die vier gegebenen Puncte gehen. Da diese geraden Linien überdiess in ein und demselben Puncte, dem Durchschnitte der beiden geraden Linien:

$$\xi y+\mu x+\sigma = Y = 0, \qquad \eta y+\varkappa x+\nu = X = 0,$$

sich schneiden, so bilden sie ein System von vier Harmonicalen. Hiernach erhalten wir, wenn wir zuvor ihren Gleichungen folgende Form geben:

$$X-w'Y = 0, \quad X-w''Y = 0, \quad X-w'''Y = 0, \quad X-w''''Y = 0,$$

und durch ω und v zwei unbestimmte Coefficienten bezeichnen:

$$\omega(X-w'Y)+v(X-w'''Y) = X-w''Y, \quad \omega(X-w'Y)-v(X-w'''Y) = X-w''''Y, \text{*)}$$

und hieraus folgt:

$$\omega w'+vw''' = w'', \qquad \omega w'-vw''' = w''''.$$

Es sind also auch (410) diejenigen Puncte, in welchen die vier eben bezeichneten Polaren in die zweite Coordinaten-Axe einschneiden, vier harmonische Theilungspuncte, und mithin die Polaren selbst, da sie überdiess durch denselben Punct (697) gehen, vier Harmonicalen.

Als Beispiel von der Anwendung des Principes der Reciprocität, rücksichtlich des eben Bewiesenen, stelle ich folgende beide Sätze neben einander:

Eine beliebige Diagonale irgend einer gegebenen vierseitigen Figur wird in den beiden Winkelpuncten, die sie verbindet, und in ihren Durchschnitten mit den beiden übrigen Diagonalen harmonisch getheilt (I., 50).

Die beiden Diagonalen irgend eines gegebenen Vierecks bilden mit denjenigen beiden geraden Linien, welche den Durchschnittspunct derselben mit den Durchschnittspuncten der beiden Paare gegenüberliegender Seiten verbinden, vier Harmonicalen.

713. Aus der vorigen Nummer und den Entwicklungen der Note zur 623. Nummer ergibt sich folgender Satz:

Die Pole einer Involution von sechs geraden Linien bilden eine Involution von sechs Puncten und, umgekehrt, die Polaren einer Involution von sechs Puncten bilden eine Involution von sechs geraden Linien.

Hiernach folgt zum Beispiel jeder der beiden nachstehenden Sätze aus dem andern.

Solche sechs Tangenten, die man von irgend einem Puncte aus an irgend drei Kegelschnitte legen kann, welche dieselben vier (reellen oder imaginären) geraden Linien berühren, bilden eine Involution (623).

Die sechs Durchschnittspuncte einer beliebigen Transversalen mit solchen drei Kegelschnitten, welche durch dieselben vier (reellen oder imaginären) Puncte gehen, bilden eine Involution. **)

---

*) Wenn nemlich die beiden Gleichungen

$$Z = 0, \qquad Z' = 0$$

irgend zwei gegebene gerade Linien darstellen und μ einen beliebigen Coefficienten bedeutet, so stellen folgende Gleichungen:

$$Z+\mu Z' = 0, \qquad Z-\mu Z' = 0,$$

solche zwei neue gerade Linien dar, welche mit den beiden gegebenen ein System von vier Harmonicalen bilden. Diese Beziehungen sind denen der 410. Nummer ganz analog.

**) Ich habe in dem Frühern gelegentlich mehrfache Eigenschaften einer Involution von sechs Puncten so wie einer Involution von sechs geraden Linien entwickelt. Beiläufig füge ich auch noch die folgenden Sätze hinzu:

Wenn wir insbesondere in dem letzten Satze an die Stelle zweier der drei Kegelschnitte zwei Linien-Systeme setzen, so erhalten wir einen Satz, den zuerst DESARGUÈS gab *). Der allgemeine Satz gehört H. STURM **). —

714. Wir haben in allen bisherigen Entwicklungen auf die Werthe der ein für alle Mal gegebenen Constanten der Hülfs-Gleichung (*æquatio directrix*) keine weitere Rücksicht genommen. Wir können dieselben zum Theil gleich Null setzen und jene Gleichung, wie in den Beispielen der 701. Nummer, möglichst vereinfachen. An jede solche Gleichung können wir das Princip der Reciprocität, so weit wir dasselbe bisher entwickelt haben, anknüpfen. Es gewinnt dasselbe aber eine grosse Mannigfaltigkeit an neuen Anwendungen, wenn wir jenen neun Coefficienten der Hülfs-Gleichung bestimmte Werthe beilegen und gewisse zwischen denselben Statt findende Beziehungen annehmen, oder wenn wir, von der geometrischen Seite, irgend einen bestimmten Kegelschnitt zur Hülfs-Curve nehmen. Wir befinden uns hier auf einem ergiebigen Felde der Untersuchung; ein Blick auf die wenigen Andeutungen, welche die folgenden Nummern enthalten, wird uns hiervon überzeugen.

Wenn wir derjenigen Curve, deren Polare wir suchen, eine, in Beziehung auf die Coordinaten-Axe, beliebige Lage geben, so können wir, unbeschadet der Allgemeinheit, in den Untersuchungen über die Natur der Polar-Curve die Form der gegebenen Hülfs-Gleichung dadurch vereinfachen, dass wir die Lage und die Richtung der Coordinaten-Axen gehörig bestimmen. Wenn die gegebene Hülfs-Gleichung bei beliebiger Axen-An-

---

Die drei Seiten eines Dreiecks und irgend drei durch die Winkelpuncte desselben und ein und denselben Punct gehende gerade Linie, oder, was dasselbe heisst, die Seiten irgend eines Vierecks und die beiden Diagonalen desselben haben die Richtung der sechs geraden Linien einer Involution.

Und, umgekehrt:

Wenn man aus dreien geraden Linien der drei Linien-Paare einer Involution, indem man dieselben parallel mit sich selbst verrückt, ein Dreieck bildet, so gehen die drei übrigen geraden Linien der Involution durch ein und denselben Punct, wenn man sie, parallel mit sich selbst, so verschiebt, dass jede derselben durch denjenigen Winkelpunct jenes Dreiecks geht, welchen solche zwei gerade Linien bilden, mit welchem sie nicht zu demselbsn Linien-Paare der Involution gehört.

Der Beweis des vorstehenden Satzes bietet sich sogleich dar. Wir können die drei Seiten des Dreiecks durch folgende Gleichungen darstellen:

$$(x'-x'')(y-y')-(y'-y'')(x-x') = 0,$$
$$(x''-x''')(y-y'')-(y''-y''')(x-x'') = 0,$$
$$(x'''-x')(y-y''')-(y'''-y')(x-x''') = 0,$$

und erhalten alsdann (vergl. die Note zur 623. Nummer), indem wir die Coordinaten-Axen gehörig bestimmen, für die drei durch die drei Winkelpuncte des Dreiecks gehende gerade Linien folgende Gleichungen:

$$(x'-x'')(y-y''')+(y'-y'')(x-x''') = 0,$$
$$(x''-x''')(y-y')+(y''-y''')(x-x') = 0,$$
$$(x'''-x')(y-y'')+(y'''-y')(x-x'') = 0.$$

Die Summe der ersten Theile dieser drei Gleichungen reducirt sich auf Null und folglich gehen die drei bezüglichen geraden Linien durch ein und denselben Punct.

Nach den vorstehenden Sätzen können wir auf die bequemste Weise, wenn fünf gerade Linien einer Involution gegeben sind, die sechste gerade Linie der Involution bestimmen, so wie der sechste Punct einer Involution sich am leichtesten durch Hülfe des vorletzten Satzes in der Note zur 441. Nummer construiren lässt.

*) PONCELET, *Prop. proj.* 178.

**) GERGONNE, *Ann. T. XVII.* p. 180.

nahme wiederum folgende ist:

$$(\eta b+\vartheta a+\xi)y+(\varkappa b+\lambda a+\mu)x+(\nu b+\varrho a+\sigma) = 0, \qquad (1)$$

so bietet sich eine natürliche Vereinfachung dieser Gleichung dar, indem wir irgend zwei der drei durch die nachstehenden Gleichungen dargestellten geraden Linien:

$$\eta y+\vartheta x+\xi = 0, \qquad \varkappa y+\lambda x+\mu = 0, \qquad \nu y+\varrho x+\sigma = 0, \qquad (2)$$

zu den neuen Coordinaten-Axen wählen (698). Nehmen wir insbesondere die erste dieser drei geraden Linien zur ersten und die zweite derselben zur zweiten Coordinaten-Axe, so erhalten wir statt der Gleichung (1) eine Gleichung von folgender Form:

$$\eta by+\lambda ax+(\nu b+\varrho a+\sigma) = 0, \qquad (3)$$

und in dem besondern Fall, dass die Gleichung (1) symmetrisch ist und demnach die Bedingungs-Gleichungen (7) der 698. Nummer bestehen, eine Gleichung von folgender Form:

$$\eta by+\lambda ax+\sigma = 0. \qquad (4)$$

Geometrisch genommen entspricht dieser letzten Gleichung irgend eine (reelle oder imaginäre) Curve zweiter Ordnung, deren Mittelpunct in den Anfangspunct der Coordinaten fällt.

Die eben angezeigte Coordinaten-Verwandlung kann nicht Statt finden, wenn die beiden ersten der drei geraden Linien (2) parallel sind. Nehmen wir, um diese Ausnahme zu beseitigen, statt der ersten dieser drei geraden Linien, die dritte derselben zur ersten Coordinaten-Axe, so erhalten wir als Hülfs-Gleichung eine Gleichung von folgender Form:

$$(\eta b+\vartheta a+\xi)y+\lambda ax+\nu b = 0, \qquad (5)$$

und für jenen Ausnahms-Fall eine Gleichung von folgender Form:

$$(\vartheta a+\xi)y+\lambda ax+\nu b = 0. \qquad (6)$$

Wenn die Hülfs-Gleichung eine symmetrische ist, so ist in der letzten Gleichung $\vartheta = 0$ und $\xi = \nu$. Die entsprechende Hülfs-Curve ist alsdann eine Parabel, welche von der ersten Axe im Anfangspuncte berührt wird und welche die zweite Axe zu einem ihrer Durchmesser hat.

Da in der Gleichung (5) der Coefficient ξ offenbar nicht fehlen darf, so sehen wir, dass die neun Coefficienten der Hülfs-Gleichung (1) nicht solche Werthe haben dürfen, wonach die drei geraden Linien (3) durch denselben Punct gehen würden. Auch dürfen, was hieraus folgt, nicht irgend zwei dieser drei geraden Linien zusammenfallen. Diesen beiden Fällen entspricht, wo wir eine Curve zweiter Ordnung als Hülfs-Curve nehmen können, dass diese Curve nicht in ein System von zwei geraden Linien übergehen kann.

715. Wir wollen die Polar-Curve irgend eines beliebigen durch die allgemeine Gleichung:

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f = 0, \qquad (1)$$

dargestellten Kegelschnittes bestimmen, indem wir

$$\eta by+\lambda ax+\sigma = 0 \qquad (2)$$

zur Hülfs-Gleichung nehmen. Alsdann ergibt sich nach der 705. Nummer:

$$\frac{\eta y}{\sigma} = \frac{u}{w}, \qquad \frac{\lambda x}{\sigma} = \frac{v}{w}, \qquad (3)$$

wenn wir durch (w, v, u) die Coordinaten der Polaren irgend eines Punctes (y, x) bezeichnen. Für die gesuchte Polar-Curve erhalten wir hiernach, indem wir aus den beiden letzten Gleichungen die Werthe von y und x nehmen und statt dieser Grössen in die

Gleichung (1) substituiren, folgende Gleichung:

$$a\lambda^2\sigma^2u^2+2b\eta\lambda\sigma^2uv+c\eta^2\sigma^2v^2+2d\eta\lambda^2\sigma uw+2e\eta^2\lambda\sigma vw+f\eta^2\lambda^2w^2 = o, \quad (4)$$

die wir, der Kürze halber, auf folgende Weise schreiben wollen:

$$Fu^2+2Euv+Cv^2+2Duw+2Bvw+Aw^2 = o. \quad (5)$$

Man erhält:

$$(CF-E^2) = \eta^2\lambda^2\sigma^4(ac-b^2);$$

es sind also die beiden Ausdrücke $(CF-E^2)$ und $(ac-b^2)$ entweder beide positiv, oder beide negativ oder beide gleich Null. Je nachdem also der Anfangspunct der Coordinaten ausserhalb einer der beiden Polar-Curven (*courbes polaires réciproques*) (1) und (5), oder innerhalb derselben oder auf dem Umfange derselben liegt (488), ist die andere eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel.

Wir wollen ferner noch die besondern Bestimmungen machen, dass

$$\eta = \lambda = 1, \qquad \sigma = -R^2,$$

wonach sich die Gleichungen (2) und (4) in folgende verwandeln:

$$by+ax = R^2, \quad (6)$$

$$aR^4u^2+2bR^4uv+cR^4v^2+2dR^2uw+2eR^2vw+fw^2 = o. \quad (7)$$

Wenn $a = c$ und $b = o$, so ist, bei der Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten, die gegebene Curve ein Kreis und die Polar-Curve dieses Kreises ein Kegelschnitt, welcher den Anfangspunct der Coordinaten zu einem seiner Brennpuncte hat; denn die Gleichung (7) geht alsdann in folgende über, wenn wir zugleich, der Kürze halber, $a = c = 1$ und $w = 1$ setzen:

$$R^4(u^2+v^2)+2R^2(du+ev)+f = o.$$

Die Coordinaten des Mittelpunctes des gegebenen Kreises sind $y = -d$, $x = -e$ und also die Coordinaten der Polaren dieses Mittelpunctes (3):

$$u = -\frac{d}{R^2}, \qquad v = -\frac{e}{R^2}.$$

Diese Polare ist also (560) die Directrix der Polar-Curve und zwar diejenige, welche zu jenem ihrer Brennpuncte gehört, der in den Anfangspunct der Coordinaten fällt. Ob diese Curve eine Hyperbel, Ellipse oder Parabel ist, bestimmt sich wie in dem allgemeinern Falle.

Die vorstehenden Resultate hat zuerst H. PONCELET in der oben angeführten Abhandlung mitgetheilt. Viele einzelne Folgerungen daraus, die sich ohne Mühe noch sehr vervielfältigen liessen, finden sich in zweien Abhandlungen des 18. Bandes der zu *Montpellier* erscheinenden Annalen. *)

Das Quadrat des Radius des gegebenen Kreises ist (d^2+e^2-f), das Quadrat der halben Brennpuncts-Ordinate, das heisst des halben Parameters (561), ist gleich $\left\{\frac{R^4}{d^2+e^2-f}\right\}$. Hiernach ergibt sich:

$$rp = R^2, \quad (8)$$

wenn wir den Radius des gegebenen Kreises r und den halben Parameter der Polar-Curve p nennen. R bedeutet den Radius desjenigen Kreises, der, wenn wir die Pole geometrisch construiren, an die Stelle der Hülfs-Gleichung (6) tritt (701). Kreisen von gleichen Radien entsprechen also Polar-Curven mit gleichen Parametern.

---

*) *PONCELET, Mémoire etc. Nro. 115. — BOBILLIER, Démonstration de divers théorèmes de géométrie: Gerg. Ann. XVIII, Janvier, 1828. — CHASLES, Théorèmes sur les sections coniques confocales: Gerg. Ann. XVIII, Mars 1828. —*

716. Das Princip der Reciprocität führt zu einer neuen Construction der allgemeinen Aufgabe der Tactionen, die ich hier als ein Beispiel von der Anwendung dieses Principes, in Beziehung auf die Entwicklungen der vorigen Nummer, gebe. Fig. 40.

Einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Der Mittelpunct eines Kreises von gegebenem Radius x, der von zwei gegebenen Kreisen, deren Radien R und R′ sind, ausserhalb oder von beiden innerhalb berührt wird, ist, wenn wir seine Abstände von den Mittelpuncten der beiden gegebenen Kreise r und r′ nennen, dadurch bestimmt, dass

$$r \mp R = r' \mp R' = x,$$

und hieraus folgt:

$$r - r' = \pm(R' - R). \qquad (9)$$

Der Ort für die Mittelpuncte aller Kreise, welche von zwei gegebenen Kreisen gleichartig berührt werden, ist also eine Hyperbel, welche die Mittelpuncte der beiden gegebenen Kreise zu ihren Brennpuncten hat. Der eine Zweig dieser Hyperbel, welchem das obere Zeichen in der letzten Gleichung entspricht, bezieht sich auf solche Kreise, welche die beiden gegebenen Kreise nicht umschliessen, der andere Zweig auf solche Kreise, welche die beiden gegebenen umschliessen.

Die Mittelpuncte, K und K′, derjenigen beiden Kreise, welche die drei gegebenen Kreise, C, C′ und C″, gleichartig berühren, sind also zwei gemeinschaftliche Durchschnittspuncte dreier Hyperbeln, welche die Mittelpuncte der drei gegebenen Kreise, paarweise genommen, zu ihren Brennpuncten haben. Wir können also die Mittelpuncte jener beiden Berührungs-Kreise als die Durchschnittspuncte zweier Hyperbeln construiren, deren gemeinschaftlicher Brennpunct der Mittelpunct eines der drei gegebenen Kreise, etwa der Mittelpunct des Kreises C ist. Wenn wir irgend einen Kreis, der mit dem Kreise C concentrisch ist, zur Hülfs-Curve (*curva directrix*) nehmen, so sind die Polar-Curven dieser beiden Hyperbeln zwei Kreise und die Pole zweier gemeinschaftlichen Tangenten dieser Kreise sind die gesuchten Mittelpuncte. Wir wollen den Kreis C selbst zur Hülfs-Curve nehmen. Die Mittelpuncte der beiden Polar-Kreise liegen auf den beiden Central-Linien CC′ und CC″. Ferner geht der erste dieser beiden Kreise, γ', durch diejenigen beiden Puncte der geraden Linie CC′, welche die zugeordneten Pole der Mitten zwischen den beiden innern und den beiden äussern Rändern der beiden ersten Kreise C und C′ sind. Denn die in diesen Mitten auf der Central-Linie CC′ errichteten Perpendikel berühren offenbar in diesen Mitten jene Hyperbel, deren Polar-Curve der Kreis γ' ist. Gerade auf dieselbe Weise, indem wir bloss den dritten gegebenen Kreis C″ an die Stelle des zweiten setzen, bestimmt sich der andere Polar-Kreis γ''. Aber welche zwei der vier gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Polar-Kreise sind die Polaren der gesuchten Mittelpuncte? Offenbar die beiden äussern, wenn, wie in dem Falle der 40. Figur, der Kreis C der grösseste, oder auch, wenn er der kleinste der drei gegebenen Kreise ist. Denn jeder jener beiden Mittelpuncte ist in diesem Falle nothwendig der Durchschnitt solcher zwei Zweige der beiden Hyperbeln, welche beide den gemeinschaftlichen Brennpunct enthalten oder beide denselben nicht enthalten. Ein solcher Durchschnittspunct liegt, in Beziehung auf den Mittelpunct des Kreises C, auf denselben Seiten der zu diesem gemeinschaftlichen Brennpuncte der beiden Hyperbeln gehörigen Directricen, es liegt also auch die Polare desselben auf derselben Seite der beiden Pole dieser Directricen, das heisst der Mittelpuncte der beiden Polar-Kreise γ' und γ''.

Auf ganz analoge Weise können wir auch die Mittelpuncte der übrigen sechs Berührungs-Kreise bestimmen und gelangen zu folgender allgemeinen Construction der an die Spitze dieser Nummer gestellten Aufgabe:

„Es seien C, C' und C'' die drei gegebenen Kreise und C der grösseste derselben. „Man suche zu den Mitten, einerseits zwischen den beiden innern und den beiden äussern „Rändern, und andrerseits zwischen jedem innern und äussern Rande der beiden Kreise „C und C', den zugeordneten Pol, in Beziehung auf den Kreis C und beschreibe über „den Abständen dieser beiden Paare von Polen als Durchmesser zwei neue Kreise γ' und „$\gamma_{,}$. Man construire, indem man bloss den dritten gegebenen Kreis C'' an die Stelle des „zweiten, C', setzt, die beiden analogen Kreise γ'' und $\gamma_{,,}$. Die Pole der acht äussern „gemeinschaftlichen Tangenten der vier Kreis-Paare γ' und γ'', γ' und $\gamma_{,,}$, $\gamma_{,}$ und γ'', $\gamma_{,}$ „und $\gamma_{,,}$, in Beziehung auf den Kreis C, sind die Mittelpuncte derjenigen acht Kreise, „welche, im Allgemeinen, die drei gegebenen, C, C' und C'', berühren."

Die acht eben bezeichneten gemeinschaftlichen Tangenten schneiden sich, paarweise genommen, in solchen vier Puncten, die in gerader Linie liegen, der Polaren des Chordal-Punctes der drei gegebenen Kreise, in Beziehung auf den Kreis C, weil die Mittelpuncte der Berührungs-Kreise, paarweise genommen, auf solchen vier geraden Linien liegen, die sich in jenem Chordal-Puncte schneiden (153).

Einer der beiden durch (9) dargestellten Hyperbel-Zweige geht durch die beiden Durchschnitte der Kreise C und C'; der Kreis γ' berührt also die beiden Tangenten des Kreises C in diesen Durchschnittspuncten. Ein Gleiches thut der Kreis $\gamma_{,}$. Es haben also die drei Kreise C, γ' und $\gamma_{,}$ und ebenso die drei Kreise C, γ'' und $\gamma_{,,}$ zwei gemeinschaftliche Tangenten. Diese Tangenten sind reell oder imaginär, je nachdem die Kreise C und C', und die Kreise C und C'' sich schneiden oder nicht.

Als besondern Fall der allgemeinen Aufgabe will ich beispielsweise bloss den folgenden hervorheben:

Einen Kreis zu beschreiben, der zwei gegebene gerade Linien berührt und überdiess durch einen gegebenen Punct geht.

Die Mittelpuncte derjenigen vier Kreise, welche den Bedingungen dieser Aufgabe Genüge leisten, können wir als die Durchschnittspuncte einer Parabel und derjenigen beiden geraden Linien, welche die von den gegebenen geraden Linien gebildeten Scheitelwinkel halbiren, ansehen. Diese Parabel hat den gegebenen Punct zu ihrem Brennpuncte und eine (beliebige) der beiden gegebenen geraden Linien zu ihrer Directrix; ihr halber Parameter ist gleich dem Abstande jenes Punctes von dieser geraden Linie. Wenn wir den mit diesem halben Parameter aus dem gegebenen Puncte als Mittelpuncte beschriebenen Kreis zur Hülfs-Curve nehmen, so ist der Radius des Polar-Kreises der eben bezeichneten Parabel ebenfalls dem halben Parameter gleich (8) und geht überdiess durch den gegebenen Punct. Hiernach ergibt sich folgende Construction der vorstehenden Aufgabe:

„Man fälle von dem gegebenen Puncte aus ein Perpendikel auf eine beliebige der „beiden gegebenen geraden Linien und beschreibe aus dem gegebenen Puncte und dem „Fusspuncte dieses Perpendikels, als Mittelpuncten, und mit dem Perpendikel, als Radius, zwei Kreise. Man halbire ferner die von den beiden gegebenen geraden Linien „gebildeten Scheitelwinkel durch zwei gerade Linien und lege dann von den Polen dieser „beiden Halbirungs-Linien, in Beziehung auf den ersten jener beiden Kreise, zwei Tangenten-Paare an den zweiten derselben. Die Pole dieser Tangenten, in Beziehung auf

„den erstern Kreis, sind die Mittelpuncte derjenigen vier Kreise, welche, im Allgemeinen, „den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten." —

717. Wenn wir wieder, wie am Ende der 715. Nummer, einen Kreis zur Hülfs-Curve nehmen, so ergibt sich (3):

$$\frac{y}{x} = \frac{u}{v}.$$

Die Polare (v, u) irgend eines beliebigen Punctes (y, x) steht also auf derjenigen geraden Linie senkrecht, welche diesen Punct mit dem Anfangspuncte der Coordinaten verbindet. Es folgt hieraus, dass derjenige Winkel, unter welchem zwei gegebene Puncte vom Anfangspuncte aus gesehen werden, denjenigen Winkel, welchen die Polaren dieser beiden Puncte mit einander bilden, zu zwei Rechten ergänzt. Hiernach können wir, mit Hülfe des Principes der Reciprocität, aus jedem Satze, der sich auf den Vergleich von Winkel bezieht, einen zweiten Satz herleiten. (Vergl. die oben angeführte Abhandlung des H. PONCELET Nro. 108.) Ein Beispiel hierzu liefert die Nebeneinanderstellung folgender beiden Sätze:

Wenn man die Winkel eines gegebenen Dreiecks und ihre Nebenwinkel durch sechs gerade Linien halbirt, so gehen von diesen geraden Linien viermal drei durch denselben Punct.

Wenn man von irgend einem gegebenen Puncte nach den drei Winkelpuncten eines gegebenen Dreiecks drei gerade Linien zieht, und die Scheitelwinkel, welche von je zwei dieser Linien gebildet werden, durch zwei neue gerade Linien halbirt, so schneiden solche drei Linien-Paare die bezüglichen Seiten des Dreiecks in solchen dreimal zwei Puncten, von welchen viermal drei in gerader Linie liegen.

Die vier Durchschnittspuncte, die man nach dem ersten dieser beiden Sätze erhält, sind die Mittelpuncte solcher Kreise, welche die drei Seiten des gegebenen Dreiecks berühren. Die vier geraden Linien, die man nach dem zweiten dieser Sätze erhält, sind mithin die Directricen solcher Kegelschnitte, welche durch die drei Winkelpuncte des gegebenen Dreiecks gehen und den gegebenen Punct zum Brennpuncte haben. (Es ist diess mit der Construction der 577. Nummer in Uebereinstimmung). Ueberhaupt entspricht jedem Satze über Winkel-Beziehungen beim Kreise ein zweiter Satz, der sich auf Winkel am Brennpuncte irgend eines beliebigen Kegelschnittes bezieht. Die folgenden Sätze enthalten ein einfaches Beispiel:

Peripherie-Winkel, welche in demselben Kreise auf demselben Bogen stehen, sind einander gleich, und halb so gross, als ein Winkel am Centrum, der auf gleichem Bogen steht.

*Das von zweien festen Tangenten eines beliebigen Kegelschnittes interceptirte Stück irgend einer dritten beweglichen Tangente wird, vom Brennpuncte aus, unter constantem Winkel gesehen *), und dieser Winkel ist halb so gross, als derjenige, unter welchem das von denselben Tangenten interceptirte Stück der Directrix, vom Brennpuncte aus, gesehen wird.*

718. In der Polar-Curve treten an die Stelle der beiden Brennpuncte eines gegebenen Kegelschnittes zwei gerade Linien. Vermittelst der Hülfs-Curve können wir alle

*) PONCELET, *Traité des prop. proj. p. 464.*

Eigenschaften von jenen auf diese übertragen. Ist die Hülfs-Curve ein Kreis, so übertragen sich alle Winkel-Beziehungen unmittelbar.

Wenn der gegebene Kegelschnitt eine Hyperbel oder eine Ellipse ist, so wird bekanntlich derjenige Winkel, welcher von zwei, die beiden Brennpuncte mit irgend einem Puncte des Umfanges verbindenden geraden Linien gebildet wird, oder der Nebenwinkel desselben, von der Tangente in diesem Puncte halbirt. Die Polaren der beiden Brennpuncte, in Beziehung auf einen beliebigen Hülfs-Kreis, werden also von einer beliebigen Tangente der Polar-Curve in solchen zwei Puncten geschnitten, welche die Eigenschaft haben, dass zwei gerade Linien, die vom Mittelpuncte des Hülfs-Kreises nach denselben gezogen werden, einen Winkel bilden, der entweder selbst oder dessen Nebenwinkel von derjenigen geraden Linie, welche jenen Mittelpunct mit dem Berührungspuncte auf der beliebigen Tangente verbindet, halbirt wird. Wenn eine gegebene Ellipse in einen Kreis übergeht, so vereinigen sich die beiden Brennpuncte in dem Mittelpuncte, die Polaren derselben fallen also in die Directrix der Polar-Curve, deren ein Brennpunct der Mittelpunct des Hülfs-Kreises ist, zusammen. Es bilden also diejenigen beiden geraden Linien, die den letztgenannten Brennpunct mit dem Berührungspuncte auf einer beliebigen Tangente der Polar-Curve und dem Durchschnitte derselben mit der Directrix verbinden, am Brennpuncte einen rechten Winkel. In dem allgemeinen Falle, dass die beiden in Rede stehenden Polaren der Brennpuncte der gegebenen Curve nicht zusammenfallen, ist ihr Durchschnittspunct der Pol der Haupt-Axe dieser Curve, und es stehen diejenigen beiden geraden Linien, welche den Mittelpunct des Hülfs-Kreises mit jenem Durchschnittspuncte und dem Berührungspuncte auf jeder der beiden durch denselben gehenden Tangenten der Polar-Curve verbinden, auf einander senkrecht. Der Mittelpunct des Hülfs-Kreises liegt also auf der Polaren des obigen Durchschnittspunctes, in Beziehung auf die Polar-Curve. Wenn der Mittelpunct des gegebenen Kegelschnittes mit dem Mittelpuncte des Hülfs-Kreises zusammenfällt, so sind die beiden in Rede stehenden Brennpuncts-Polaren parallel. Sie stehen auf der kleinern Axe oder der Quer-Axe der Polar-Curve senkrecht, je nachdem diese Curve eine Ellipse oder eine Hyperbel ist; und zwar, was sich ohne Mühe ergibt, in einer Entfernung vom Mittelpuncte, die gleich ist $\alpha\beta:\varepsilon$, wenn man durch α und β die beiden halben Axen und durch ε die Excentricität der Polar-Curve bezeichnet. Für den Fall, dass diese Curve eine Ellipse ist, erhält man also die Durchschnitte der beiden in Rede stehenden geraden Linien, wenn man durch einen Scheitel der grössern Axe zwei gerade Linien legt, die denjenigen parallel sind, welche einen Brennpunct mit den beiden Scheiteln der kleinern Axe verbinden. Je nachdem der gegebene Kegelschnitt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, liegt der Mittelpunct des Hülfs-Kreises innerhalb der Polar-Curve, ausserhalb derselben oder auf ihrem Umfange. In dem letzten Falle liegt ein Brennpunct nach der Richtung der Durchmesser der gegebenen Parabel unendlich weit; die Polare desselben ist die Tangente der Polar-Curve im Anfangspuncte. Nur in diesem einzigen Falle ist eine der beiden in Rede stehenden geraden Linien eine Tangente der Polar-Curve; in allen übrigen Fällen liegt jede derselben ganz ausserhalb dieser Curve. Wenn also der Mittelpunct des Hülfs-Kreises auf dem Umfange der Polar-Curve liegt, so können wir, auch ohne uns des Hülfs-Kreises zu bedienen, da wir eine der beiden Brennpuncts-Polaren kennen, nach der oben erörterten allgemeinen Eigenschaft dieser Linien, unmittelbar die zweite derselben construiren. Wir können hierbei auch nach folgenden Bemerkungen

verfahren. Die Winkelpuncte aller rechten Winkel, deren Schenkel die gegebene Parabel berühren, liegen auf der Directrix derselben. Nach dem Princip der Reciprocität (717) gehen also die Hypotenusen aller derjenigen rechtwinkligen Dreiecke, welche der Polar-Curve eingeschrieben sind, und deren rechte Winkel in dem gegebenen Punct ihres Umfanges liegen, durch einen festen Punct (357). Die Polare dieses festen Punctes, in Beziehung auf die Polar-Curve, ist die gesuchte gerade Linie, denn der Pol der Directrix, in Beziehung auf die gegebene Parabel, ist der Brennpunct dieser Parabel. Wenn der gegebene Kegelschnitt den Mittelpunct des Hülfs-Kreises zu einem seiner Brennpuncte hat, so ist die Polar-Curve ein Kreis und die eine der beiden in Rede stehenden Brennpuncts-Polaren liegt unendlich weit. Die zweite dieser Polaren, deren geometrische Bedeutung in den folgenden Erörterungen noch deutlicher hervortritt, erhalten wir hiernach ohne Mühe; sie ist die Chordale (102) des Polar-Kreises und des Mittelpunctes des Hülfs-Kreises.

Wenn mehrere gegebene Kegelschnitte dieselben beiden reellen (und also auch (477) dieselben beiden imaginären) Brennpuncte haben, so sind diese Brennpuncte zwei zusammengehörige homologe Puncte derselben. Ein zweites System homologer Puncte bilden die beiden imaginären Brennpuncte, welche auf der, allen gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen, zweiten Axe, einer homologen geraden Linie derselben, liegen. Das dritte System homologer Puncte liegt unendlich weit, und mithin auch die entsprechende homologe gerade Linie (617). In der Polar-Figur erhalten wir, statt jedes Systems homologer Puncte, ein Chordal-System der Polar-Curven, statt jeder homologen geraden Linie einen Chordal-Punct. Die beiden reellen Brennpuncts-Polaren bilden das Chordal-System der Polar-Curven, die beiden imaginären Brennpuncts-Polaren schneiden sich in einem reellen Puncte, der Polaren der allen gegebenen Kegelschnitten gemeinschaftlichen zweiten Axe, in einem Chordal-Puncte der Polar-Curven. Der zweite Chordal-Punct ist der Mittelpunct des Hülfs-Kreises.

Wir wollen nun von irgend einer Polar-Curve, als ursprünglich gegeben, ausgehen und den Mittelpunct des Hülfs-Kreises beliebig annehmen. Alsdann erhalten wir für jene beiden geraden Linien, die der Gegenstand der Untersuchung in dieser Nummer sind, immer dieselben, welchen Radius der Hülfs-Kreis auch haben mag. Der Beweis hiervon ist in dem Vorstehenden schon einschliesslich enthalten; er ergibt sich indess auch leicht auf directe Weise. Es stelle die Gleichung (1) der 715. Nummer die gegebene Polar-Curve dar, der Mittelpunct des Hülfs-Kreises sei der Anfangspunct der Coordinaten, der Radius desselben gleich R. Alsdann sind die in Rede stehenden geraden Linien die Polaren der Brennpuncte der Curve (7). Für die Coordinaten jedes dieser Brennpuncte erhalten wir (477) Ausdrücke von folgender Form:

$$y = R^2\varphi, \qquad x = R^2\psi,$$

wobei φ und ψ solche Ausdrücke bedeuten, die von R unabhängig sind. Aus den Coordinaten-Werthen der Polaren eines solchen Punctes (3):

$$u = \varphi, \qquad v = \psi,$$

verschwindet R.

Wenn wir also aus den bisherigen Entwicklungen die Haupt-Momente hervorheben, so ergibt sich folgender Satz:

Wenn irgend ein Kegelschnitt und ein Punct gegeben sind, so gibt es immer zwei reelle und zwei imaginäre gerade Linien, welche die Eigenschaft besitzen, dass jede

beliebige Tangente des gegebenen Kegelschnittes, dieselben in solchen zwei Puncten schneidet, welche, wenn man sie mit dem gegebenen Puncte durch zwei gerade Linien verbindet, einen Winkel im letztgenannten Puncte bilden, der entweder selbst oder dessen Nebenwinkel von derjenigen geraden Linie, welche durch den Berührungspunct auf der beliebigen Tangente und den gegebenen Punct geht, halbirt wird. Es gibt unendlich viele Kegelschnitte, welche zu demselben gegebenen Puncte und denselben beiden Linien-Paaren in derselben Beziehung stehen. Es schneiden sich alle diese Kegelschnitte in denselben vier imaginären Puncten; das reelle Linien-Paar ist das Chordal-System derselben, ihre beiden Chordal-Puncte sind der Durchschnittspunct der beiden imaginären geraden Linien des andern Paares und der gegebene Punct.

719. Wir wollen in dieser Nummer untersuchen, ob ein gegebener Kegelschnitt, wenn wir die Hülfs-Curve gehörig bestimmen, seine eigne Polar-Curve sein kann, worin kein Widerspruch liegt, weil ein Kegelschnitt zugleich eine Curve zweiter Ordnung und zweiter Classe ist. Wenn die beiden Gleichungen (1) und (4) der 715. Nummer ein und dieselbe Curve darstellen sollen, so erhalten wir nach der 552. Nummer folgende Bedingungs-Gleichungen, wenn wir zugleich, der Kürze halber, σ und f gleich Eins setzen:

$$\frac{ae-bd}{b^2-ac}=\frac{e}{\lambda},\quad \frac{cd-be}{b^2-ac}=\frac{d}{\eta},\quad \frac{b-de}{b^2-ac}=\frac{b}{\eta\lambda};\quad \frac{d^2-a}{b^2-ac}=\frac{c}{\lambda^2},\quad \frac{e^2-c}{b^2-ac}=\frac{a}{\eta^2}.\quad (10)$$

Wir können, wenn wir den Coordinaten-Winkel unbestimmt lassen, unbeschadet der Allgemeinheit, die erste Coordinaten-Axe durch den Mittelpunct des gegebenen Kegelschnittes legen. Alsdann gibt die erste der vorstehenden Gleichungen $e = o$ (und entweder $b = o$ oder $d = o$, oder beides zugleich), hiernach die dritte Gleichung:

$$b^2-ac = \eta\lambda, \qquad (11)$$

hiernach ferner die fünfte:

$$\frac{c}{a} = -\frac{\lambda}{\eta}, \qquad (12)$$

und endlich die vierte $d = o$, wonach auch die zweite Gleichung befriedigt wird. Wir sehen hieraus, dass es, wenn irgend ein der Hülfs-Gleichung (2) entsprechender Kegelschnitt:

$$\eta y^2+\lambda x^2+1 = o, \qquad (13)$$

als Hülfs-Curve gegeben ist, unendlich viele Kegelschnitte gibt, welche ihre eigenen Polar-Curven sind. Alle diese Curven haben denselben Mittelpunct als die gegebene. Sie sind alle Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem, umgekehrt, die Hülfs-Curve eine Hyperbel oder Ellipse ist (11). Sie haben alle denselben Inhalt (251) und dieser Inhalt ist gleich dem Inhalte der Hülfs-Curve, multiplicirt mit $\sqrt{-1}$ (11). Der Quotient derjenigen beiden Durchmesser jeder der in Rede stehenden Curven, welche in die beiden Coordinaten-Axen, das heisst, in zwei beliebige zugeordnete Durchmesser der Hülfs-Curve, fallen, ist constant und gleich dem Quotienten dieser beiden zugeordneten Durchmesser (12) (eigentlich multiplicirt mit $\sqrt{-1}$, wenn wir uns nicht der hergebrachten Definition der zweiten Durchmesser einer Hyperbel anschmiegen).

Es ist sogleich ersichtlich, dass, wenn von zwei Kegelschnitten einer, in Beziehung auf den andern, seine eigene Polar-Curve ist, die beiden Curven in einem durchaus gegenseitigen Verhältnisse zu einander stehen.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass jede Eigenschaft eines gegebenen Kegelschnittes durch Hülfe eines zweiten, gehörig zu bestimmenden, unmittelbar sich verdoppeln lässt.

Wenn wir insbesondere in der Gleichung (11) $b = o$ setzen, so erhalten wir, wenn die Hülfs-Curve gegeben ist, für diejenige Curve, welche ihre eigene Polar-Curve ist, eine solche, welche über den beiden Axen der Hülfs-Curve beschrieben ist, aber, je nachdem diese eine Ellipse oder Hyperbel, umgekehrt, eine Hyperbel oder Ellipse ist. Diesen besondern Fall hat schon H. Bobillier hervorgehoben *). Wenn also zum Beispiel die Hülfs-Curve ein Kreis ist, so ist eine gleichseitige Hyperbel, welche mit diesem Kreise denselben Mittelpunct hat und ihn doppelt berührt, ihre eigene Polar-Curve. Jeder Eigenschaft einer gleichseitigen Hyperbel, welche sich auf den Vergleich von Winkel bezieht, entspricht also eine zweite solche Eigenschaft, wobei der Mittelpunct derselben in Betracht kommt. Der über der Quer-Axe einer gleichseitigen Hyperbel, als Durchmesser, beschriebene Kreis ist, in Beziehung auf diese Hyperbel, seine eigene Polar-Curve. Auch beim Kreise ordnen sich alle Winkel-Beziehungen paarweise zusammen. Denn wenn die Hülfs-Curve eine gleichseitige Hyperbel ist, so kommt (3):

$$\frac{y}{x} = -\frac{u}{v},$$

woraus folgt, was H. Bobillier am angeführten Orte zuerst bemerkt hat, dass der Winkel, den irgend zwei gegebene gerade Linien mit einander bilden, demjenigen gleich ist, unter welchem die Pole dieser geraden Linien, vom Mittelpuncte der Hülfs-Hyperbel aus, gesehen werden. —

720. Statt der Gleichung (2), in der 715. Nummer, wollen wir nun folgende Gleichung:

$$py+ax+pb = o, \qquad (1)$$

zur Hülfs-Gleichung nehmen. Es entspricht derselben, als Hülfs-Curve, eine Parabel, deren Gleichung folgende ist (701):

$$x^2+2py = o. \qquad (2)$$

Wenn wir hiernach die Polare eines Punctes (y, x) durch (w, v) bezeichnen, so erhalten wir, nach der 705. Nummer:

$$y = w, \qquad x = pv. \qquad (3)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergeben sich sogleich mehrere einfache Grundregeln, um Eigenschaften einer gegebenen Figur auf ihre Polar-Figur zu übertragen. Dieselben absoluten Grössen-Beziehungen der Ordinaten beliebiger Puncte in jeder der beiden Figuren gelten unmittelbar auch von den, mit entgegengesetzten Zeichen genommenen, Ordinaten der Durchschnittspuncte der entsprechenden geraden Linien in der Polar-Figur mit der zweiten Coordinaten-Axe. Beziehungen der von den geraden Linien in der einen Figur gebildeten Winkel zu einander entsprechen Beziehungen zwischen den Abscissen der entsprechenden Puncte in der andern Figur. Die Pole von geraden Linien, die parallel sind, liegen auf einer der zweiten Coordinaten-Axe parallelen geraden Linien. Das Product der Abscissen zweier Puncte ist constant, wenn ihre Polaren auf einander senkrecht stehen, und umgekehrt. Aus der Gleichung:

$$v'v''+1 = o,$$

ergibt sich nemlich (3):

$$x'x''+p^2 = o.$$

Beziehungen endlich zwischen Winkeln, die von solchen geraden Linien, welche Puncte einer von zwei Polar-Figuren mit dem Anfangspuncte der Coordinaten verbinden, an

*) *Mémoire sur l'hyperbole équilatère: Gerg. Ann. XIX. Juin 1829 p. 349.*

diesem Anfangspuncte, gebildet werden, entsprechen Beziehungen zwischen den Abscissen der Durchschnitte der ersten Axe mit den entsprechenden geraden Linien in der andern Polar-Figur. Aus den Gleichungen (3) ergibt sich nemlich folgende:

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{p} \cdot \frac{w}{v}.$$

Die Polaren irgend zweier Puncte, die vom Anfangspuncte aus unter rechtem Winkel gesehen werden, bestimmen auf der ersten Axe zwei Segmente, deren Product constant und gleich $(-p^2)$ ist.

720. Wenn irgend ein Kegelschnitt durch folgende Gleichung:

$$ay^2+2bxy+cx^2+2dy+2ex+f = o,$$

gegeben ist, so erhalten wir, nach den Gleichungen (3), für die Polar-Curve desselben folgende Gleichung:

$$aw^2+2bpvw+cp^2v^2+2dw+2epv+f = o.$$

Wir wollen auf einige einfache Beziehungen eines solchen Kegelschnittes und seiner Polar-Curve, Beziehungen, die immer vollkommen gegenseitig sind, aufmerksam machen.

1) Wenn $a = o$, so ist die erste Curve eine Hyperbel, deren eine Asymptote der zweiten Coordinaten-Axe parallel ist: die zweite Curve ist eine Parabel.
2) Wenn $b = o$, so sind zwei zugeordnete Durchmesser der ersten Curve den Coordinaten-Axen parallel: der Mittelpunct der zweiten Curve liegt auf der zweiten Coornaten-Axe.
3) Wenn $c = o$, so ist die erste Curve eine Hyperbel, deren eine Asymptote der ersten Coordinaten-Axe parallel ist: die zweite Curve berührt die zweite Axe.
4) Wenn $d = o$, so geht derjenige Durchmesser der ersten Curve, dessen conjugirter der zweiten Coordinaten-Axe parallel ist, durch den Anfangspunct: der Mittelpunct der zweiten Curve liegt auf der ersten Axe.
5) Wenn $e = o$, so geht derjenige Durchmesser der ersten Curve, dessen zugeordneter der ersten Axe parallel ist, durch den Anfangspunct: die an die zweite Curve, vom Anfangspuncte aus, gelegten Tangenten bilden mit den beiden Coordinaten-Axen ein System von vier Harmonicalen.
6) Wenn $f = o$, so geht die erste Curve durch den Anfangspunct: die zweite Curve wird von der ersten Axe berührt.
7) Je nachdem die erste Curve eine Hyperbel oder Ellipse ist, hat die zweite Curve reelle Tangenten, die er zweiten Coordinaten-Axe parallel sind oder nicht. Die Polar-Curven von ähnlichen und ähnlich liegenden Curven, sind solche, welche zwei feste, der zweiten Axe parallele, gerade Linien berühren.

721. Ich will schliesslich noch ein paar Beispiele von der Anwendung der Resultate der beiden letzten Nummern geben.

Das Verhältniss der Abstände der beiden Durchschnittspuncte einer beweglichen Tangente mit zwei festen Tangenten einer Parabel von einer dritten festen Tangente ist constant (628).

Nach dem ersten der in der vorigen Nummer betrachteten Fälle schliesst sich an diesen Satz der folgende an:

Wenn man zwei feste Puncte auf dem Umfange einer gegebenen Hyperbel mit einem dritten auf demselben beweglichen Puncte durch zwei gerade Linien verbindet, so wird jede, einer Asymptote der Hyperbel parallele, gerade Linie von diesen beiden

geraden Linien in solchen zwei Puncten geschnitten, deren Abstände von dem Durchschnittspuncte derselben geraden Linie mit der Curve in einem constanten Verhältnisse stehen.

Mit diesem letzten Satze gehört wiederum, nach dem dritten Falle der vorigen Nummer, der folgende zusammen:

Wenn ein beliebiges Dreieck um einen gegebenen Kegelschnitt beschrieben ist und man zieht von irgend einem festen Puncte (P) der Basis dieses Dreiecks zwei gerade Linien nach den Durchschnittspuncten der beiden Schenkel desselben mit einer beweglichen Tangente des Kegelschnittes, so gibt es eine gerade Linie von gegebener Richtung (AB), welche jenen beiden geraden Linien in solchen zwei Puncten begegnet, deren Abstände von der Basis des Dreiecks in constantem Verhältnisse stehen.

Die Richtung der geraden Linie AB bleibt dieselbe, wo auch der feste Punct (P) auf der Basis des umschriebenen Dreiecks angenommen werden mag.

Wenn wir in dem zweiten Satze der vorliegenden Nummer statt jener geraden Linie, die einer der beiden Asymptoten der gegebenen Hyperbel parallel ist, eine dieser Asymptoten selbst nehmen, so ergibt sich folgender Satz:

Wenn man zwei feste Puncte auf dem Umfange einer gegebenen Hyperbel mit einem dritten auf demselben liegenden Puncte durch zwei gerade Linien verbindet, so wird auf jeder Asymptote von diesen beiden geraden Linien ein Stück von constanter Länge interceptirt (305).

Einer Hyperbel, welche die zweite Coordinaten-Axe zu einer ihrer Asymptoten hat, entspricht eine Parabel, deren ein Durchmesser die erste Axe ist. (In diesem Falle ist $a = o$, $d = o$). Hiernach erhalten wir aus dem vorstehenden Satze den folgenden:

Wenn man das von zwei festen Tangenten einer gegebenen Parabel interceptirte Stück einer beweglichen dritten Tangente derselben nach der Richtung ihrer Durchmesser auf eine beliebige gerade Linie projicirt, so ist die Projection von constanter Länge.

Aus dem vorletzten Satze folgt noch ein zweiter Satz, der dem dritten dieser Nummer entspricht. In dem letztgenannten Satze ist alsdann der Berührungspunct auf der Basis des dem gegebenen Kegelschnitte umschriebenen Dreieckes, also irgend ein fester Punct auf dem Umfange der Curve, der Punct P. Es sind alsdann diejenigen Segmente von constanter Länge, welche auf der geraden Linie AB von denjenigen beiden geraden Linien, welche den Berührungspunct auf der Basis mit den Durchschnittspuncten der beiden Schenkel des Dreiecks und einer beweglichen Tangente verbinden. Der Scheitel des Dreiecks und der Berührungspunct auf jedem Schenkel desselben sind als solche zwei Durchschnittspuncte zu betrachten. Hiernach ist ersichtlich, dass die gerade Linie AB als vierte Harmonicale zu denjenigen drei geraden Linien gehört, welche den Punct P mit dem Scheitel und den beiden Berührungspuncten auf den Schenkeln des umschriebenen Dreiecks verbinden. Hiernach kann man dem in Rede stehenden Satze folgende Aussage geben (623, Note):

Wenn man irgend einen Punct auf dem Umfange eines gegebenen Kegelschnittes mit den drei Paaren von Durchschnittspuncten zweier festen Tangenten mit irgend dreien beliebigen Tangenten durch gerade Linien verbindet, so erhält man eine Involution von sechs geraden Linien.

Aus diesem Satze ergibt sich nach der 713. Nummer folgender neue Satz:

Wenn man zwei feste Puncte auf dem Umfange eines gegebenen Kegelschnittes mit irgend dreien andern Puncten desselben durch sechs gerade Linien verbindet, so schneiden diese geraden Linien eine beliebige Tangente des Kegelschnittes in den sechs Puncten einer Involution.

722. Um noch ein zweites Beispiel zu geben, wollen wir von folgendem allbekannten Satze ausgehen:

Die Winkelpuncte aller rechten Winkel, deren Scheitel eine gegebene Parabel berühren, liegen in gerader Linie.

Nach dem ersten Falle der 720. Nummer gehört mit diesem Satze der folgende zusammen:

Alle diejenigen geraden Linien, welche solche zwei Puncte einer gegebenen Hyperbel mit einander verbinden, für welche das Product der Abstände von einer gegebenen, einer der beiden Asymptoten parallelen, geraden Linien constant ist, gehen durch einen festen Punct.

Dieser feste Punct liegt auf einer, der andern Asymptote der gegebenen Hyperbel parallelen, geraden Linie, deren Durchschnitt mit der gegebenen geraden Linie auf der Curve liegt. Nach dem dritten Falle der 720. Nummer stellt sich neben den letzten Satz der folgende:

Wenn man von solchen zwei auf einer gegebenen Tangente eines gegebenen Kegelschnittes irgend beliebig angenommenen Puncten, für welche das Product der Abstände von irgend einem festen Puncte derselben Tangente constant ist, noch zwei Tangenten an den Kegelschnitt legt, so schneiden sich solche Tangenten in einem Puncte, der auf einer festen geraden Linie liegt.

Nach dem sechsten in der 720. Nummer betrachteten Falle erhalten wir aus diesem Satze wiederum den folgenden:

Wenn ein rechter Winkel, dessen Scheitel auf dem Umfange eines gegebenen Kegelschnittes liegt, um diesen Scheitel sich beliebig dreht, so gehen die Chorden, welche durch die Schenkel desselben in ihren verschiedenen Lagen bestimmt werden, durch einen festen Punct (357).

Aus diesem letzten Satze erhalten wir endlich wieder den an die Spitze dieser Nummer gestellten, wenn wir einen Kreis zur Hülfs-Curve nehmen; eine Bemerkung, die wir bereits schon beiläufig gemacht haben (718).

723. Wenn wir in der 720. Nummer $p = 1$ setzen, so erhalten wir

$$y = w, \qquad x = v,$$

und folglich durch blosse Coordinaten-Vertauschung aus der Gleichung irgend einer Curve die Gleichung der Polar-Curve derselben. Es stellen die beiden Gleichungen:

$$F(y, x) = 0, \qquad F(w, v) = 0,$$

zwei solche Polar-Curven dar.

Auf ähnliche Weise erhalten wir, wenn wir zur 715. Nummer zurückgehen und zunächst wieder $\eta = \lambda = 1$ und dann ferner auch $\sigma = 1$ setzen:

$$y = \frac{u}{w}, \qquad x = \frac{v}{w},$$

oder auch, indem wir nach der Note zur 416. Nummer die dritte Ordinate z einführen und dann $x = 1$ und $v = 1$ setzen:

$y = u, \qquad z = w.$

Wir erhalten also auch hier wiederum die Gleichung der Polar-Curve einer gegebenen Curve durch blosse Coordinaten-Vertauschung. *)

---

*) Die vorstehenden Bemerkungen des Textes führen zu einem Principe, das mit dem bisher erörterten Principe der Reciprocität enge verwandt ist. Ich will dasselbe sogleich an einem einfachen Beispiele erläutern, indem ich folgende Gleichungen zu Grunde lege:

$$y^2+x^2 = r^2, \quad (I) \qquad v^2+u^2 = k^2, \quad (IV)$$
$$y^2+z^2 = s^2, \quad (II) \qquad v^2+w^2 = l^2, \quad (V)$$
$$\psi^2+\varphi^2 = \mu^2, \quad (III) \qquad \gamma^2+\lambda^2 = \nu^2. \quad (VI)$$

Alle diese Gleichungen haben dieselbe Form. Die Gleichung (I) stellt einen Kreis dar, der Punct $[y = o, x = o]$ ist der Mittelpunct desselben. Die Gleichung (II) stellt (416, Note) eine Hyperbel dar, deren Axen mit den Coordinaten-Axen zusammenfallen und deren halbe reelle, in die zweite Coordinaten-Axe fallende, Axe gleich ist der Einheit. Der Punct $[y = o, z = o]$ liegt nach der Richtung der imaginären Axe der Hyperbel unendlich weit. In der Gleichung (III) bedeuten ψ und φ die Quotienten der Abstände irgend eines Punctes von einer beliebigen festen geraden Linie in die Abstände desselben Punctes von der ersten und zweiten Coordinaren-Axe. Nehmen wir rechtwinklige Coordinaten-Axen an, so stellt die Gleichung (III) irgend einen Kegelschnitt dar, dessen ein Brennpunct in den Anfangspunct der Coordinaten fällt. Der Punct $[\psi = o, \varphi = o]$ ist dieser Brennpunct. Die Gleichung (IV) stellt einen Kreis dar, die gerade Linie $[v = o, u = o]$ liegt unendlich weit. Die Gleichnng (V) stellt eine Hyperbel dar, deren Axen mit den Coordinaten-Axen zusammenfallen. Die in die erste Coordinaten-Axe fallende Axe ist imaginär und gleich $\sqrt{-1}$. Die gerade Linie $[w = o, v = o]$ ist die erste Coordinaten-Axe. In der Gleichung (VI) bedeuten γ und λ die Quotienten der Abstände der beiden Durchschnittspuncte einer beliebigen geraden Linie mit den beiden Coordinaten-Axen von dem Anfangspuncte respective in die Abstände derselben Durchschnittspuncte von zweien festen auf den beiden Coordinaten-Axen beliebig angenommenen Puncten. Die Gleichung (VI) stellt alsdann irgend einen gegebenen Kegelschnitt dar, bezogen auf leicht zu bestimmende Coordinaten-Axen. Die gerade Linie $[\gamma = o, \lambda = o]$ ist die Polare des Anfangspunctes, in Beziehung auf den gegebenen Kegelschnitt, und geht durch die beiden festen, auf den beiden Coordinaten-Axen angenommenen, Puncte.

Um auszudrücken, dass drei gegebene Puncte in gerader Linie liegen, erhalten wir in den drei Coordinaten-Systemen, auf welche sich die drei ersten Gleichungen beziehen, Gleichungen, welche genau dieselbe Form haben, und eben solche Gleichungen in den drei letzten Coordinaten-Systemen drücken aus, dass drei gegebene gerade Linien in demselben Puncte sich schneiden. Auf ähnliche Weise zeigen Gleichungen von derselben Form in den drei ersten Systemen an, dass drei gegebene gerade Linien durch denselben Punct gehen, und in den drei letzten, dass drei gegebene Puncte in gerader Linie liegen. Ferner hat die Tangente in einem gegebenen Puncte einer gegebenen Curve in den drei ersten Systemen dieselbe Form, und dieselbe Form hat auch die Gleichnng des Berührungspunctes auf einer gegebenen Tangente in den drei letzten Systemen. Aus diesen allgemeinen Bemerkungen ergeben sich, indem wir von einem jener ersten Systeme zu einem von diesen letztern übergehen, alle jene Uebertragungen vermittelst des Principes der Reciprocität, wobei die besondere Form der (linearen) Hülfs-Gleichung nicht weiter in Betracht kommt.

Aber auch jede einzelne Gleichung zwischen Coordinaten in einem Systeme erhält eine andere, analoge, geometrische Deutung, wenn wir statt dieser Coordinaten die Coordinaten eines andern Systemes nehmen. Beispielsweise wollen wir die folgenden Gleichungen zusammenstellen:

$$y'y''+x'x'' = o, \quad (VII) \qquad v'v''+u'u'' = o, \quad (X)$$
$$y'y''+z'z'' = o, \quad (VIII) \qquad v'v''+w'w'' = o, \quad (XI)$$
$$\psi'\psi''+\varphi'\varphi'' = o, \quad (IX) \qquad \gamma'\gamma''+\lambda'\lambda'' = o, \quad (XII)$$

Die Gleichung (VII) bedeutet, dass die beiden Puncte (y'', x'') und (y', x'), vom Anfangspuncte aus, unter rechtem Winkel gesehen werden; die Gleichung (VIII), dass das Product der Abstände der beiden Puncte (y'', z'') und (y', z') von der ersten Axe gleich Eins ist; die Gleichung (IX) wiederum, dass die beiden Puncte (ψ'', φ'') und (ψ', φ') vom Anfangspuncte aus, unter rechtem Winkel gesehen werden. Die Gleichung (X) zeigt an,

724. Ich muss mich hier mit den vorstehenden wenigen Ausführungen des besondern Falles begnügen, wo die Hülfs-Gleichung eine lineare ist. Wenn wir beliebige Gleichungen zu Grunde legen, so ist die Art der Behandlung dieselbe, es kommt bloss darauf an, aus solchen Entwicklungen einfache geometrische Resultate herzuleiten. So liegt zum Beispiel die Bemerkung nahe, dass die Theorie von der Abwicklung der Curven, welche, wie das oben entwickelte Princip der Reciprocität, auf die Variation der constanten Grössen beruht, ebenfalls hierher gehört.

---

dass die beiden geraden Linien (v'', u'') und (v', u') auf einander senkrecht stehen; die Gleichung (XI), dass die deiden geraden Linien (w'', v'') und (w', v') auf der ersten Axe zwei Segmente bestimmen, deren Product gleich Eins ist, und endlich die Gleichung (XII), wenn wir die Abstände der Durchschnittspuncte der beiden geraden Linien (γ'', λ'') und (γ', λ') mit den beiden Coordinaten-Axen vom Anfangspuncte Y'', X'' und Y', X', und die Abstände der beiden festen Puncte auf den beiden Axen vom Anfangspuncte b und a nennen, dass

$$\frac{Y''-b}{Y''} \cdot \frac{Y'-b}{Y'} + \frac{X''-a}{X''} \cdot \frac{X'-a}{X'} = 0.$$

Wenn wir hiernach in den drei ersten Coordinaten-Systemen durch den Punct (o, o) eine gerade Linie und in den Durchschnittspuncten dieser geraden Linie mit den bezüglichen Curven (I), (II) und (III) an jede dieser Curven zwei Tangenten legen, ferner noch irgend eine beliebige dritte Tangente an jede derselben ziehen und die Durchschnittspuncte der letztgenannten Tangente mit den beiden erstgenannten respective durch (y'', x'') und (y', x'), (y'', z'') und (y', z') und durch (ψ'', φ'') und (ψ', φ') bezeichnen; wenn wir ferner in den drei letzten Coordinaten-Systemen von irgend einem Puncte der geraden Linie (o, o) zwei Tangenten an jede der bezüglichen Curven (IV), (V) und (VI) legen, die Berührungspuncte auf einem solchen Tangenten-Paare durch zwei gerade Linien mit irgend einem dritten beliebigen Puncte der bezüglichen Curve durch zwei gerade Linien verbinden und diese geraden Linien respective durch (v'', u'') und (v', u'), (v'', w'') und (v', w') und durch (γ'', λ'') und (γ', λ') bezeichnen: — so ist offenbar, dass, wenn eine der Gleichungen (VII) — (XII) besteht, diese Gleichungen alle sechs befriedigt werden. Hiernach sind also auch die nachstehenden Sätze alle sechs bewiesen, wenn einer derselben als bewiesen angesehen werden kann.

1) *Irgend eine beliebige Tangente eines gegebenen Kreises schneidet irgend zwei parallele Tangenten desselben Kreises in solchen zwei Puncten, die, vom Mittelpuncte desselben aus, unter einem rechtem Winkel gesehen werden.*

2) *Irgend eine beliebige Tangente einer gegebenen Hyperbel begegnet irgend zweien Tangenten, welche sich in irgend einem Puncte einer Axe der gegebenen Hyperbel (der reellen Axe) schneiden, in solchen zwei Puncten, für welche das Product der Abstände von der andern Axe (der imaginären) constant und dem Quadrate der halben erstgenannten Axe gleich ist.*

3) *Auf irgend einer beliebigen Tangente eines gegebenen Kegelschnittes wird von irgend zweien andern, auf einer Directrix sich schneidenden, Tangenten ein solches Segment interceptirt, das, vom bezüglichen Brennpuncte aus, unter rechtem Winkel gesehen wird.*

4) *Alle Peripherie-Winkel im Halbkreise sind rechte Winkel.*

5) *Wenn man von irgend zwei Puncten einer gegebenen Hyperbel, die von einer der beiden Axen derselben (der Quer-Axe) gleich weit abstehen, zwei gerade Linien nach irgend einem dritten Puncte der Curve zieht, so bestimmen diese beiden geraden Linien auf der andern Axe (der imaginären) zwei Segmente, deren Product dem Quadrate dieser halben Axe gleich ist.*

6) Der sechste Satz bezieht sich auf Segmente, die auf zweien im Pol einer gegebenen geraden Linie, in Beziehung auf einen gegebenen Kegelschnitt, sich schneidenden Axen von der gegebenen geraden Linie und solchen Linien-Paaren bestimmt werden, welche irgend zwei Puncte des Kegelschnittes, die mit jenem Pole in gerader Linie liegen, mit irgend einem dritten Puncte des Kegelschnittes verbinden. Die unmittelbare Aussage des Satzes ist weniger einfach. —

§ 4.

Neue allgemeine Theorie der Curven.

725. Es sei

$$F(y, x) = o \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer gegebenen Curve zwischen gewöhnlichen Punct-Coordinaten. Es besteht also diese Gleichung, wenn y und x diejenigen Werthe erhalten, welche sich auf irgend einen beliebigen Punct dieser Curve beziehen. Die Tangente in diesem Puncte hat folgende Gleichung:

$$Y-y = \frac{dy}{dx}(X-x), \qquad (2)$$

indem wir, zur Unterscheidung, Y und X als die veränderlichen Grössen nehmen und den Differential-Coefficienten auf den Punct (y, x) beziehen. (Es wird nemlich die vorstehende Gleichung einmal befriedigt, wenn wir zugleich $Y = y$ und $X = x$ setzen, und dann ferner auch, wenn wir zugleich $Y = y+dy$ und $X = x+dx$ setzen). Die Coordinaten der durch die Gleichung (2) dargestellten geraden Linien sind, wenn wir $u = 1$ setzen (400):

$$v = -\frac{dy}{dx}, \qquad w = -\left(\frac{ydx-xdy}{dx}\right). \qquad (3)$$

Um also die Gleichung der gegebenen Curve zwischen Linien-Coordinaten zu erhalten, brauchen wir bloss y und x zwischen den drei Gleichungen (1) und (3) zu eliminiren.

726. Aus den beiden Gleichungen (3) ergibt sich folgende:

$$y+vx+w = o. \qquad (4)$$

Wenn wir diese Gleichung vollständig differentiiren, so kommt:

$$dy+vdx+dw+xdv = o,$$

und da $dy+vdx = o$, so folgt:

$$x = -\frac{dw}{dv}, \qquad (5)$$

und wenn wir diesen Werth von x in die Gleichung (4) substituiren, ergibt sich:

$$y = -\left(\frac{wdv-vdw}{dv}\right). \qquad (6)$$

Dieselben Werthe von y und x erhalten wir unmittelbar, wenn wir berücksichtigen, dass (y, x) der Berührungspunct auf der Tangente (w, v) ist, und jener Berührungspunct folgende Gleichung hat:

$$W-w = \frac{dw}{dv}(V-v),$$

indem wir, zur Unterscheidung, die veränderlichen Grössen W und V nennen. Umgekehrt erhalten wir die vorstehende Gleichung des Berührungspunctes unmittelbar aus den beiden Gleichungen (5) und (6) (400).

727. Wir haben (3):

$$vdx+dy = o; \qquad (7)$$

wenn wir diese Gleichung von Neuem differentiiren, indem wir dx als constant betrachten, und dann $\frac{d^2y}{dx^2} = q$ setzen, so kommt:

$$\frac{dv}{dx} = -q. \qquad (8)$$

Wir haben ferner (5):

$$xdv + dw = o, \tag{9}$$

und wenn wir diese Gleichung von Neuem differentiiren, indem wir dv als constant betrachten, und dann $\frac{d^2w}{dv^2} = Q$ setzen, so kommt:

$$\frac{dx}{dv} = -Q. \tag{10}$$

Aus den beiden Gleichungen (8) und (10) ergibt sich folgende einfache Beziehung zwischen den beiden zweiten Differential-Quotienten:

$$Qq = 1. \tag{11}$$

Aus der Zusammenstellung der ersten der beiden Gleichungen (8) und der Gleichungen (5), (8) und (10) ergeben sich noch folgende:

$$\frac{dw}{dx} = xq, \qquad \frac{dy}{dv} = vQ, \qquad \frac{dw}{dy} = -\frac{qx}{v}.$$

728. Wenn wir die Gleichung (11) differentiiren, so kommt:

$$pdQ = -Qdq,$$

und mithin auch (8):

$$\frac{qdQ}{dv} = \frac{Qdq}{qdx},$$

oder:

$$q^3R = r, \qquad Q^3r = R, \tag{12}$$

indem wir

$$\frac{dQ}{dv} = \frac{d^3w}{dv^3} = R, \qquad \frac{dq}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3} = r,$$

setzen.

Wenn wir weiter gehen und eine der beiden Gleichungen (12), etwa die erste derselben, differentiiren, so kommt:

$$dr - 3Rq^2dq - q^3dR = o,$$

und wenn wir die beiden ersten Glieder dieser Gleichung durch qdx, das dritte Glied durch (—dv) dividiren, und dann reduciren, indem wir zugleich

$$\frac{dR}{dv} = \frac{d^4w}{dv^4} = S, \qquad \frac{dr}{dx} = \frac{d^4y}{dx^4} = s,$$

setzen, so ergibt sich:

$$qs - 3r^2 + q^5S = o. \tag{13}$$

Aus dieser Gleichung können wir durch Hülfe der Gleichungen (11) und (12) oder, einfacher, durch die blosse gegenseitige Vertauschung der grossen Buchstaben mit den entsprechenden kleinen, folgende ableiten:

$$QS - 3R^2 + Q^5s = o. \tag{14}$$

Auf diese Weise können wir fortfahren und den Differential-Quotienten einer beliebigen Ordnung in einem Coordinaten-Systeme durch die Differential-Quotienten derselben Ordnung und der niederern Ordnungen in dem andern Coordinaten-Systeme ausdrücken.

729. Nach den beiden vorigen Nummern erhalten wir, wenn eine Curve durch ihre Differential-Gleichung von einer beliebigen Ordnung zwischen gewöhnlichen Punct-Coordinaten y und x gegeben ist, unmittelbar die Differential-Gleichung derselben Ordnung dieser Curve zwischen den Linien-Coordinaten w und v, und, umgekehrt, jene Differential-Gleichung aus dieser. So ergibt sich allgemein aus der Gleichung:

$$F[\ldots s, r, q, p, y, x] = 0,$$

die folgende:

$$F\left(\ldots \frac{3R^2-QS}{Q^5}, \frac{R}{Q^3}, \frac{1}{Q}, (-v), -(w-vP), -P\right) = 0,$$

indem wir, der Symmetrie halber, die beiden ersten Differential-Quotienten p und P nennen. Wir erhalten zwei neue Gleichungen, welche sich wiederum auf ein und dieselbe Curve beziehen, wenn wir in den beiden vorstehenden Gleichungen die grossen und kleinen sich entsprechenden Buchstaben gegenseitig mit einander vertauschen.

730. Wir können die Gleichungen zwischen den Linien-Coordinaten w und v auf eine doppelte Weise allgemein discutiren. Wir können nemlich einerseits, mit Hülfe der TAYLOR'schen Reihe, die Bedeutung der verschiedenen Differential-Quotienten geometrisch nachweisen, wie diess zum Beispiel, in Beziehung auf die gewöhnlichen Coordinaten, in *LACROIX, Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral* 60, geschehen ist, oder wir können auch, von der andern Seite, die einmal schon vorliegenden Entwicklungen, in Beziehung auf die gewöhnlichen Coordinaten, y und x auf die Coordinaten w und v übertragen. Ich will hier vorzugsweise den letztern Weg einschlagen und habe zu diesem Ende die bisherigen Entwicklungen dieses Paragraphen vorangeschickt.

Der Symmetrie halber wollen wir endlich noch in die zu discutirende Gleichung eine dritte Grösse u einführen, indem wir $\frac{v}{u}$ und $\frac{w}{u}$ an die Stelle von v und w schreiben, und demnach dieselbe auf folgende Weise bezeichnen:

$$F\left(\frac{w}{u}, \frac{v}{u}\right) = U = 0. \qquad (1)$$

Wenn diese Gleichung eine algebraische ist, so ist sie, in Beziehung auf w, v und u, homogen. Wenn in dem Folgenden von Differential-Quotienten von w, in Beziehung auf v, die Rede sein wird, so müssen wir, um den frühern Entwicklungen uns anzuschliessen, u = 1 setzen. Ferner wollen wir, wenn von Differential-Quotienten von w, in Beziehung auf u, die Rede sein wird, stillschweigend dabei verstehen, dass v = 1 gesetzt werde. Auf diese Weise gewinnen wir den Vortheil, dass wir auf eine symmetrische Weise die Beziehungen der bezüglichen Curve zu jeder der beiden Coordinaten-Axen erhalten.

731. Je nachdem $\frac{v}{u}\left(= -\frac{dy}{dx}\right)$ negativ oder positiv ist, wachsen die Punct-Ordinaten der Curve oder nehmen ab, wenn wir uns, nach der Richtung der ersten Axe hin, weiter vom Anfangspuncte entfernen. Je nachdem die beiden Ausdrücke:

$$\frac{d^2w}{dv^2}, \qquad \frac{vdw-wdv}{dv},$$

bezogen auf irgend einen Punct irgend einer durch ihre Gleichung gegebenen Curve, entgegengesetzte oder übereinstimmende Zeichen erhalten, kehrt die Curve ihre concave oder ihre convexe Seite der ersten Coordinaten-Axe zu. (LACROIX a. a. O. 62).

Da ferner $\frac{dw}{dv} = -x$, so ist für die Tangenten in den Durchschnittspuncten der Curve mit der zweiten Coordinaten-Axe

$$\frac{dw}{dv} = 0,$$

und man erhält diese Tangenten, wenn man die letzte Gleichung entwickelt und dann mit

der Gleichung der Curve zusammenstellt. Für die Tangenten in den Durchschnittspuncten der Curve mit der ersten Axe ist

$$\frac{dw}{du} = 0;$$

und endlich ergibt sich für die Tangenten der gegebenen Curve in ihren Durchschnittspuncten mit irgend einer zweiten Curve:

$$f(y, x) = 0, \qquad (2)$$

folgende Gleichung:

$$f\left(-\frac{dw}{du}, -\frac{dw}{dv}\right) = 0. \ *) \qquad (3)$$

---

*) Man sieht sogleich ein, dass, wenn die gegebene Gleichung (1) eine algebraische und von irgend einem n. Grade, in Beziehung auf w, v und u, ist, die partiellen Differential-Coefficienten $\frac{dw}{dv}$ und $\frac{dw}{du}$ dieselben Grössen in der (n—1). Potenz enthalten, und wenn also die Gleichung (2) ebenfalls eine algebraische und von irgend einem m. Grade, in Beziehung auf y und x, ist, so steigt die Gleichung (3), in Beziehung auf w, v und u, bis zum m(n—1). Grade. Wir erhalten also mn(n—1) Tangenten der Curve (1) in ihren Durchschnittspuncten mit der Curve (2) und also auch, worauf es uns hier ankommt, eine gleiche Anzahl solcher Durchschnittspuncte. Da die Curve (2) von der m. Ordnung ist, so ist die gegebene Curve von der n(n—1). Ordnung. Also eine Curve von der n. Classe ist, im Allgemeinen, von der n(n—1). Ordnung, eine Curve von der n. Ordnung ist, im Allgemeinen, von der n(n—1). Classe. Unmittelbar hieraus folgt, dass die Polar-Curve einer gegebenen Curve n. Ordnung, in Beziehung auf irgend eine gegebene lineare Hülfs-Gleichung, im Allgemeinen, eine Curve n(n—1). Ordnung, und die Polar-Curve einer gegebenen Curve n. Classe von der n(n—1). Classe ist. Es ergibt sich ferner, dass zwei Curven n. und m. Ordnung, im Allgemeinen und höchstens, mn(m—1)(n—1) gemeinschaftliche Tangenten und zwei Curven von denselben Classen eine gleiche Anzahl von Durchschnitten haben.

Die vorstehenden Resultate hat zuerst H. Poncelet in Gergonne's Annalen und dann ausführlicher in seiner oben angeführten Abhandlung im 4. Bande des Crelle'schen Journals Nro. 66 und 73 aufgestellt. Es scheinen mir dieselben fest zu stehen, ungeachtet aller dagegen erhobenen Zweifel und Einwürfe. Es bleibt hierbei nur ein Paradox zu erklären. Da nemlich die Polar-Curve einer gegebenen Curve n. Ordnung von der n(n—1) Ordnung ist und die gegebene Curve gegenseitig (und zwar in Beziehung auf dieselbe Hülfs-Gleichung, wenn diese eine symmetrische ist, in welchem Falle wir auch rein geometrisch, vermittelst eines Kegelschnittes, construiren können) die Polar-Curve jener zweiten Curve ist, so reducirt sich in dem vorliegenden Falle die Polar-Curve einer Curve n(n—1). Ordnung, die, im Allgemeinen, von der [n(n—1)][n(n—1)—1] Ordnung ist, auf die n. Ordnung. Setzen wir zum Beispiel n = 3, so reducirt sich der 30. Grad auf den dritten. Wir wollen bei diesem Beispiele stehen bleiben. Für die Polar-Curven derjenigen Curven, welche durch die allgemeine Gleichung des 6. Grades dargestellt werden, erhalten wir wirklich eine Gleichung des 30. Grades, die aber nicht die allgemeine Gleichung dieses Grades sein kann, weil sie nur so viele beliebige Constante enthält, als die allgemeine Gleichung des 6. Grades, nemlich nur 27. Hiernach hebt sich, wie auch schon sowol H. Gergonne als H. Poncelet bemerkt, jeder scheinbare Widerspruch. Aber es bleibt im Einzelnen noch nachzuweisen, wodurch jene Gleichung des 30. Grades sich reducirt. Offenbar kann diess nur dann geschehen, wenn die Coefficienten dieser Gleichung durch besondere Werthe der Coefficienten der allgemeinen Gleichung des 6. Grades Null oder unendlich werden, oder dadurch, dass diese Gleichung reelle Factoren hat, die wir, als der Aufgabe fremd, fortlassen. Es bedarf diess noch einer nähern Erörterung. Die entsprechenden geometrischen Beziehungen bieten sich ebenfalls nicht sogleich dar. H. Poncelet gibt eine Erklärungsweise (a. a. O. Nro. 67), die wenigstens nicht ausreichend ist. Nach ihm reducirt sich die Zahl der m(m—1) Tangenten, welche sich, von einem gegebenen Puncte aus, an eine gegebene Curve m. Ordnung legen lassen (und also auch der Grad ihrer Polar-Curve) um 2p Einheiten, wenn diese Curve p Doppelpuncte hat, an deren

Wenn die gegebene Curve eine **Asymptote** hat, so ist für den Berührungspunct auf derselben x, im Allgemeinen, unendlich. Mithin bekommt man für jene Asymptote

$$\frac{dv}{dw} = 0.$$

Eine Ausnahme hiervon findet Statt, wenn die Asymptote mit der zweiten Coordinaten-Axe zusammenfällt; alsdann aber ist y unendlich und man hat:

$$\frac{du}{dw} = 0.$$

Man erhält also die Asymptoten der in Rede stehenden Curve, wenn man ihre Gleichung mit einer der beiden letzten Gleichungen zusammenstellt. Wenn indess diese Zusammenstellung zu Werthen von $\frac{w}{u}$ und $\frac{w}{v}$ führt, die beide unendlich werden, so erhält man keine Asymptoten, sondern durch $\frac{v}{u}$ ist alsdann die Richtung der **Durchmesser eines parabolischen Zweiges** der Curve gegeben.

732. Für das Differential des Bogens der bezüglichen Curve hat man (10):

$$\pm\left(1+\frac{dx^2}{dy^2}\right)^{1/2}.dx = \mp(1+v^2)^{1/2}\frac{d^2w}{dv^2}dv. —$$

Für das Differential der Fläche, welche von der Curve, der ersten Coordinaten-Axe und zwei Punct-Ordinaten begränzt wird, hat man

$$ydx = -\frac{vdw-wdv}{dv}\cdot\frac{d^2w}{dv^2}dv = -\tfrac{1}{2}vd.\left(\frac{dw}{dv}\right)^2+w\frac{d^2w}{dv^2}dv.$$

Auf ähnliche Weise hat man für das von der Curve, der zweiten Coordinaten-Axe und zwei auf einander folgende Abscissen begränzte Flächen-Differential:

$$xdy = -\frac{dw}{dv}\cdot\frac{dy}{dv}dv = -\tfrac{1}{2}vd.\left(\frac{dw}{dv}\right)^2$$

und endlich, wenn das Flächen-Differential durch die Curve und zwei durch den Anfangspunct der Coordinaten gehende gerade Linien begränzt ist:

$$\frac{ydx-xdy}{2} = \tfrac{1}{2}w\frac{d^2w}{dv^2}dv.$$

Bei dem Gebrauche von Linien-Coordinaten bietet sich der Gedanke ganz natürlich dar, Flächenräume durch die gegebene Curve, durch zwei Tangenten derselben und durch die zweite Coordinaten-Axe zu begränzen. Das Differential eines so bestimmten Flächenraumes ist alsdann, was sogleich einleuchtet:

$$-\tfrac{1}{2}xdw = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dw}{dv}\right)^2dv. —$$

733. Wenn zwei gegebene Curven sich in irgend einem Puncte berühren, so ist für diesen Punct, indem wir zur Unterscheidung die accentuirten Buchstaben auf die zweite

Stelle auch conjugirte Puncte u. s. w. treten und die auch unendlich weit liegen können. Aber eine Curve 6. Ordnung hat höchstens 10 Doppelpuncte. (Es folgt diess auf dem Wege, den Cramer in seiner *Analyse des lignes courbes* einschlägt, namentlich daraus, dass eine solche Curve von einer Curve 4. Ordnung höchstens in 24 Puncten geschnitten wird, wonach unter den 14 Puncten, durch welche sich immer eine Curve 4. Ordnung legen lässt, höchstens 10 Doppelpuncte der Curve 6. Ordnung sind.) Hiernach kann also jene Curve, die, im Allgemeinen, von der 30. Ordnung ist, sich höchstens auf die 10. Ordnung reduciren.

Curve beziehen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy'}{dx'}, \qquad y = y', \qquad x = x'.$$

Die erste und dritte dieser drei Gleichungen geben:

$$v = v', \qquad \frac{dw}{dv} = \frac{dw'}{dv'},$$

und die zweite Gleichung gibt, wenn wir die vorstehenden beiden berücksichtigen:

$$w = w'.$$

Es stimmen also zwei sich berührende Curven ebenfalls in den Coordinaten w und v und dem Differential-Quotienten, in Beziehung auf diese Coordinaten, überein.

Die Gleichung (11) der 727. Nummer zeigt, dass zwei sich dreipunctig osculirende Curven, da sie, was y und x und die beiden ersten Differential-Quotienten von y, in Beziehung auf x, betrifft, übereinstimmen, ebenfalls übereinstimmen in den Werthen von w, v und den beiden ersten Differential-Quotienten von w, in Beziehung auf v. Ferner folgt aus der Gleichung (12), dass bei einer vierpunctigen Osculation die beiden Curven, auch in Betreff der dritten Differential-Quotienten, von w, in Beziehung auf v, übereinstimmen und aus der Gleichung (13) ist ersichtlich, dass bei einer fünfpunctigen Osculation auch die vierten Differential-Quotienten gleiche Werthe erhalten. Wir überzeugen uns auf diesem Wege, dass die Theorie der Osculation in dem neuen Systeme derselben Theorie, in dem Systeme der gewöhnlichen Punct-Coordinaten, ganz und gar analog ist, und dass bei jedem beliebigen Grade des Contactes so viele Tangenten als Puncte zusammenfallen.

734. Der allgemeine Ausdruck für den Krümmungshalbmesser ist folgender:

$$\frac{(dx^2+dy^2)^{3/2}}{dxd^2y} = (1+v^2)^{3/2}\frac{d^2w}{dv^2}.$$

Die Mittelpuncte der Krümmungs-Kreise für alle verschiedenen Puncte einer gegebenen Curve liegen bekanntlich auf einer zweiten Curve, deren Tangenten die Normalen der gegebenen Curve sind, und durch deren Abwicklung man diese Curve erhält. Wir können leicht die Gleichung jener zweiten, der abgewickelten, Curve erhalten. Es sei

$$F(w, v) = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung der gegebenen Curve. Für den Berührungspunct auf irgend einer beliebigen Tangente (w, v) dieser Curve ergibt sich, indem wir W und V als die eigentlichen veränderlichen Grössen (*coordonnées courantes*) betrachten, folgende Gleichung:

$$W-w = \frac{dw}{dv}(V-v).$$

Für die Normale in diesem Berührungspuncte, die wir durch (w', v') bezeichnen wollen, hat man zunächst:

$$v = -\frac{1}{v'},$$

und hiernach erhält man aus der letzten Gleichung:

$$w = w' + \frac{dw}{dv}\left(\frac{v'^2+1}{v'}\right).$$

Substituiren wir endlich die eben gefundenen Werthe von w und v in die Gleichung (1), so kommt

$$F\left\{\left(w'+\frac{dw}{dv}\left(\frac{v'^2+1}{v'}\right)\right), -\frac{1}{v'}\right\} = 0$$

und diess ist die gesuchte Gleichung der abgewickelten Curve, wenn wir den Werth des Differential-Quotienten $\frac{dw}{dv}$ als Function von v aus der Gleichung (1) ziehen, für v seinen Werth $\left(-\frac{1}{v'}\right)$ setzen und dann überall in der letzten Gleichung w' und v' als veränderliche Grössen betrachten.

Es sei ferner

$$f(y, x) = 0 \qquad (2)$$

die Gleichung der gegebenen Curve zwischen Punct-Coordinaten. Die Gleichung der Normalen in irgend einem Puncte (y, x) dieser Curve ist bekanntlich, wenn wir Y und X als die eigentlichen veränderlichen Grössen betrachten:

$$Y-y = -\frac{dx}{dy}(X-x)$$

und also sind die Coordinaten derselben:

$$v = \frac{dx}{dy}, \qquad w = -\frac{ydy+xdx}{dy},$$

Wenn wir zwischen den beiden letzten Gleichungen und der Gleichung (2) y und x eliminiren, so erhalten wir wiederum die Gleichung der abgewickelten Curve. Umgekehrt erhält man, wenn die Gleichung der abgewickelten Curve zwischen Linien-Coordinaten gegeben ist, vermittelst der letzten beiden Gleichungen, unmittelbar die Differential-Gleichung der abwickelnden Curve.

Ich enthalte mich, des beschränkten Raumes wegen, aller detaillirten Entwicklungen.

735. Ich gehe zu einigen Andeutungen über die Theorie der singulären Puncte und singulären geraden Linien über. Wenn

$$F(y, x) = Z = 0 \qquad (1)$$

die Gleichung irgend einer gegebenen Curve ist, die einen Doppelpunct hat, so wird derselbe dadurch angezeigt, dass zugleich

$$\frac{dZ}{dy} = 0, \qquad \frac{dZ}{dx} = 0, \qquad (2)$$

wonach $\frac{dy}{dx}$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, und sein wahrer Werth ein zwiefacher ist. Wenn die Gleichung

$$f(w, v) = U = 0 \qquad (3)$$

eine Curve darstellt, deren zwei Zweige von derselben geraden Linie berührt werden, so wird diese gerade Linie dadurch angezeigt, dass

$$\frac{dU}{dw} = 0, \qquad \frac{dU}{dv} = 0, \qquad (4)$$

wonach $\frac{dw}{dv}$ unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, und sein wahrer Werth ein zwiefacher ist. Da wir hiernach zur Bestimmung jenes Doppelpunctes und dieser gemeinschaftlichen Tangente zweier Zweige jedesmal zugleich drei Gleichungen erhalten, so ist ersichtlich, dass, im Allgemeinen, eine algebraische Curve einerseits keine zwei sich schneidende Zweige und andrerseits keine solche zwei Zweige hat, welche beide von derselben geraden Linie berührt werden, und dass dieselbe überhaupt keine singuläre Puncte und singuläre gerade Linien hat. Wenn wir ein System von zwei Curven als eine einzige Curve betrachten, so erhalten wir, in Uebereinstimmung mit den vorstehenden Bemerkungen, so viele Doppelpuncte und so viele, zwei Zweige berührende, gerade Linien, als die beiden Curven Durchschnittspuncte und gemeinschaftliche Tangenten haben.

Ein conjugirter, isolirter Punct einer gegebenen Curve (1) wird dadurch angezeigt, dass $\frac{dy}{dx}$ oder einer der folgenden Differential-Coefficienten von y, in Beziehung auf x, imaginär wird: eine conjugirte isolirte gerade Linie einer gegebenen Curve (1) wird dadurch angezeigt, dass der erste oder einer der spätern Differential-Coefficienten von w, in Beziehung auf v, imaginär wird.

Für Rückkehrpuncte und Wendungspuncte ist bekanntlich der zweite Differential-Coefficient $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleich Null oder unendlich; die Tangente in solchen Puncten ist eine singuläre gerade Linie und für dieselbe mithin (727) der zweite Differential-Coefficient $\frac{d^2w}{dv^2}$, umgekehrt, gleich Null oder unendlich.

Wenn $\frac{dw}{dv}$ unendlich wird, so ist die bezügliche Tangente eine Asymptote. Die TAYLORsche Reihe versagt alsdann ihren Dienst zur Entwicklung von w. In diesem Falle müssen wir untersuchen, ob die Gleichungen (4) nicht beide zugleich befriedigt werden und jener Differential-Coefficient, der alsdann ursprünglich unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, durch Fortlassung eines gemeinschaftlichen Factors in Nenner und Zähler sich unter seinem wahren Werthe, als unendlich gross, darstellt. Wenn diess geschieht, so ist die Asymptote eine singuläre gerade Linie, die auch noch von einem zweiten Zweige der Curve berührt wird. Es kann alsdann auch, was eine leichte Entwicklung zeigt, der auf dieser Asymptote unendlich weit entfernt liegende Punct ein solcher singulärer Punct sein, der einem Rückkehr- oder Wendungs-Punct entspricht. Einfache Beispiele hiervon liefern die Gleichungen

$$w^3 = p^2v, \qquad w^3 = p^2v^2,$$

für w = o und v = o.

736. Wir haben in diesem letzten Paragraphen w und v als die beiden Linien-Coordinaten betrachtet, nehmen wir statt derselben w und u, so bleibt Alles unverändert, wenn wir die beiden Coordinaten-Axen mit einander vertauschen. Wenn wir v und u als Linien-Coordinaten einführen, so geht die Gleichung (4) der 726. Nummer in folgende über:

$$uy+vx+1 = o,$$

und diese Gleichung erhält wiederum die Form der Gleichung (4), wenn wir dieselbe durch y dividiren, z für $\frac{1}{y}$ schreiben und dann y gleich Eins nehmen. Auf diese Weise kommt nemlich:

$$z+vx+u = o.$$

Wir können hiernach in allen bisherigen Entwicklungen dieses Paragraphen z mit y und u mit w vertauschen. Auf diese Weise erhalten wir zum Beispiel:

$$\frac{dz}{dx} = -v, \qquad \frac{du}{dv} = -x, \qquad \frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2u}{dv^2} = 1.$$

737. Wenn irgend eine Curve, deren Gleichung folgende ist:

$$F(z, x) = Y = o,$$

einen singulären Punct hat, so ergibt sich für denselben, ähnlich wie in der 735. Nummer, zugleich:

$$\frac{dY}{dz} = o, \qquad \frac{dY}{dx} = o.$$

Wenn irgend eine Curve, deren Gleichung folgende ist:

$$f(u, v) = W = o,$$

eine singuläre gerade Linie hat, so ergibt sich für dieselbe sogleich:

$$\frac{dW}{du} = o, \qquad \frac{dW}{dv} = o.$$

In dem ersten Coordinaten-Systeme begegnet man unwillkührlich auch den singulären Puncten in unendlicher Entfernung, deren Existenz erst vor Kurzem H. PONCELET angezeigt hat, und zugleich bietet sich eine leichte Discussion derselben dar, weil das z eines solchen Punctes Null wird, während das x desselben, im Allgemeinen, einen endlichen Werth behält. Auf eine ähnliche Weise knüpft sich an das zweite Coordinaten-System eine einfache Discussion der unendlich weit entfernt liegenden singulären geraden Linien einer gegebenen Curve, für welche zugleich u = o und v = o. —

Verbesserungen.

Erster Band.

S. 8 Z. 13 v. u. statt q lies q'.

„ 12 „ 11 „ „ fehlt im Ausdrucke für $\cos\alpha$ der Zähler 1.

„ 25 „ 11 v. o. st. $A''-A''$ l. $A'-A'''$.
Die Schluss-Bemerkung der 52. Nummer bedarf einer Berichtigung, die sich sogleich ergibt, wenn man wie am Ende der 449. Nummer des zweiten Bandes verfährt.

„ 33 „ 22 „ „ st. QQ_n und PP_n l. QP_n und PQ_n.

„ 46 „ 12 v. u. st. $x\sin\varphi$ l. $x\cos\varphi$.

„ „ „ 9 „ „ st. y l. x.

„ „ „ 4 „ „ st. $y\sin\varphi$ l. $x\sin\varphi$.

„ 87 „ 6 „ „ st. x l. $\varkappa$.

„ 134 „ 13 „ „ steht der Factor 2 zuviel.

„ 138 „ 14 „ „ statt $\alpha^2+\beta$ l. $\alpha^2-\beta$.

„ 144 „ 11 v. o. st. $\sin\vartheta$ l. $\sin^2\vartheta$.

„ „ „ 10 „ „ st. $\alpha'^2-\beta$ l. $\alpha^2-\beta$.

„ 147 „ 14 v. u. st. y l. y^2.

„ 148 „ 17 „ „ st. *Introduction* l. *Introductio*.

„ 150 „ 18 v. o. st. erste l. zweite.

„ 155 „ 19 v. u. st. $M''M_{''}$ l. $M'M_{''}$.

„ „ „ 9 „ „ st. entgegengesetztem l. gleichem.

„ „ „ 8 „ „ st. kleiner oder grösser als das l. grösser oder kleiner als das vierfache.

„ 163 „ 15 „ „ st. $\xi y''$ l. $\xi y'$.

„ 165 „ 3 „ „ st. y l. $-y$.

„ „ „ 1 „ „ st. $-2(q-q')x+$ l. $+2(q-q')x-$.

„ 181 „ 20 „ „ st. Wir . . . Parallellinien l. Je nachdem $(\gamma^2-\varepsilon)$ und demnach auch $(\delta^2-\beta\varepsilon)$ positiv, gleich Null oder negativ ist, also je nachdem die Coordinaten-Axen die Curve schneiden, berühren oder nicht schneiden, sind jene Parallellinien reell, fallen zusammen oder sind imaginär.

„ „ „ 10 „ „ st. nur l. nun.

„ 184 „ 16 „ „ st. 2μ l. $2\varepsilon\mu$.

„ 249 „ 4 v. o. st. TV l. TU.

„ 271 „ 5 „ „ st. χ überall $\varkappa$.
In der 16. Figur der 1. Tafel ist eine durch O' gehende gerade Linie falsch gezogen.

Zweiter Band.

„ 4 „ 8 v. u. am Ende der Zeile lies $\left(-\frac{w'}{u'}\right)$ statt $\left(-\frac{w'}{v'}\right)$,

„ 9 „ 1 „ „ statt α' l. x'.

„ 14 „ 16 „ „ st. u''' l. c'''.

„ 17 „ 8 „ „ st. *ohne dass die Winkel sich drehen* l. *wie auch die Winkel sich drehen mögen.*

„ 30 „ 9 „ „ st. $\sin''\beta$ l. $\sin\beta''$.

„ 32 „ 2 „ „ st. 440 l. 441.

„ 40 „ 14 v. o. st. χ l. x.

„ „ „ 7 v. u. st. x l. x'.

„ 69 „ 12 „ „ st. Dx l. Dy.

„ 71 „ 8 „ „ st. ψ' l. ψ.

„ 73 „ 15 v. o. ist das Zeichen des Ausdrucks für $(a+a')$ zu ändern, wodurch auch eine Zeichen-Aenderung in den Gleichungen (7), (8), (10) und (11) hervorgebracht wird.

„ 118 „ 15 „ „ st. $\left(\frac{dU}{dw}\right)$ l. $\left(\frac{dU}{du}\right)$.

„ 176 „ 1 v. u. st. $\frac{E}{C}=\frac{E'}{C'}$ l. $\frac{E}{D}=\frac{E'}{D'}$.

„ 192 „ 7 v. o. st. $(DBD'-'B)$ l. $(BD'-B'D)$.

